КОНФЕРЕНЦИЯ
«Динамика в Сибири»

2 марта — 6 марта 2026 года

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Д.А. Прокудин[1]

Существование и единственность слабого решения начально-краевой задачи для математической модели движения смеси жидкостей Кельвина-Фойгта

[1] Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск

Математические модели течений несжимаемых сред

Течение несжимаемой теплопроводной сплошной среды в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, на промежутке времени $[0, T]$, $T = \mathrm{const} > 0$, описывается следующей системой уравнений[1]:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_k} = \operatorname{div} \mathbb{P}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \operatorname{div}(\chi \nabla \theta) + \mathbb{P} : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}). \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ — неизвестный вектор скорости, $\mathbb{P}$ — тензор напряжений, e — внутренняя удельная энергия, χ — коэффициент теплопроводности, θ — абсолютная температура, $\mathbb{D}(\boldsymbol{v})$ — тензор скоростей деформаций,
$\mathbb{D}_{ks}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_k}{\partial x_s} + \dfrac{\partial v_s}{\partial x_k}\right)$, $k, s = 1, 2, 3.$

[1] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.

Система уравнений (1)-(3) описывает движение всех сплошных сред и не является замкнутой. Для ее замыкания необходимо конкретизировать вид сплошной среды и привлекать дополнительные соотношения.

Тензор напряжений представим в форме

$$\mathbb{P} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}(\boldsymbol{v}), \tag{4}$$

где p — давление, I — единичный тензор, а тензор $\mathbb{S}(\boldsymbol{v})$ отвечает за вид сплошной среды.

Например, соотношение

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) = 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}), \tag{5}$$

где μ — коэффициент вязкости, отвечает ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим основное термодинамическое тождество, отвечающее такой среде:

$$\frac{de}{dt} = \theta\frac{ds}{dt}, \tag{6}$$

где s — удельная энтропия.

Уравнение энергии (3) тогда можно переписать в эквивалентой форме

$$\theta \frac{\partial s}{\partial t} + \theta \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = \mathrm{div}(\chi \nabla \theta) + 2\mu \mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}). \tag{7}$$

Второй закон термодинамики утверждает, что для любого индивидуального (состоящего из одних и тех же материальных частиц) теплоизолированного объема его суммарная энтропия не убывает.

Если $\nabla \theta \cdot \boldsymbol{n} = 0$ на $\partial\Omega$, где $\boldsymbol{n}$ — это единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω, то

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} s \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} \frac{\chi |\nabla \theta|^2}{\theta^2} \, d\boldsymbol{x} + 2 \int\limits_{\Omega} \frac{\mu \mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v})}{\theta} \, d\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

Таким образом, необходимо чтобы

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\chi |\nabla \theta|^2}{\theta^2} \, d\boldsymbol{x} + 2 \int\limits_{\Omega} \frac{\mu \mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v})}{\theta} \, d\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

и мы получаем очевидные условия

$$\theta > 0, \quad \chi \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0.$$

Принимая в (3) и (6) в качестве $e = \theta + e_0$, $s = \ln\theta + s_0$, мы приходим к замкнутой и термодинамически непротиворечивой системе уравнений Навье-Стокса динамики ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_k} + \nabla p = 2\operatorname{div}(\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v})), \tag{10}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \operatorname{div}(\chi\nabla\theta) + 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}). \tag{11}$$

Одним из примеров неньютоновской среды является слабоконцентрированный водный полимерный раствор[2], для которого

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) = 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) + 2\kappa\frac{d(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))}{dt}, \quad \text{где} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{12}$$

κ — коэффициент времени релаксации.

[2]Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809–812.

