

Гомогенизация слоистого композита,  
армированного тонкими градиентно-упругими  
включениями

Рудой Е.М., Саженов С.А., Леонова Э.И.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,  
Новосибирск

# Градиентная теория упругости при антиплоском сдвиге

В рамках упрощенной градиентной теории упругости (ГТУ) плотность энергии изотропного материала имеет следующий вид:

$$w = w(\varepsilon, \nabla\varepsilon) = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + l^2\left(\frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii,k}\varepsilon_{jj,k} + \mu\varepsilon_{ij,k}\varepsilon_{ij,k}\right),$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе,  $l$  – масштабный параметр,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$  – компоненты тензора деформаций  $\varepsilon$ , который зависит от вектора перемещений  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Пусть тело занимает область  $\Omega$ . Потенциальная энергия тела  $W(\mathbf{v})$  определена следующим образом:

$$W(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w(\varepsilon(\mathbf{v}), \nabla\varepsilon(\mathbf{v})) dx_1 dx_2 dx_3.$$

В модели антиплоского сдвига считается, что тело  $\Omega$  – цилиндрическое с постоянной толщиной  $h$ , т.е.  $\Omega = \omega \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ , где  $\omega$  плоская область с границей  $\partial\omega$ . Далее, вектор перемещений  $\mathbf{v}$  имеет вид:

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = v(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega.$$

Таким образом, имеется единственная не нулевая компонента вектора перемещений  $v_3 = v$ , зависящая от  $(x_1, x_2) \in \omega$ . В этом случае мы имеем

$$\varepsilon_{11}(\mathbf{v}) = \varepsilon_{12}(\mathbf{v}) = \varepsilon_{21}(\mathbf{v}) = \varepsilon_{22}(\mathbf{v}) = \varepsilon_{33}(\mathbf{v}) = 0,$$

$$\varepsilon_{13}(\mathbf{v}) = \varepsilon_{31}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}v_{,1}, \quad \varepsilon_{23}(\mathbf{v}) = \varepsilon_{32}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}v_{,2}.$$

Тогда потенциальная энергия изотропного однородного тела при антиплоском сдвиге в рамках ГТУ имеет вид

$$W(v) = \frac{h\mu}{2} \int_{\omega} (v_{,1}^2 + v_{,2}^2) d\mathbf{x} + \frac{h\mu l^2}{2} \int_{\omega} (v_{,11}^2 + 2v_{,12}^2 + v_{,22}^2) d\mathbf{x},$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  and  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$ .

## Модель композита с градиентным клеевым слоем

Рассмотрим две области  $\omega_-$  and  $\omega_+$  с кусочно-гладкими границами  $\partial\omega_-$  и  $\partial\omega_+$ , соответственно, такие, что  $x_1 > 0$  if  $\mathbf{x} \in \omega_+$ ,  $x_1 < 0$  if  $\mathbf{x} \in \omega_-$  ( $\omega_- \cap \omega_+ = \emptyset$ ), и выпуклая область  $\omega_m$  с гладкой границей  $\partial\omega_m$ . Пусть

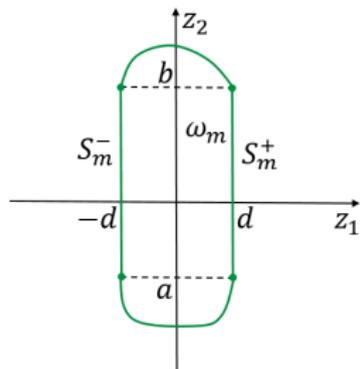
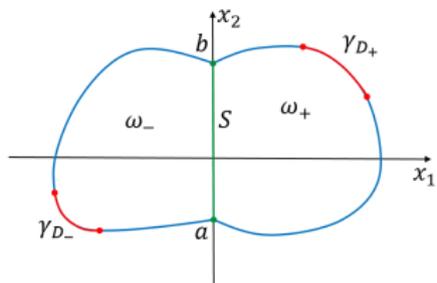
$$S = \partial\omega_- \cap \partial\omega_+ = \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, x_2 \in (a, b)\}, \quad a < 0 < b,$$

$\partial(\bar{\omega}_- \cup \bar{\omega}_+)$  – липшицева замкнутая кривая и

$$S_m^\pm = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm d, x_2 \in (a, b)\}$$

принадлежать  $\partial\omega_m$ , где  $d = \text{diam}(\omega_- \cup \omega_+)$  – диаметр объединения  $\omega_-$  and  $\omega_+$ .

