

Модели диффузной границы: «Цифровой керн» и другие приложения

Балашов В.А., Зипунова Е. В., Савенков Е. Б.

«Dynamics in Siberia»
Институт математики им. С. Л. Соболева
Новосибирск, 2–6 марта 2026 г.



Содержание

- 1 Технология «Цифровой керн»
- 2 Математическая модель
- 3 Численный алгоритм
- 4 Примеры



Содержание

- 1 Технология «Цифровой керн»
- 2 Математическая модель
- 3 Численный алгоритм
- 4 Примеры



Гидродинамические процессы на микроуровне

Микроуровень:

- определяет параметры течения на макро-уровне (статические и динамические свойства фильтрационных моделей)
- физический масштаб воздействия широкого спектра МУН на процесс вытеснения

Характеристические свойства модели микроуровня:

- Детальный учет структуры порового пространства
- Мн.-ф./мн.-к. гидродинамика в пустотном^а пространстве (+ поверхностные и контактные эффекты, хим. реакции, седиментация/растворение и т.д.)

^апоры, каверны, трещиноватость и др.



Лабораторные исследования

До некоторых пор единственным способом определения свойств системы «порода-флюид» на уровне порового пространства служил лабораторный эксперимент.

Сложности:

- Проведение множественных экспериментов на одном образце
- Полноценные параметрические исследования
- Воссоздание полного спектра пластовых условий (температура, давление, ...)



Вычислительный эксперимент: основные возможности

Цифровой керн = томография + вычислительный эксперимент

Возможности:

- Достоверная (с обоснованной оценкой степени неопределенности) количественная информация
- Учет широкого спектра физико-химических механизмов
- Массовость «виртуальных» экспериментов
- Практически неограниченные возможности параметрических исследований
- «Сложные» образцы: шлам, неконсолидированные породы и т.д.

Цифровой керн — гибкий инструмент, дополняющий и качественно расширяющий стандартные лабораторные методики



Содержание

- 1 Технология «Цифровой керн»
- 2 Математическая модель**
- 3 Численный алгоритм
- 4 Примеры



Основные сложности

- Диаметр поры — 1-10-100 микрон → необходимо разрешать границы раздела фаз;
- Учет поверхностного натяжения и контактных углов в системе «скелет порды»-«подвижные фазы»;
- Топологические превращения капель эмульсии;
- «Богатая» физика, в том числе образование капель из однородной смеси и их исчезновение в зависимости от ТД условий (например, капиллярная конденсация или созревание по Оствальду);
- Масштабные эффекты: течение в «тонком» и «толстом» капиллярах происходят по разному.

Много методов, которые хорошо описывают эволюцию геометрии капель, но необходимо еще корректно учитывать «сложную» физику



Модели диффузной границы

Общие свойства (не только гидродинамика):

- разделение/несмешение фаз: энергия системы не является *выпуклой*;
- энергия фазы зависит от формы области, которую она занимает в пространстве: энергия зависит от *градиентов* состояния.

Применение:

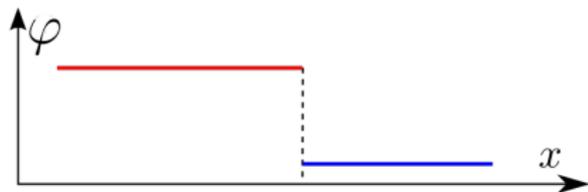
- гидродинамика;
- теория упругости: фазовые переходы в сплавах и не только, развитие трещин;
- плавление/отвердевание;
- развитие канала электрического пробоя;
- ...



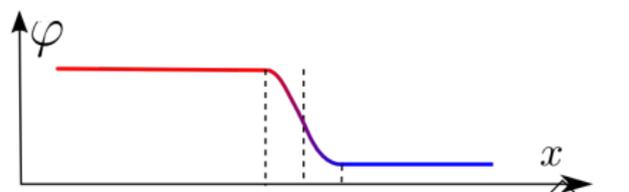
Двухфазное течение

Модель типа фазового поля (диффузная граница)

- Идея: Ван-дер-Ваальс; развитие: Кортвег, Гинзбург, Ландау, Кан, Хиллиард; \Rightarrow «слабо-нелокальные» или «градиентные» теории \Rightarrow (в частности) уравнения Кана–Хиллиарда, теория градиента плотности (DGT) в комбинации с моделью Навье–Стокса
- Фазы разделены тонким слоем конечной ширины, в пределах которого действуют силы межфазного взаимодействия
- Конечная ширина границы является физическим, а не численным эффектом