В этом случае основное термодинамическое тождество примем в виде[3]

$$\frac{de}{dt} = \theta\frac{ds}{dt} + 2\kappa\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \frac{d(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))}{dt}. \tag{13}$$

Уравнение энергии (3) тогда можно переписать в эквивалентой форме

$$\theta\frac{\partial s}{\partial t} + \theta\sum_{k=1}^{3} v_k\frac{\partial s}{\partial x_k} = \mathrm{div}(\chi\nabla\theta) + 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}). \tag{14}$$

Для проверки выполнения второго закона термодинамики, предполагая $\nabla\theta\cdot\boldsymbol{n} = 0$ на $\partial\Omega$, тогда получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} s\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega}\frac{\chi|\nabla\theta|^2}{\theta^2}\,d\boldsymbol{x} + 2\int\limits_{\Omega}\frac{\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v})}{\theta}\,d\boldsymbol{x} \geqslant 0 \tag{15}$$

при

$$\theta > 0, \quad \chi \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0.$$

С помощью дополнительных исследований[3] показывается, что $\kappa \geqslant 0$.

[3]Dunn J.E., Fosdick R.L. Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade // Arch. Rational Mech. Anal. — 1974. — V. 56. — P. 191–252.

Принимая в (3) и (13) в качестве $e = \theta + \kappa\,\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}) + e_0$, $s = \ln\theta + s_0$, мы приходим к замкнутой и термодинамически непротиворечивой системе уравнений динамики слабоконцентрированного водного полимерного раствора

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_k} + \nabla p = 2\operatorname{div}(\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v})) + 2\operatorname{div}\left(\kappa\frac{d(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))}{dt}\right), \tag{17}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \operatorname{div}(\chi\nabla\theta) + 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}) + 2\kappa\frac{d(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))}{dt} : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}). \tag{18}$$

Отметим, что система уравнений (16)-(18) сложна для изучения, при ее исследовании и рассматривались различные упрощения.

А именно, вместо соотношения (12) рассматривалось следующее соотношение[4]:

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) = 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) + 2\kappa\frac{\partial(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))}{\partial t}. \tag{19}$$

[4]Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.

В этом случае, мы приходим к системе уравнений Навье-Стокса-Фойгта динамики вязкоупругой жидкости типа Кельвина-Фойгта[5]

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_k} + \nabla p = 2\operatorname{div}(\mu \mathbb{D}(\boldsymbol{v})) + 2\operatorname{div}\left(\kappa \frac{\partial (\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))}{\partial t}\right), \tag{21}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \operatorname{div}(\chi \nabla \theta) + 2\mu \mathbb{D}(\boldsymbol{v}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}) + 2\kappa \frac{\partial (\mathbb{D}(\boldsymbol{v}))}{\partial t} : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}). \tag{22}$$

Интерес представляет обобщение системы уравнений (1)-(3) на многокомпонентный случай[6]:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_{ik} \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial x_k} = \operatorname{div} \mathbb{P}_i + \boldsymbol{J}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{24}$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_{ik} \frac{\partial e_i}{\partial x_k} = \operatorname{div}(\chi_i \nabla \theta_i) + \mathbb{P}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i) + \Gamma_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{25}$$

[5] Осколков А.П. К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина–Фойгта // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1982. — Т. 115. — С. 191–202.

[6] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.

Здесь N — число компонент ($N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$), $\boldsymbol{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$ — вектор скорости, $\mathbb{P}_i$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{J}_i$ — интенсивность обмена импульсом между компонентами, e_i — внутренняя удельная энергия, χ_i — коэффициент теплопроводности, θ_i — абсолютная температура, Γ_i — приток тепловой энергии в i-ю компоненту из других компонент.

Тензор напряжений представим в форме

$$\mathbb{P}_i = -p_i \mathbb{I} + \mathbb{S}_i, \tag{26}$$

где p_i - давление, а тензоры $\mathbb{S}_i$, $i = 1, \ldots, N$ отвечают за вид сплошной среды.

Например, равенства

$$\mathbb{S}_i = 2 \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij} \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j), \tag{27}$$

где $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ — коэффициенты вязкостей, отвечают смеси ньютоновских вязких несжимаемых жидкостей, течение которой описывается обобщенными на многокомпонентный случай уравнениями Навье-Стокса.

Для интенсивности обмена импульсом и притока тепловой энергии примем, что

$$\boldsymbol{J}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i), \quad \Gamma_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(\theta_j - \theta_i) + \Gamma, \tag{28}$$

где коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, $\Gamma = \dfrac{1}{2N} \sum\limits_{i,j=1}^{N} a_{ij}|\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j|^2$.