# Domain configuration



Зафиксируем малый параметр  $\delta \in (0, 1)$  и рассмотрим композитную структуру, состоящую из двух тел (adherents)  $\omega_{\pm}^{\delta}$  и клеевого слоя (an adhesive)  $\omega_m^{\delta}$ , где

$$\omega_{\pm}^{\delta} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = x_1 \pm \delta d, y_2 = x_2, (x_1, x_2) \in \omega_{\pm}\},$$

$$\gamma_{D\pm}^{\delta} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = x_1 \pm \delta d, y_2 = x_2, (x_1, x_2) \in \gamma_{D\pm}\},$$

$$\gamma_{N\pm}^{\delta} = \partial\omega_{\pm}^{\delta} \setminus \overline{(\gamma_{D\pm}^{\delta} \cup S_{\pm}^{\delta})},$$

$$\omega_m^{\delta} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{y_1}{\delta}, y_2\right) \in \omega_m\},$$

$S_{\pm}^{\delta}$  – интерфейс между  $\omega_{\pm}^{\delta}$  и  $\omega_m^{\delta}$ , т.е.

$$S_{\pm}^{\delta} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = \pm\delta d, y_2 \in (a, b)\}.$$

## Composite structure

Считаем, что композиционное тело  $\omega^\delta = \omega_-^\delta \cup S_-^\delta \cup \omega_m^\delta \cup S_+^\delta \cup \omega_+^\delta$  состоит из двух изотропных однородных тел  $\omega_-^\delta$  и  $\omega_+^\delta$ , соединенных третьим телом  $\omega_m^\delta$ .

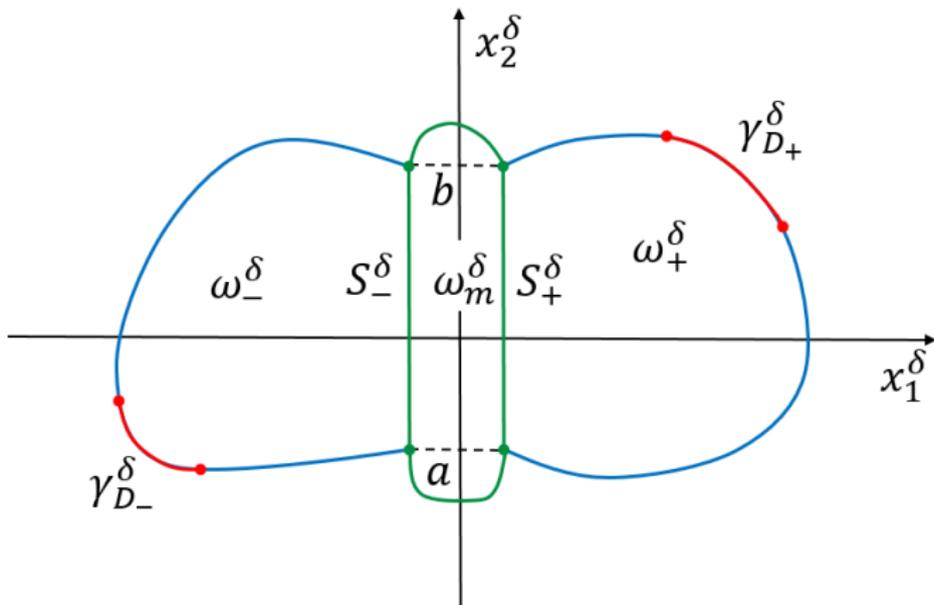


Figure: The composite structure  $\omega^\delta$

Обозначим через  $\mu_{\pm} = \text{const}$  модуль сдвига тел  $\omega_{\pm}^{\delta}$ , соответственно;  $\mu_m^{\delta}$  и  $l_m$  модуль сдвига клеевого слоя и его масштабный параметр. Считаем, что

$$\mu_m^{\delta} = \delta^p \mu_m, \quad l_m = \text{const}. \quad (1)$$

# Вариационная формулировка задачи равновесия

Определим множество допустимых смещений  $K^\delta$ , где

$$K^\delta = \left\{ (v_-, v_+, v_m) \in H^1(\omega_-^\delta) \times H^1(\omega_+^\delta) \times H^2(\omega_m^\delta) \mid \right. \\ \left. v_\pm|_{S_\pm^\delta} = v_m|_{S_\pm^\delta}, \quad v_\pm = 0 \text{ а.е. на } \gamma_{D_\pm}^\delta \right\}.$$