«четкая граница»



«диффузная граница»



Изотермическое двухкомпонентное двухфазное течение с капиллярными эффектами I

Двухкомпонентные уравнения Навье–Стокса + фазовое поле (DGT)
+ регуляризация (квазигидродинамическая)

$$\partial_t \rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}^m) = -\operatorname{div} \mathbf{b}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2;$$
$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}^m \otimes \mathbf{u}) + \rho_\alpha \nabla \hat{\mu}_\alpha = \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \mathbf{f}_b$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$

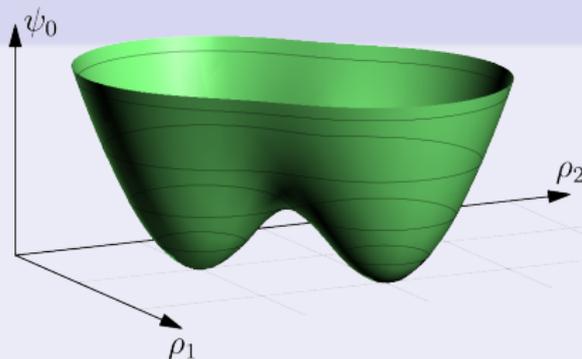
$$\psi_0(\bar{\rho}) = \frac{\psi^A \psi^B}{\psi^A + \psi^B}$$

Свободная энергия Гельмгольца

$$\psi(\bar{\rho}, \nabla \bar{\rho}) := \psi_0(\bar{\rho}) + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta} \nabla \rho_\alpha \cdot \nabla \rho_\beta.$$

$$K = A, B, \quad \bar{\rho} := \{\rho_1, \rho_2\}$$

$$\psi^K(\bar{\rho}) = A_\psi [(\rho_1 - \rho_1^K)^2 + (\rho_2 - \rho_2^K)^2].$$



Изотермическое двухкомпонентное двухфазное течение с капиллярными эффектами II

2-компонентные ур-ия НС + фазовое поле + регуляризация

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}^m) &= -\operatorname{div} \mathbf{b}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2; \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}^m \otimes \mathbf{u}) + \rho_\alpha \nabla \hat{\mu}_\alpha &= \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \mathbf{f}_b,\end{aligned}$$

- $\hat{\mu}_\alpha(\bar{\rho}, \Delta \bar{\rho}) = \mu_\alpha - \lambda_{\alpha\beta} \Delta \rho_\beta$ — обобщенный химический потенциал
- $\mu_\alpha(\bar{\rho}) = \partial_{\rho_\alpha} \psi_0$
- $\mathbf{b}_\alpha = -M_{\alpha\beta} \nabla(\theta^{-1} \hat{\mu}_\beta)$ — диффузионный поток
- $M_{\alpha\beta}$ — подвижность (диффузионная), $\sum_{\beta=1}^2 M_{\alpha\beta} = 0$
- $\theta > 0$ — температура (постоянный параметр)
- $\mathbf{w} = \tau \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\rho_\alpha}{\rho} \nabla \hat{\mu}_\alpha - \rho^{-1} \mathbf{f}_b \right] \sim O(\tau)$



Изотермическое двухкомпонентное двухфазное течение с капиллярными эффектами III

2-компонентные ур-ия НС + фазовое поле + регуляризация

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}^m) &= -\operatorname{div} \mathbf{b}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2; \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}^m \otimes \mathbf{u}) + \rho_\alpha \nabla \hat{\mu}_\alpha &= \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \mathbf{f}_b.\end{aligned}$$