Основное термодинамическое тождество, отвечающее данной среде имеет следующий вид:

$$\frac{de_i}{dt} = \theta_i \frac{ds_i}{dt}, \tag{29}$$

где s_i — удельная энтропия.

Уравнение энергии (25) тогда можно переписать в эквивалентой форме

$$\theta_i \frac{\partial s_i}{\partial t} + \theta_i \sum_{k=1}^{3} v_{ik} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} = \mathrm{div}(\chi_i \nabla \theta_i) + 2 \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij} \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j) + \Gamma_i. \tag{30}$$

Для проверки выполнения второго закона термодинамики предположим, что $\nabla\theta_i \cdot \boldsymbol{n} = 0$ на $\partial\Omega$.

Тогда получим следующее равенство:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} s_i\,d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\chi_i|\nabla\theta_i|^2}{\theta_i^2}\,d\boldsymbol{x} + 2\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)}{\theta_i}\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\Gamma_i}{\theta_i}\,d\boldsymbol{x}. \tag{31}$$

Таким образом, необходимо чтобы

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\chi_i|\nabla\theta_i|^2}{\theta_i^2}\,d\boldsymbol{x} + 2\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)}{\theta_i}\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2N}\sum_{i,j,k=1}^{N}\int_{\Omega} a_{ij}\frac{|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|^2}{\theta_k}\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega} b_{ij}\frac{(\theta_i-\theta_j)^2}{\theta_i\theta_j}\,d\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

и мы получаем очевидные условия

$$\theta_i > 0, \quad \chi_i \geqslant 0, \quad a_{ij} \geqslant 0, \quad b_{ij} \geqslant 0,$$

но неясен знак второго слагаемого в левой части этого неравенства.

Легко обеспечить неотрицательность суммы

$$\sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j) \tag{32}$$

через неотрицательность матрицы вязкостей $\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$, но (32) и неотрицательность второго слагаемого

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)}{\theta_i}\, d\boldsymbol{x}$$

не одно и тоже.

Поэтому, будем использовать однотемпературный подход, согласно которому вместо уравнений сохранения энергии для каждой компоненты применяется уравнение сохранения энергии многокомпонентной среды в целом.

При этом будем предполагать, что температуры θ_i совпадают:

$$\theta_i = \theta > 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{33}$$

В соотношениях выше все θ_i заменяются на θ.

В качестве уравнения энергии можно рассматривать, например, уравнение для суммарной внутренней энергии

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial e_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} v_{ik}\frac{\partial e_i}{\partial x_k}\right)=\mathrm{div}(\chi\nabla\theta)+2\sum_{i,j=1}^{N}\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)+N\Gamma, \qquad (34)$$

где $\chi=\chi_1+\ldots+\chi_N$.

Используя соотношения (29) с $\theta_i=\theta$, перепишем уравнение для суммарной внутренней энергии (34) в виде

$$\theta\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial s_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} v_{ik}\frac{\partial s_i}{\partial x_k}\right)=\mathrm{div}(\chi\nabla\theta)+2\sum_{i,j=1}^{N}\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)+N\Gamma. \qquad (35)$$

Следовательно, если $\nabla\theta\cdot\boldsymbol{n}=0$ на $\partial\Omega$, то

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega} s_i\,d\boldsymbol{x}=\int\limits_{\Omega}\frac{\chi|\nabla\theta|^2}{\theta^2}\,d\boldsymbol{x}+2\sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\frac{\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)}{\theta}\,d\boldsymbol{x}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\frac{a_{ij}|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|^2}{\theta}\,d\boldsymbol{x}\geqslant 0 \qquad (36)$$

при $\theta>0$, $\chi\geqslant 0$, $\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{N}\geqslant 0$, $a_{ij}\geqslant 0$.