**Задача о равновесии композитного тела:**

Найти триплет  $(u_{-\delta}, u_{+\delta}, u_{m\delta}) \in K^\delta$  такой что

$$\Pi(\delta, u_{-\delta}, u_{+\delta}, u_{m\delta}) = \inf_{(v_-, v_+, v_m) \in K^\delta} \Pi(\delta, v_-, v_+, v_m). \quad (2)$$

# Дифференциальная формулировка задачи равновесия

Триплет  $(u_-^\delta, u_+^\delta, u_m^\delta)$  является решением следующей краевой задачи:

$$-\mu_\pm^\delta \Delta u_\pm^\delta = f \quad \text{в } \omega_\pm^\delta,$$

$$\mu_m^\delta (l_m^2 \Delta^2 u_m^\delta - \Delta u_m^\delta) = 0 \quad \text{в } \omega_m^\delta,$$

$$u_\pm^\delta = 0 \quad \text{на } \gamma_{D_\pm}^\delta,$$

$$\frac{\partial u_\pm^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \gamma_{N_\pm}^\delta,$$

$$M(u_m^\delta) = 0, \quad l_m^2 T(u_m^\delta) + \frac{\partial u_m^\delta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial \omega^\delta \setminus \overline{(\gamma_{D_-}^\delta \cup \gamma_{D_+}^\delta \cup \gamma_{N_-}^\delta \cup \gamma_{N_+}^\delta)},$$

$$u_\pm^\delta = u_m^\delta \quad \text{на } S_\pm^\delta,$$

$$\mu_m^\delta \left( l_m^2 T_\pm(u_m^\delta) + \frac{\partial u_m^\delta}{\partial \nu_\pm} \right) = \mu_\pm \frac{\partial u_\pm^\delta}{\partial \nu_\pm} \quad \text{на } S_\pm^\delta,$$

$$M(u_m^\delta) = 0 \quad \text{на } S_\pm^\delta.$$

# Strain gradient interface conditions

**Случай  $\rho > 1$ : a vacuum-type interface**

$$-\mu_{\pm} \Delta u_{\pm} = f_{\pm} \quad \text{в } \omega_{\pm},$$

$$u_{\pm} = 0 \quad \text{на } \gamma_{D_{\pm}},$$

$$\mu_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial n_{\pm}} = 0, \quad \text{на } \gamma_{N_{\pm}} \cup S.$$

**Случай  $p = 1$ : a spring-type interface with the strain gradient effect.**

$$-\mu_{\pm} \Delta u_{\pm} = f_{\pm} \quad \text{in } \omega_{\pm},$$

$$u_{\pm} = 0 \quad \text{on } \gamma_{D_{\pm}},$$

$$\mu_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial n_{\pm}} = 0 \quad \text{on } \gamma_{N_{\pm}},$$

$$\mu_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial n_{\pm}} = \pm \frac{\mu_m}{2d} (l_m^2 w_{,22} - w) \quad \text{on } S,$$

$$w_{,2} = 0 \quad \text{at } \partial S,$$

где  $w \stackrel{\text{def}}{=} u_+|_S - u_-|_S$ .

**Случай  $p \in (-1, 1)$ : the ideal contact.**

$$-\mu_{\pm} \Delta u_{\pm} = f_{\pm} \text{ in } \omega_{\pm},$$

$$u_{\pm} = 0 \text{ on } \gamma_{D_{\pm}},$$

$$\mu_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial n_{\pm}} = 0 \text{ on } \gamma_{N_{\pm}},$$

$$u_{+} = u_{-} \text{ on } S,$$

$$\mu_{-} \frac{\partial u_{-}}{\partial n_{-}} + \mu_{+} \frac{\partial u_{+}}{\partial n_{+}} = 0 \text{ on } S.$$

## Случай $p = -1$ : thin rod-type elastic inclusion with the strain gradient effect

Положим  $u \stackrel{\text{def}}{=} u_+|_S = u_-|_S$ .