- $\mathbf{\Pi} := \mathbf{\Pi}^{\text{NS}} + \mathbf{\Pi}^\tau$, $\mathbf{\Pi}^{\text{NS}}(\mathbf{u}) := 2\eta \mathbf{D} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)(\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I}$
- $\mathbf{D}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^\text{T})$, $\mathbf{\Pi}^\tau := \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}$
- $\rho_\alpha \nabla \hat{\mu}_\alpha = \nabla p - \operatorname{div} \mathbf{\Pi}^\lambda$: позволяет построить пространственную дискретизацию, наследующую свойство диссипативности
- $p(\bar{\rho}) := \rho_1 \mu_1 + \rho_2 \mu_2 - \psi_0$
- Тензор капиллярных напряжений:
 $\mathbf{\Pi}^\lambda := (\rho_\alpha \lambda_{\alpha\beta} \Delta \rho_\beta + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta} \nabla \rho_\alpha \cdot \nabla \rho_\beta) \mathbf{I} - \lambda_{\alpha\beta} \nabla \rho_\alpha \otimes \nabla \rho_\beta$



Диссипативность (невозрастание полной энергии)

Теорема

Полная энергия $\mathcal{E}(t)$ является невозрастающей функцией:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E} = & - \int_{\Omega} (A^{\text{NS}}(\mathbf{u}) + \theta^{-1} M_{\alpha\beta} \nabla \hat{\mu}_{\beta} \cdot \nabla \hat{\mu}_{\alpha} + \rho \tau^{-1} |\mathbf{w}|^2) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\partial\Omega} D_{\alpha} (\partial_t \rho_{\alpha})^2 ds \leq 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}(t) := \Psi(t) + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \rho d\mathbf{x} = \int_{\Omega} e d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} g ds$$

$$e := \psi_0 - \Phi \rho + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta} \nabla \rho_{\alpha} \cdot \nabla \rho_{\beta} + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2$$

$$A^{\text{NS}}(\mathbf{u}) := 2\eta |\mathbf{D}|^2 + (\zeta - \frac{2}{3}\eta) (\text{div } \mathbf{u})^2 \geq 0$$

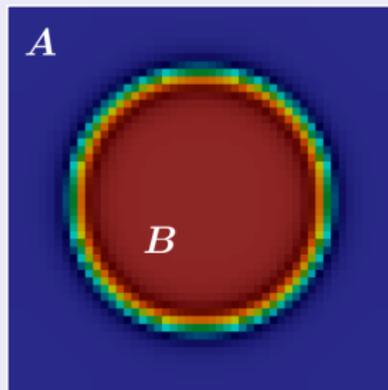


Поверхностное натяжение

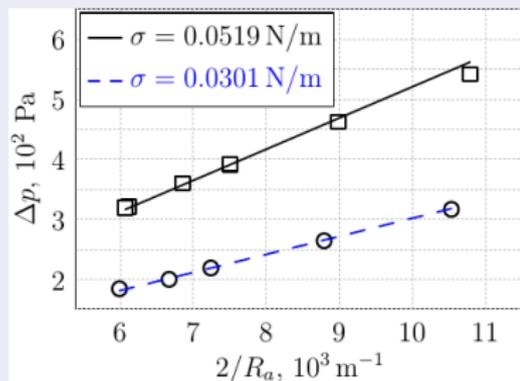
Для плоской границы

$$\sigma_{AB} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{\alpha\beta} (\partial_{x_1} \rho_\alpha) (\partial_{x_1} \rho_\beta) dx_1.$$

На практике используем з-н Юнга–Лапласа



$$\Delta p = \frac{2\sigma_{AB}}{R}$$



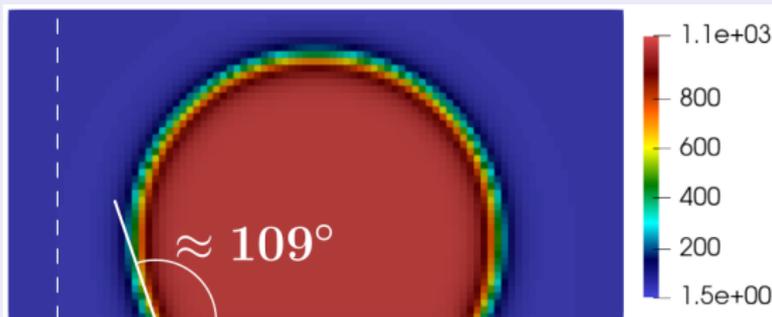
Смачивание I

Граничные условия

$$\lambda_{\alpha\beta} \partial_{\mathbf{n}} \rho_{\beta} = b_{\alpha}^w \sqrt{\psi_0}$$

Калибровка b_{α}^w

Проводится с учетом конкретного значения σ_{AB} .