Здесь мы использовали очевидное равенство

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)}{\theta} = \frac{1}{\theta}\sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j).$$

В итоге, принимая (29) с $\theta_i = \theta$ и (34) в качестве $e_i = \theta + e_{0i}$, $s_i = \ln\theta + s_{0i}$, мы приходим к замкнутой и термодинамически непротиворечивой системе обобщенных на многокомпонентный случай уравнений Навье-Стокса динамики смеси ньютоновских вязких несжимаемых жидкостей

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_i = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_{ik}\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial x_k} + \nabla p_i = 2\sum_{j=1}^{N} \operatorname{div}(\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)) + \boldsymbol{J}_i, \tag{38}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} w_k\frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \operatorname{div}(\tilde{\chi}\nabla\theta) + 2\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\mu}_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j) + \Gamma, \tag{39}$$

где $w_k = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} v_{ik}$, $\tilde{\chi} = \dfrac{\chi}{N}$, $\tilde{\mu}_{ij} = \dfrac{\mu_{ij}}{N}$.

Рассмотрим следующее обобщение реологического соотношения для слабоконцентрированного водного полимерного раствора на многокомпонентный случай:

$$\mathbb{S}_i = 2\sum_{j=1}^{N} \mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j) + 2\sum_{j=1}^{N} \kappa_{ij}\frac{d(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j))}{dt}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{40}$$

где коэффициенты $k_{ij} = k_{ji}$.

Основное термодинамическое тождество, отвечающее данной среде в однотемпературном приближении имеет следующий вид:

$$\frac{de_i}{dt} = \theta\frac{ds_i}{dt} + 2\sum_{j=1}^{N} \kappa_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i) : \frac{d(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j))}{dt}. \tag{41}$$

Суммарное уравнение энергии, получающееся из (25) суммированием по i от 1 до N, тогда можно переписать в эквивалентой форме

$$\theta\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial s_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_{ik}\frac{\partial s_i}{\partial x_k}\right) = \mathrm{div}(\chi\nabla\theta) + 2\sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i) : \mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j) + N\Gamma. \tag{42}$$

Тогда, если $\nabla\theta \cdot \boldsymbol{n} = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega} s_i\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega}\frac{\chi|\nabla\theta|^2}{\theta^2}\,d\boldsymbol{x} + 2\sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\frac{\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)}{\theta}\,d\boldsymbol{x} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\frac{a_{ij}|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|^2}{\theta}\,d\boldsymbol{x} \geqslant 0 \tag{43}$$

при $\theta > 0$, $\chi \geqslant 0$, $\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} \geqslant 0$, $a_{ij} \geqslant 0$.

Примем в суммарном уравнении энергии для e_i и (41) в качестве $e_i = \theta + \sum\limits_{j=1}^{N}\kappa_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j) + e_{0i}$, $s_i = \ln\theta + s_{0i}$, получим следующую систему обобщенных на многокомпонентный случай уравнений динамики слабоконцентрированного водного полимерного раствора:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}_i = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_{ik}\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial x_k} + \nabla p_i = 2\sum_{j=1}^{N}\operatorname{div}(\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)) + 2\sum_{j=1}^{N}\operatorname{div}\left(\kappa_{ij}\frac{d(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j))}{dt}\right) + \boldsymbol{J}_i, \tag{45}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}w_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}=\mathsf{div}(\tilde{\chi}\nabla\theta)+2\sum_{i,j=1}^{N}\tilde{\mu}_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)+$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{N}\tilde{\kappa}_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\frac{d(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j))}{dt}+\Gamma,\quad \text{где}\quad \tilde{\kappa}_{ij}=\frac{\kappa_{ij}}{N}. \tag{46}$$

По аналогии с однокомпонентным случаем, вместо соотношений (40) рассмотрим соотношения

$$\mathbb{S}_i=2\sum_{j=1}^{N}\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)+2\sum_{j=1}^{N}\kappa_{ij}\frac{\partial(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j))}{\partial t},\quad i=1,\ldots,N. \tag{47}$$