$$-\mu_{\pm} \Delta u_{\pm} = f_{\pm} \quad \text{in } \omega_{\pm},$$

$$u_{\pm} = 0 \quad \text{on } \gamma_{D_{\pm}},$$

$$\mu_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial n_{\pm}} = 0 \quad \text{on } \gamma_{N_{\pm}},$$

$$u_+ = u_- \quad \text{on } S,$$

$$\mu_- \frac{\partial u_-}{\partial n_-} + \mu_+ \frac{\partial u_+}{\partial n_+} = -2d\mu_m (l_m^2 u_{,2222} - u_{,22}) \quad \text{on } S,$$

$$u_{,2} - l_m^2 u_{,222} = 0 \quad \text{at } \partial S,$$

$$u_{,22} = 0 \quad \text{at } \partial S.$$

**Случай  $p < -1$ : the thin rigid inclusion.**

$$-\mu_{\pm} \Delta u_{\pm} = f_{\pm} \text{ in } \omega_{\pm},$$

$$u_{\pm} = 0 \text{ on } \gamma_{D_{\pm}},$$

$$\mu_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial n_{\pm}} = 0 \text{ on } \gamma_{N_{\pm}},$$

$$u_{+} = u_{-} = \beta_m = \text{const on } S,$$

$$\int_S \left( \mu_{-} \frac{\partial u_{-}}{\partial n_{-}} + \mu_{+} \frac{\partial u_{+}}{\partial n_{+}} \right) ds = 0.$$

# Модель равновесия упругого тела, прошитого градиентно-упругими волокнами

Для каждого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  положим

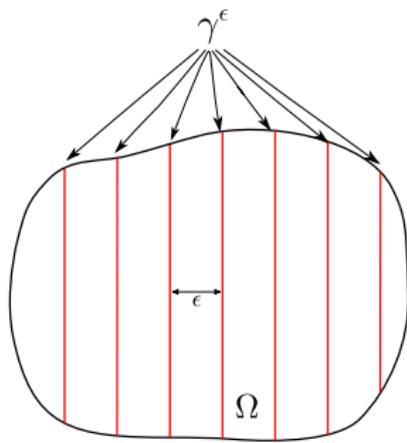
$$\gamma^\varepsilon = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 = (\xi_1^* + j)\varepsilon, j \in \mathbb{Z}\}; \quad (3)$$

введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$K^\varepsilon = H_0^1(\Omega) \cap H_0^2(\gamma^\varepsilon)$$

с нормой

$$\|w\|_{K^\varepsilon} = (\|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^2(\gamma^\varepsilon)}^2)^{1/2}.$$



Обозначим через  $\Omega \setminus \gamma^\varepsilon$  связующую матрицу. В рамках модели антиплоского сдвига, упругие свойства связующей матрицы определяются модулем сдвига  $\mu^\varepsilon$ , а градиентно-упругие свойства волокон — модулем сдвига  $\mu_{in}^\varepsilon$ , масштабным параметром градиентной теории упругости  $l_{in}$  и геометрическим коэффициентом  $D$ , унаследованным из описания «широкого» включения-прототипа. Далее считаем, что вышеуказанные характеристики связующей матрицы и внешняя нагрузка заданы, причем модули сдвига зависят от  $\varepsilon$ . Более точно, имеем

$$\mu^\varepsilon = \mu\left(\mathbf{x}, \frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad f = f(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

$$\mu_{in}^\varepsilon = \varepsilon \mu_{in}(x_2), \quad l_{in} = l_{in}(x_2), \quad D = \text{const} \quad \text{на } \gamma^\varepsilon, \quad (5)$$

где  $\mu = \mu(\mathbf{x}, \xi_1)$  является 1-периодической функцией по  $\xi_1$ .

Через  $u^\varepsilon: \Omega \mapsto \mathbb{R}$  обозначаем поле смещений точек композитного тела.