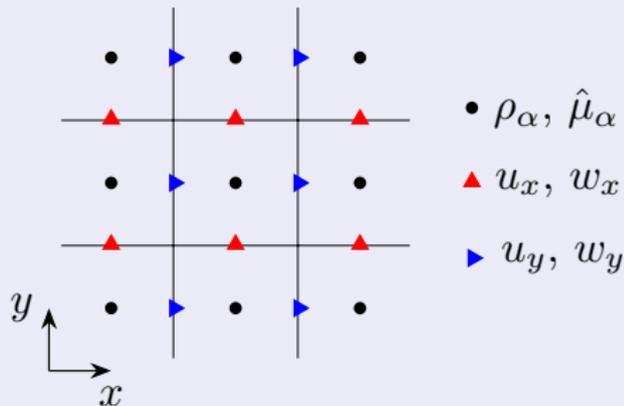
Содержание

- 1 Технология «Цифровой керн»
- 2 Математическая модель
- 3 Численный алгоритм**
- 4 Примеры



Численный алгоритм

- Разнесенные сетки при дискретизации по пространству
- Явный метод Эйлера для дискретизации по времени



Дискретизация по пространству I

Метод, дискретный по пространству и непрерывный по времени

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\alpha + \delta_i [(s_i^* \rho_\alpha) u_i^m] &= -\delta_i b_{\alpha,i} \text{ на } \omega_h^*, \quad \alpha = 1, 2, \\ \partial_t ((s_k^* \rho) u_k) + \delta_k^* ((s_k J_k) s_k u_k) + (1 - \delta^{(kj)}) \delta_j ((s_k^* J_j) s_j^* u_k) \\ + (s_k^* \rho_\alpha) \delta_k^* \hat{\mu}_\alpha &= \delta_k^* \Pi_{kk} + (1 - \delta^{(kj)}) \delta_j \Pi_{jk} + (s_k^* \rho) \delta_k^* \Phi \text{ на } \omega_{hk,l^*,n^*}. \end{aligned}$$

Для удобства введены разностные операторы

$$\begin{aligned} (s_k v)_{m-1/2} &= \frac{1}{2}(v_m + v_{m-1}), & (s_k^* y)_m &= \frac{1}{2}(y_{m+1/2} + y_{m-1/2}), \\ (\delta_k v)_{m-1/2} &= \frac{1}{h}(v_m - v_{m-1}), & (\delta_k^* y)_m &= \frac{1}{h}(y_{m+1/2} - y_{m-1/2}). \end{aligned}$$

и соответствующие скалярные произведения

$$\begin{aligned} (v, \tilde{v})_k &:= h_k \sum_{l=1}^{N_k-1} v_l \tilde{v}_l, & (y, \tilde{y})_{k^*} &:= h_k \sum_{l=1}^{N_k} y_{l-1/2} \tilde{y}_{l-1/2}, \\ (v, \tilde{v})_{\bar{k}} &:= \frac{h_k}{2} v_0 \tilde{v}_0 + (v, \tilde{v})_k + \frac{h_k}{2} v_{N_k} \tilde{v}_{N_k}, & \tilde{v} &\in H(\bar{\omega}_{hk}), \tilde{y} \in H(\bar{\omega}_{hk}^*) \end{aligned}$$



Дискретизация по пространству II

Метод, дискретный по пространству и непрерывный по времени

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\alpha + \delta_i [(s_i^* \rho_\alpha) u_i^m] &= -\delta_i b_{\alpha,i} \text{ на } \omega_h^*, \quad \alpha = 1, 2, \\ \partial_t ((s_k^* \rho) u_k) + \delta_k^* ((s_k J_k) s_k u_k) + (1 - \delta^{(kj)}) \delta_j &((s_k^* J_j) s_j^* u_k) \\ + (s_k^* \rho_\alpha) \delta_k^* \hat{\mu}_\alpha &= \delta_k^* \Pi_{kk} + (1 - \delta^{(kj)}) \delta_j \Pi_{jk} + (s_k^* \rho) \delta_k^* \Phi \text{ на } \omega_{hk, l^*, n^*}. \end{aligned}$$

$$J_k = (s_k^* \rho) u_k^m, \quad u_k^m = u_k - w_k \text{ на } \omega_{h\bar{k}, l^*, n^*},$$