В этом случае, мы приходим к следующей системе обобщенных на многокомпонентный случай уравнений Навье-Стокса-Фойгта:

$$\mathsf{div}\,\boldsymbol{v}_i=0, \tag{48}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}v_{ik}\frac{\partial\boldsymbol{v}_i}{\partial x_k}+\nabla p_i=2\sum_{j=1}^{N}\mathsf{div}(\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j))+2\sum_{j=1}^{N}\mathsf{div}\left(\kappa_{ij}\frac{\partial(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j))}{\partial t}\right)+\boldsymbol{J}_i, \tag{49}$$

$$
\frac{\partial\theta}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} w_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}=\mathrm{div}(\tilde{\chi}\nabla\theta)+2\sum_{i,j=1}^{N}\tilde{\mu}_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j)+
$$
$$
+2\sum_{i,j=1}^{N}\tilde{\kappa}_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_i):\frac{\partial(\mathbb{D}(\boldsymbol{v}_j))}{\partial t}+\Gamma. \tag{50}
$$

Отметим, что в отличие от однокомпонентного случая, где коэффициенты μ и κ — скаляры, в многокомпонентном случае коэффициенты μ_{ij} и κ_{ij} образуют соответственно матрицы **M** и **K**. Элементы матрицы **M** характеризуют вязкое трение. Диагональные элементы матрицы **M** отвечают за вязкое трение внутри каждой компоненты, а недиагональные — за вязкое трение между компонентами. В случае, когда **M** и **K** — диагональные матрицы, уравнения будут связаны только через младшие члены и, следовательно, они подчиняются теории, разработанной для однокомпонентного случая. Мы рассматриваем гораздо более сложный случай недиагональных и нетреугольных матриц **M** и **K**.

Будем использовать стандартные обозначения функциональных пространств $C_0^\infty(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $W_p^m(\Omega)$. Обозначим через $\mathcal{V}=\left\{\boldsymbol{v}\in C_0^\infty(\Omega):\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0\right\}$, H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$, V — замыкание по норме $W_2^1(\Omega)$ и V^2 — замыкание по норме $W_2^2(\Omega)$.

Однозначная разрешимость начально-краевой задачи

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 и на промежутке времени $[0, T]$, $T = \mathrm{const} > 0$, рассмотрим следующую начально-краевую задачу для обобщенных на многокомпонентный случай уравнений Навье-Стокса-Фойгта:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_{ik} \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial x_k} + \nabla p_i = \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij} \Delta \boldsymbol{v}_j + \sum_{j=1}^{N} \kappa_{ij} \frac{\partial (\Delta \boldsymbol{v}_j)}{\partial t} + \\ + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} (\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i) + \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{51}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{52}$$

$$\boldsymbol{v}_i|_{t=0} = \boldsymbol{v}_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{53}$$

$$\boldsymbol{v}_i|_{(0,T)\times\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{54}$$

Здесь N — количество компонент, $\boldsymbol{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$ — вектор скорости i-ой компоненты, p_i — давление, $\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних сил, $\boldsymbol{v}_{0i}$ — начальная скорость, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$, $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ и $a_{ij} = a_{ji}$ — некоторые постоянные.

Относительно данных задачи (51)-(54) будем предполагать, что

$$\mathbf{M} = \left(\mu_{ij}\right)_{i,j=1}^{N} > 0, \quad \mathbf{K} = \left(\kappa_{ij}\right)_{i,j=1}^{N} > 0, \quad a_{ij} \geqslant 0, \tag{55}$$

$$\boldsymbol{v}_{0i} \in V^2, \quad \boldsymbol{f}_i \in L_2(0,T;L_2(\Omega)). \tag{56}$$

Определение. Слабым решением задачи (51)-(54) называется набор функций $\boldsymbol{v}_i \in L_\infty\big(0,T;V^2\big)$, $i=1,\dots,N$, такой, что

1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} \in L_2(0,T;V)$, $i=1,\dots,N$,

2) выполнены интегральные равенства

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \bigg(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_i\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{j=1}^N \mu_{ij} (\nabla \otimes \boldsymbol{v}_j) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \\
&+ \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \left(\nabla \otimes \frac{\partial \boldsymbol{v}_j}{\partial t} \right) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) - \sum_{j=1}^N a_{ij} (\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i - \\
&- \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \bigg) \, d\boldsymbol{x} dt = 0, \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{57}$$