## Задача $A_\varepsilon$ .

При каждом фиксированном  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  требуется найти поле смещений  $u^\varepsilon \in K^\varepsilon$ , удовлетворяющее вариационному уравнению равновесия

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu\left(\mathbf{x}, \frac{x_1}{\varepsilon}\right) \nabla_x u^\varepsilon \cdot \nabla_x v \, d\mathbf{x} + \varepsilon D \int_{\gamma^\varepsilon} \mu_{in}(x_2) \partial_{x_2} u^\varepsilon \partial_{x_2} v \, d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) \\ + \varepsilon D \int_{\gamma^\varepsilon} \mu_{in}(x_2) l_{in}^2(x_2) \partial_{x_2 x_2}^2 u^\varepsilon \partial_{x_2 x_2}^2 v \, d\sigma^\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in K^\varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

**Задача  $A_\varepsilon$ -diff.** (Дифференциальная постановка задачи  $A_\varepsilon$ .) В области  $\Omega$  требуется найти функцию  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(\mathbf{x})$ , удовлетворяющую системе уравнений и краевых условий

$$-\operatorname{div}_x(\mu \nabla_x u^\varepsilon) = f, \mathbf{x} \in \Omega \setminus \gamma^\varepsilon, \quad (7)$$

$$u^\varepsilon = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (8)$$

$$[u^\varepsilon] = 0, \mathbf{x} \in \gamma^\varepsilon, \quad (9)$$

$$[\mu \nabla_x u^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}] = \varepsilon D \partial_{x_2} (\mu_{in} \partial_{x_2} u^\varepsilon) - \varepsilon D \partial_{x_2 x_2}^2 (\mu_{in} l_{in}^2 \partial_{x_2 x_2}^2 u^\varepsilon), \mathbf{x} \in \gamma^\varepsilon, \quad (10)$$

$$u^\varepsilon = 0, \mathbf{x} \in \partial\gamma^\varepsilon, \quad (11)$$

$$\partial_{x_2} u^\varepsilon = 0, \mathbf{x} \in \partial\gamma^\varepsilon, \quad (12)$$

в которой  $\boldsymbol{\nu} = (1, 0)$  — это единичная нормаль к  $\gamma^\varepsilon$ , скобки  $[\dots]$  обозначают скачок на  $\gamma^\varepsilon$  и для коэффициента  $\mu$  имеет место представление (4)<sub>1</sub>.

## Conditions W

1. Функция  $\mu$  принадлежит  $L^\infty(\Omega, C([0, 1]_{\xi_1}))$  и 1-периодична по  $\xi_1$ . Функции  $\mu_{in}$  и  $l_{in}$  дифференцируемы по  $x_2$ .
2. Существуют положительные постоянные  $\mu_*$ ,  $\mu^*$ ,  $l_{in*}$  и  $l_{in}^*$  такие, что

$$\begin{aligned}\mu_* &\leq \mu(\mathbf{x}, \xi_1) \leq \mu^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R}, \\ \mu_* &\leq \mu_{in}(x_2) \leq \mu^*, \quad l_{in*} \leq l_{in}(x_2) \leq l_{in}^* \quad \forall x_2 \in [-l_2, l_2],\end{aligned}$$

где

$$l_2 = \max_{(x'_1, x'_2) \in \bar{\Omega}} |x'_2|.$$

3. Функция  $f$  принадлежит пространству  $L^2(\Omega)$ .

## Разрешимость задачи $A_\varepsilon$

### Theorem

Пусть выполнены условия  $W$ , и значение  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  произвольно фиксировано. Тогда задача  $A_\varepsilon$  имеет единственное решение  $u^\varepsilon \in K^\varepsilon$ . Кроме того, существует не зависящая от  $\varepsilon$  постоянная  $C_0 > 0$ , такая, что

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \varepsilon \|u^\varepsilon\|_{H_0^2(\gamma^\varepsilon)}^2 \leq C_0. \quad (13)$$

## Задача Н. (Эффективная макроскопическая усредненная модель.)

### Theorem

*Пусть выполняются условия W. Тогда семейство  $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  решений задачи  $A_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  слабо сходится в  $H^1(\Omega)$  к решению  $u_*$  задачи Н, формулируемой ниже. Кроме того,  $u_*$  является единственным решением задачи Н.*

Для того, чтобы сформулировать задачу Н, предварительно введем некоторые обозначения.

Определим анизотропное пространство Соболева

$$K := \{ \phi \in H_0^1(\Omega) : \partial_{x_2 x_2}^2 \phi \in L^2(\Omega), n_2 \partial_{x_2} \phi = 0 \text{ на } \partial\Omega \text{ в смысле следа} \},$$

где  $n_2$  — это вторая компонента вектора единичной внешней нормали  $n = (n_1, n_2)$  к  $\partial\Omega$ .