$$w_k = \tau_k \left\{ u_k s_k^* \delta_k u_k + (1 - \delta^{(ki)}) s_i [(s_k^* u_i) \delta_i^* u_k] + \frac{(s_k^* \rho_\alpha)}{(s_k^* \rho)} \delta_k^* \hat{\mu}_\alpha - \delta_k^* \Phi \right\},$$

$$\hat{\mu}_\alpha = \mu_\alpha - \lambda_{\alpha\beta} \delta_i \delta_i^* \rho_\beta \text{ на } \omega_h^*, \quad b_{\alpha,k} = -\theta^{-1} (s_k^* M_{\alpha\beta}) \delta_k^* \hat{\mu}_\beta \text{ на } \omega_{h\bar{k}, l^*, n^*}$$

$$\Pi_{kk} = \Pi_{kk}^{\text{NS}} + \Pi_{kk}^\tau, \quad \Pi_{kk}^\tau = s_k ((s_k^* \rho) u_k w_k) \text{ на } \omega_h^*,$$

$$\Pi_{kk}^{\text{NS}} \equiv \Pi_{kk}^{\text{NS}}(\mathbf{u}) = 2\eta \delta_k u_k + (\zeta - \frac{2}{3}\eta) \operatorname{div}_h \mathbf{u}, \quad \operatorname{div}_h \mathbf{u} = \delta_i u_i,$$

$$\Pi_{lk} = \Pi_{lk}^{\text{NS}} + \Pi_{lk}^\tau, \quad \Pi_{lk}^\tau = (s_k^* u_l) s_l^* [(s_k^* \rho) w_k] \text{ на } \omega_{h\bar{k}, \bar{l}, n^*},$$

$$\Pi_{lk}^{\text{NS}} \equiv \Pi_{lk}^{\text{NS}}(\mathbf{u}) = (s_l^* s_k^* \eta) (\delta_l^* u_k + \delta_k^* u_l).$$



Дискретизация по пространству III

Термодинамическая согласованность

В полудискретной (непрерывной по t , дискретной по \mathbf{x}) постановке разностный метод наследует свойство невозрастания полной энергии

Теорема

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E}_h = & -\theta^{-1} \left((s_i^* M_{\alpha\beta}) \delta_i^* \hat{\mu}_\beta, \delta_i^* \hat{\mu}_\alpha \right)_{i,j^*,k^*} - A_h^{\text{NS}}(\mathbf{u}) - (w_i^2, (s_i^* \rho) \tau_i^{-1})_{i,j^*,k^*} \\ & - (D_\alpha \partial_t (s_i^* \rho_\alpha)^2, 1)_{j^*,k^*} |_{x_i=0} - (D_\alpha \partial_t (s_i^* \rho_\alpha)^2, 1)_{j^*,k^*} |_{x_i=X_i} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(t) := & (e_h, 1)_* + (g_i(s_i^* \bar{\rho}), 1)_{j^*,k^*} |_{x_i=0} + (g_i(s_i^* \bar{\rho}), 1)_{j^*,k^*} |_{x_i=X_i}, \\ e_h := & \psi_0 - \Phi \rho + \frac{1}{2} \rho s_i (u_i^2) + \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta} s_i [(\delta_i^* \rho_\beta) \delta_i^* \rho_\alpha]. \end{aligned}$$



Основные проблемы построения эффективных алгоритмов

- ТД согласованность: консервативные постановки хуже, чем специальные неконсервативные (нужны полностью консервативные, но неизвестно, как их строить).
- Высокий порядок уравнений (сейчас — третий, неизотермическая постановка — 4-й; может быть и больше).
- Большие скачки свойств (вязкости, плотности, ...)
- Невыпуклая энергия: неявные схемы являются условно корректны так же, как и явные (конечномерная задача не имеет или имеет не одно решение при больших шагах по времен \rightarrow расщепление по Эйру/SAV/...).
- Градиенты в энергии: градиентная устойчивость схемы