для всех $\boldsymbol{\varphi}_i$, таких, что $\boldsymbol{\varphi}_i \in L_\infty(0,T;V^2)$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} \in L_2(0,T;V)$, $i=1,\dots,N$,

3) начальные условия (53) выполнены в смысле

$$\|\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{0i}\|_H \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{58}$$

Теорема. Предположим, что данные задачи (51)-(54) удовлетворяют наложенным выше требованиям. Тогда задача (51)-(54) имеет единственное слабое решение.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\boldsymbol{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая состоит из собственных функций класса V^2 спектральной задачи

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla \otimes \boldsymbol{\psi}_k) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\Phi})\, d\boldsymbol{x} = \lambda_k \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \boldsymbol{\Phi} \in V^2, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{59}$$

где λ_k — положительные собственные значения, соответствующие собственным функциям $\boldsymbol{\psi}_k$, и является ортонормированным базисом в H.

Построим слабое решение $\big(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N\big)$ задачи (51)-(54) как предел последовательности конечномерных приближений Галеркина

$$\boldsymbol{v}_i = \lim_{m\to+\infty} \boldsymbol{v}_i^m, \quad i = 1, \dots, N, \tag{60}$$

где

$$\boldsymbol{v}_i^m = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{v}_{ik}^m \boldsymbol{\psi}_k, \quad i = 1, \dots, N, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{61}$$

Коэффициенты $v_{ik}^m(t)$, $k = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, N$, определяются как решения системы mN обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_{ik}^m}{dt} + \lambda_k \sum_{j=1}^{N} \kappa_{ij} \frac{dv_{jk}^m}{dt} + \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\big(\boldsymbol{v}_i^m \otimes \boldsymbol{v}_i^m\big) \cdot \boldsymbol{\psi}_k \, d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij} \int\limits_{\Omega} (\nabla \otimes \boldsymbol{v}_j^m) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\psi}_k) \, d\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{v}_j^m - \boldsymbol{v}_i^m) \cdot \boldsymbol{\psi}_k \, d\boldsymbol{x} -$$

$$- \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\psi}_k \, d\boldsymbol{x} = 0, \quad k = 1, \ldots, m \quad i = 1, \ldots, N \tag{62}$$

с начальными условиями

$$v_{ik}^m(0) = v_{0ik}, \quad k = 1, \ldots, m \quad i = 1, \ldots, N, \tag{63}$$

где постоянные v_{0ik} — это коэффициенты Фурье функции $\boldsymbol{v}_{0i}$ в базисе $\{\boldsymbol{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$v_{0ik} = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{v}_{0i} \cdot \boldsymbol{\psi}_k \, d\boldsymbol{x}, \quad k = 1, \ldots, m \quad i = 1, \ldots, N. \tag{64}$$

Имеем

$$\boldsymbol{v}_{0i}^m = \sum_{k=1}^{m} v_{0ik}\boldsymbol{\psi}_k \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{v}_{0i} \quad \text{сильно в } V^2, \quad i = 1, \dots, N. \tag{65}$$

Поскольку $\lambda_k > 0$ и $\left(\kappa_{ij}\right)_{i,j=1}^N > 0$, то уравнения (62) разрешимы относительно производных и задача (62)-(63) имеет решение v_{ik}^m, $k = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, N$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ на некотором интервале $(0, T^m)$. Соответственно, приближённое решение $\left(\boldsymbol{v}_1^m, \dots, \boldsymbol{v}_N^m\right)$ существует в цилиндре $(0, T^m) \times \Omega$.

Лемма 1. Имеет место первая энергетическая оценка

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|\boldsymbol{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)} + \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|\nabla \otimes \boldsymbol{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)}\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \|\nabla \otimes \boldsymbol{v}_i^m\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_1, \tag{66}$$

где $Q_T = (0, T) \times \Omega$, а положительная постоянная C_1 зависит от N, T, Ω, $\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{\kappa_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{\|\boldsymbol{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N$, $\{\|\nabla \otimes \boldsymbol{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N$, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_2(Q_T)}\}_{i=1}^N$ и не зависит от m.