**Задача Н.** (Эффективная макроскопическая усредненная модель.)

Требуется найти поле перемещений  $u_* \in K$ , удовлетворяющее усредненному вариационному уравнению равновесия

$$\int_{\Omega} (\mathbb{M} \nabla_x u_* \cdot \nabla_x v + E_{in} \partial_{x_2 x_2}^2 u_* \partial_{x_2 x_2}^2 v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in K. \quad (14)$$

В уравнении (14) матрица эффективных усредненных модулей упругости  $\mathbb{M}$  и эффективный усредненный модуль градиентной упругости  $E_{in}$  однозначно определяются данными микроструктуры композитного материала и имеют вид

$$\mathbb{M}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\widetilde{\mu}^{-1})^{-1}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}(\mathbf{x}) + D\mu_{in}(x_2) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$E_{in}(x_2) = D\mu_{in}(x_2) l_{in}^2(x_2). \quad (16)$$

В смысле теории распределений задача Н эквивалентна следующей анизотропной (второго порядка по переменной  $x_1$  и четвертого — по переменной  $x_2$ ) краевой задаче для дифференциального уравнения в частных производных.

**Задача Н-diff.** Требуется найти предельное эффективное распределение смещений  $u_* = u_*(\mathbf{x})$ , удовлетворяющее уравнению равновесия анизотропного градиентно-упругого тела

$$-\operatorname{div}_x(\mathbb{M}\nabla_x u_*) + \partial_{x_2 x_2}^2 (E_{in} \partial_{x_2 x_2}^2 u_*) = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (17)$$

и граничным условиям

$$u_* = 0, \quad n_2 \partial_{x_2} u_* = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (18)$$

## О повышенной гладкости решения задачи Н

### Theorem

Положим  $m \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\partial\Omega \in C^{m+2}$ ,  $M \in C^{m+1}(\bar{\Omega})^{2 \times 2}$ ,  $E_{in} \in C^{m+2}([-l_2, l_2])$ ,  $f \in H^m(\Omega)$  и  $M$  и  $E_{in}$  равномерно положительны.

Тогда задача Н имеет единственное решение  $u_* \in K$ , причем это решение обладает дополнительными свойствами гладкости

$$u_* \in H^{m+2}(\Omega), \quad \partial_{x_2 x_2}^2 u_* \in H^{m+2}(\Omega). \quad (19)$$

## Смешанная формулировка задачи Н

Сначала перепишем задачу Н в эквивалентном виде как задачу минимизации функционала энергии на множестве допустимых функций. А именно, положим

$$J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbb{M} \nabla_x u \cdot \nabla_x u + E_{in} |\partial_{x_2 x_2}^2 u|^2) dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

Тогда задача Н эквивалентна задаче минимизации

$$u_* = \arg \min_{u \in K} J(u). \quad (20)$$

Далее, в пространстве  $K \times L^2(\Omega)$  определим множество

$$\mathcal{K} := \{(u, v) \in K \times L^2(\Omega) : v = \partial_{x_2 x_2}^2 u \text{ п.в. в } \Omega\}$$

и квадратичный функционал

$$\mathcal{J}(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbb{M} \nabla_x u \cdot \nabla_x u + E_{in} |v|^2) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f u d\mathbf{x}.$$

Тогда задача минимизации с ограничением

$$(u_*, v_*) = \arg \min_{(u, v) \in \mathcal{K}} \mathcal{J}(u, v) \quad (21)$$

эквивалентна задаче (20) в том смысле, что решение  $u_*$  задачи (20) является решением задачи (21) с  $v_* = \partial_{x_2 x_2}^2 u_*$ , и наоборот.

Следующая лемма позволяет описать множество функций  $\mathcal{K}$  при меньших требованиях регулярности.

### Lemma

*Пара  $(u, v)$  принадлежит множеству  $\mathcal{K}$  тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству*

$$\tilde{\mathcal{K}} := \left\{ (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) : \int_{\Omega} (\partial_{x_2} u \partial_{x_2} \mu + v \mu) dx = 0 \quad \forall \mu \in H^1(\Omega) \right\}.$$

В силу леммы задачу (21) можно переформулировать в следующем эквивалентном виде

$$(u_*, v_*) = \arg \min_{(u, v) \in \tilde{\mathcal{K}}} \mathcal{J}(u, v),$$

которая очевидно эквивалентна вариационному уравнению

$$\int_{\Omega} (\mathbb{M} \nabla_x u_* \cdot \nabla_x u + E_{in} v_* v) dx = \int_{\Omega} f u dx \quad \forall (u, v) \in \tilde{\mathcal{K}}. \quad (22)$$

Наконец, введем в рассмотрение смешанную задачу и покажем, что она эквивалентна задаче (22).

**Задача H-mixed.** Требуется найти тройку функций  $(u_*, v_*, \mu_*) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , удовлетворяющую интегральным равенствам

$$\int_{\Omega} (\mathbb{M} \nabla_x u_* \cdot \nabla_x u + E_{in} v_* v) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\partial_{x_2} \mu_* \partial_{x_2} u + \mu_* v) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f u d\mathbf{x} \\ \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (23)$$

$$\int_{\Omega} (\partial_{x_2} u_* \partial_{x_2} \mu + v_* \mu) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mu \in H^1(\Omega). \quad (24)$$

Связь между задачами  $H$ -mixed и (22) устанавливается следующей теоремой.

### Theorem

*Пусть  $(u_*, v_*, \mu_*)$  — решение задачи  $H$ -mixed. Тогда оно единственно и  $(u_*, v_*)$  — это решение задачи (22).*

*Пусть  $(u_*, v_*)$  — решение задачи (22) такое, что  $u_* \in H^2(\Omega)$  и  $\partial_{x_2 x_2}^2 u_* \in H^2(\Omega)$ . Тогда  $(u_*, v_*, -E_{in} \partial_{x_2 x_2}^2 u_*)$  — это решение задачи  $H$ -mixed.*

## Численные эксперименты

Для апробации построенного алгоритма решения усредненной задачи в качестве расчетной области возьмем квадрат со стороной 1 м (в этом случае  $D = 2\sqrt{2}$  м) и следующие материальные параметры, считая, что они постоянные: модули сдвига  $\mu = 1,5$  ГПа и  $\mu_{in} = 0,5$  ГПа, масштабный параметр  $l_{in} = 0,1$  м<sup>2</sup>.

Для численных экспериментов применяется метод конечных элементов. Численные расчеты проводились с использованием свободно распространяемого пакета FreeFEM++. Область  $\Omega$  триангулировалась на 31144 треугольника с 62889 вершинами. Пространства  $H^1(\Omega)$  и  $L^2(\Omega)$  аппроксимируются конечно-элементными пространствами, состоящих из кусочно-гладких  $P_2$ -элементов Лагранжа. Внешнюю нагрузку  $f$  возьмем постоянной и равной  $0,01\mu$ .

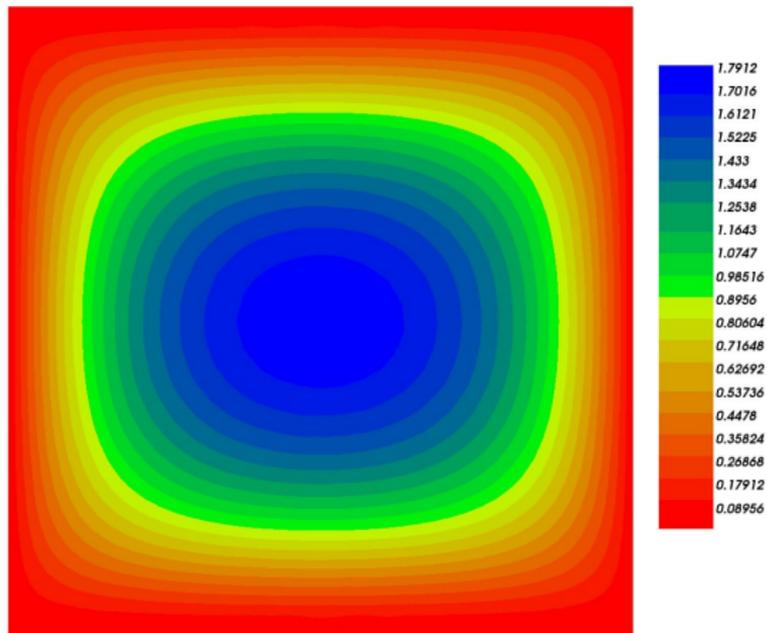


Figure: Распределение перемещений точек тела  $\Omega$ , (в мм).