Доказательство. Умножим (62) на v_{ik}^m и просуммируем по k, i, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{v}_i^m|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\kappa_{ij}\int\limits_{\Omega}(\nabla\otimes\boldsymbol{v}_i^m):(\nabla\otimes\boldsymbol{v}_j^m)\,d\boldsymbol{x}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{N}\mu_{ij}\int\limits_{\Omega}(\nabla\otimes\boldsymbol{v}_i^m):(\nabla\otimes\boldsymbol{v}_j^m)\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{v}_i^m-\boldsymbol{v}_j^m|^2d\boldsymbol{x}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{v}_i^m\,d\boldsymbol{x}, \tag{67}$$

интегрируя которое по t, приходим к (66). □

Лемма 2. Справедлива вторая энергетическая оценка

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\|\nabla\otimes\boldsymbol{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)}+\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\|\Delta\boldsymbol{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)}\right)+\sum_{i=1}^{N}\|\Delta\boldsymbol{v}_i^m\|_{L_2(Q_T)}\leqslant C_2, \tag{68}$$

где $C_2=\mathrm{const}>0$ зависит от C_1, N, T, Ω, $\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{\kappa_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{\|\boldsymbol{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N$, $\{\|\nabla\otimes\boldsymbol{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N$, $\{\|\Delta\boldsymbol{v}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}_{i=1}^N$, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_2(Q_T)}\}_{i=1}^N$ и не зависит от m.

Доказательство. Умножим (62) на $\lambda_k v_{ik}^m$ и просуммируем по k, i, получим соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|\nabla\otimes\boldsymbol{v}_i^m|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\kappa_{ij}\int\limits_{\Omega}\Delta\boldsymbol{v}_i^m\cdot\Delta\boldsymbol{v}_j^m\,d\boldsymbol{x}\right)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{N}\mu_{ij}\int\limits_{\Omega}\Delta\boldsymbol{v}_i^m\cdot\Delta\boldsymbol{v}_j^m d\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\int\limits_{\Omega}|\nabla\otimes(\boldsymbol{v}_i^m-\boldsymbol{v}_j^m)|^2\,d\boldsymbol{x}=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\operatorname{div}\left(\boldsymbol{v}_i^m\otimes\boldsymbol{v}_i^m\right)\cdot\Delta\boldsymbol{v}_i^m\,d\boldsymbol{x}-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{f}_i\cdot\Delta\boldsymbol{v}_i^m\,d\boldsymbol{x}. \tag{69}$$

Интегрируя (69) по t, используя неравенства Гёльдера, Гронуолла, Коши и Юнга, а также первое энергетическое неравенство (66) и неравенства

$$\|\boldsymbol{v}_i^m\|_{L_4(\Omega)}\leqslant C(\Omega)\|\nabla\otimes\boldsymbol{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)},\quad i=1,\ldots,N, \tag{70}$$
$$\|\nabla\otimes\boldsymbol{v}_i^m\|_{L_4(\Omega)}\leqslant C(\Omega)\|\Delta\boldsymbol{v}_i^m\|_{L_2(\Omega)},\quad i=1,\ldots,N, \tag{71}$$

приходим к оценке (68). □

Следствие. Из (68) следует оценка

$$\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{v}_i^m\|_{L_\infty\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right)} \leqslant C_3, \tag{72}$$

где положительная постоянная C_3 зависит только от C_2 и Ω.

Лемма 3. Имеет место следующая оценка:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\left\| \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} + \left\| \nabla \otimes \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} \right) \leqslant C_4, \tag{73}$$

где $C_4 = \mathrm{const} > 0$ зависит от C_1, C_2, N, T, Ω, $\{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{\kappa_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_2(Q_T)}\}_{i=1}^N$ и не зависит от m.