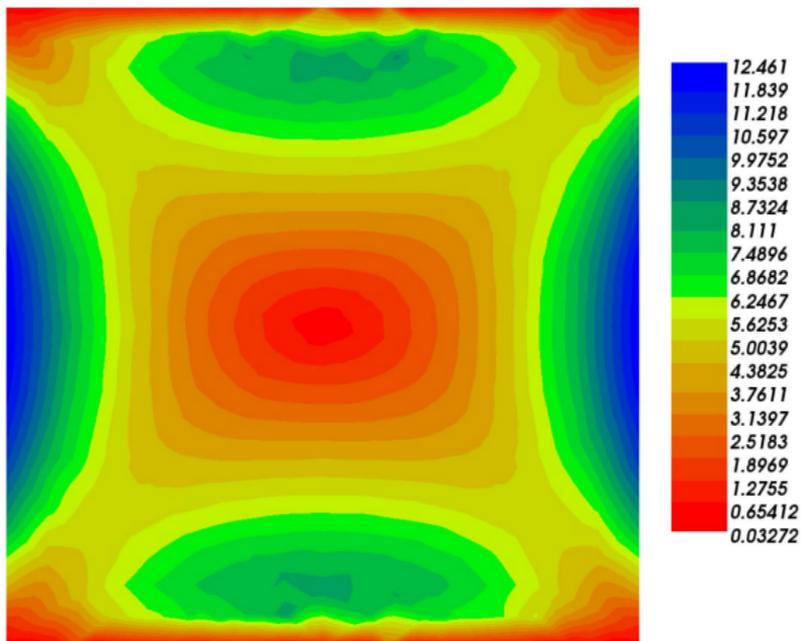


Figure: Распределение напряжений Мизеса, (в МПа).

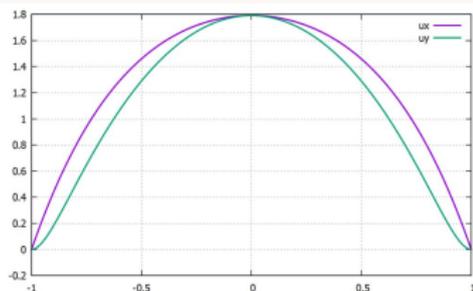


Figure: Графики перемещений точек тела:  $u_x$  — вдоль оси  $Ox_1$ ,  $u_y$  — вдоль оси  $Ox_2$ , (в мм).

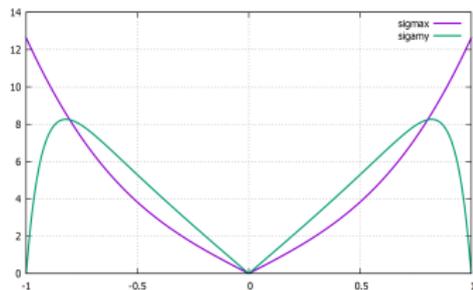


Figure: Графики напряжений Мизеса:  $\sigma_{max}$  — вдоль оси  $Ox_1$ ,  $\sigma_{my}$  — вдоль оси  $Ox_2$ , (в МПа).

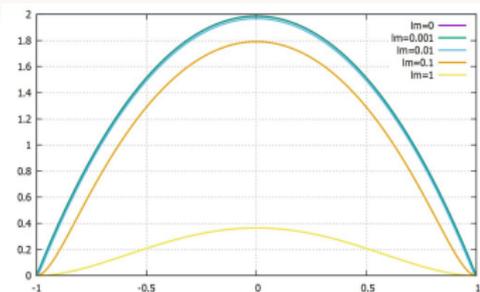


Figure: Зависимость перемещений точек тела вдоль оси  $Ox_2$  от масштабного параметра  $l_{in}$ , (в мм).

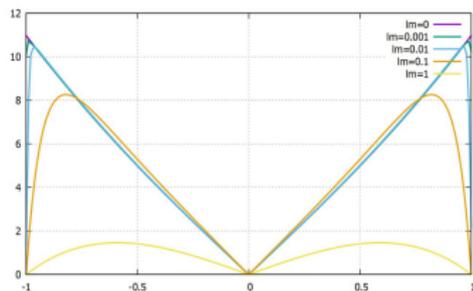


Figure: Зависимость напряжений Мизеса вдоль оси  $Ox_2$  от масштабного параметра  $l_{in}$ , (в МПа).