Доказательство. Умножая (62) на $\dfrac{dv_{ik}^m}{dt}$ и суммируя по k, i, получим равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial t} \right|^2 d\boldsymbol{x} + \sum_{i,j=1}^{N} \kappa_{ij} \int\limits_{\Omega} \left(\nabla \otimes \frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial t} \right) : \left(\nabla \otimes \frac{\partial \boldsymbol{v}_j^m}{\partial t} \right) d\boldsymbol{x} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij} \int\limits_{\Omega} \Delta \boldsymbol{v}_j^m \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial t} \right) d\boldsymbol{x} + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{v}_j^m - \boldsymbol{v}_i^m) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial t} \right) d\boldsymbol{x} - \tag{74}$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left(\boldsymbol{v}_i^m \otimes \boldsymbol{v}_i^m\right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial t}\right) d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}_i \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial t}\right) d\boldsymbol{x},$$

откуда, после интегрирования по t, с учетом (66), (68), приходим к оценке (73). □

Построив решения $(\boldsymbol{v}_1^m, \ldots, \boldsymbol{v}_N^m)$ задачи (62)-(63) при всех $m \in \mathbb{N}$, а затем при необходимости продолжив их на интервал $(0, T)$, мы можем использовать для них оценки (72), (73).

На основании этих оценок из последовательности $(\boldsymbol{v}_1^m, \ldots, \boldsymbol{v}_N^m)$, $m \in \mathbb{N}$, может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же), для которой имеют место сходимости

$$\boldsymbol{v}_i^m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{v}_i \quad \star\text{-слабо в} \quad L_\infty(0, T; V^2), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{75}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i^m}{\partial t} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} \quad \text{слабо в} \quad L_2(0, T; V), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{76}$$

Заметим, что V^2 компактно вложено в V. В связи с этим, в силу (72), (73) и теоремы о компактности Обена-Лионса устанавливаем, что

$$\boldsymbol{v}_i^m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{v}_i \quad \text{сильно в} \quad C([0, T]; V), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{77}$$

Теперь, исходя из (75)-(77), предельный переход в (62)-(63) при $m \to +\infty$ по выбранной подпоследовательности вполне стандартен.

В результате предельного перехода выводим интегральные равенства (57) и соотношения (58), тем самым завершая обоснование существования слабого решения задачи (51)-(54).

Докажем теперь единственность слабого решения задачи (51)-(54).

Пусть $\left(\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_N^{(1)}\right)$ и $\left(\boldsymbol{v}_1^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}_N^{(2)}\right)$ — два слабых решения задачи (51)-(54), соответствующие одним и тем же входным данным.

Положим $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i^{(1)} - \boldsymbol{v}_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, N$.

Вычитая $(57)_i$ с $\left(\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_N^{(1)}\right)$ из $(57)_i$ с $\left(\boldsymbol{v}_1^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}_N^{(2)}\right)$ для каждого $i = 1, \ldots, N$, принимая $\boldsymbol{u}_i$ за тестовые функции и суммируя по i, приходим к соотношению

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\kappa_{ij}\int\limits_{\Omega}(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i):(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_j)\,d\boldsymbol{x} + \tag{78}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{N}\mu_{ij}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i):(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_j)\,d\boldsymbol{x}dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_j|^2\,d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}(\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_i^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}dt - \sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}(\boldsymbol{v}_i^{(2)}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}dt.$$

Оценим слагаемые в правой части (78) с помощью второй энергетической оценки (68):

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}(\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_i^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}dt \leqslant C_5(\Omega, C_2)\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}dt, \tag{79}$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}(\boldsymbol{v}_i^{(2)}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}dt \leqslant C_6(\Omega, C_2)\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}dt. \tag{80}$$

Здесь C_5, C_6 — положительные постоянные.

Таким образом, из (78), с учетом (79)-(80), следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \int\limits_{0}^{\tau} \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} \right) dt, \tag{81}$$

где положительная постоянная $C_7 = C_7 \left(\{\kappa_{ij}\}_{i,j=1}^{N}, C_5, C_6 \right)$.

Используя лемму Гронуолла, из неравенства (81) выводим равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} = 0, \tag{82}$$

которое равносильно единственности решения.

Теорема полностью доказана. $\square$

Спасибо за внимание!