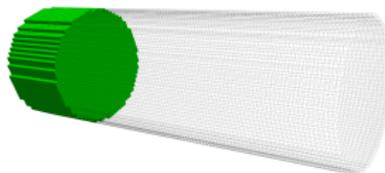


Содержание

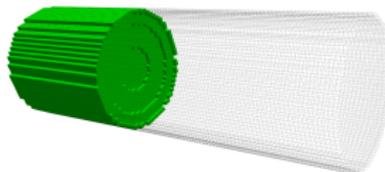
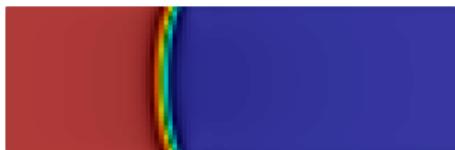
- 1 Технология «Цифровой керн»
- 2 Математическая модель
- 3 Численный алгоритм
- 4 Примеры



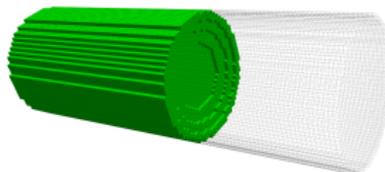
Капиллярное поднятие I



$t = 0$



$t = 20000\Delta t = 8 \cdot 10^{-2} \text{ мс}$

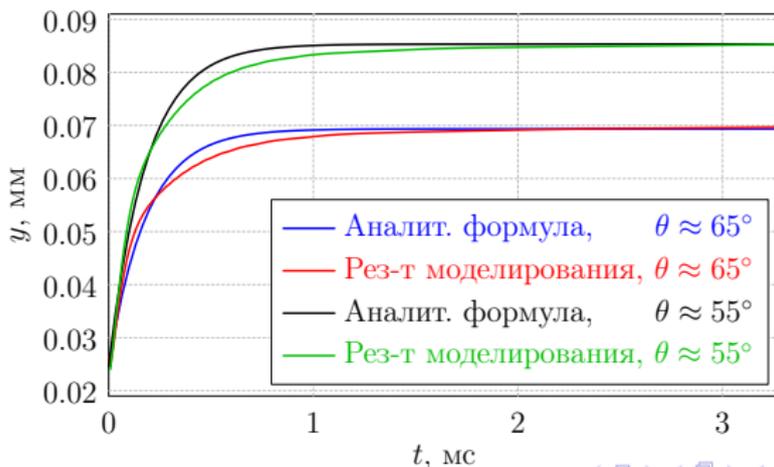
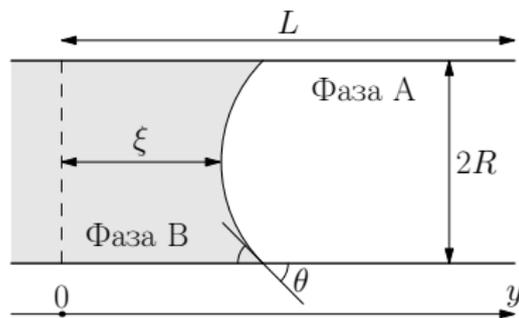


$t = 820000\Delta t = 3.28 \text{ мс}$

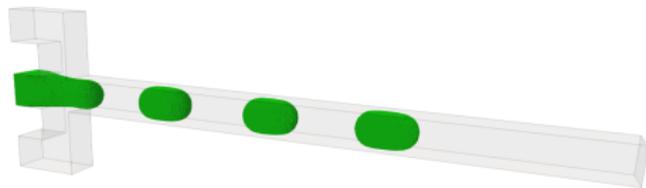
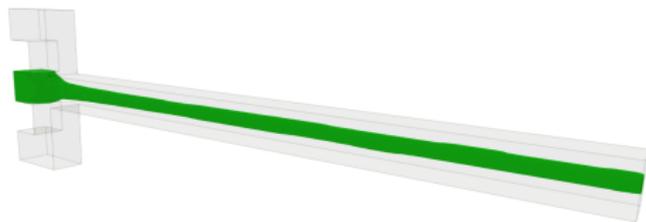
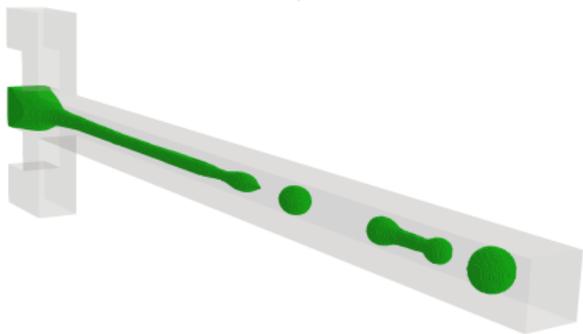
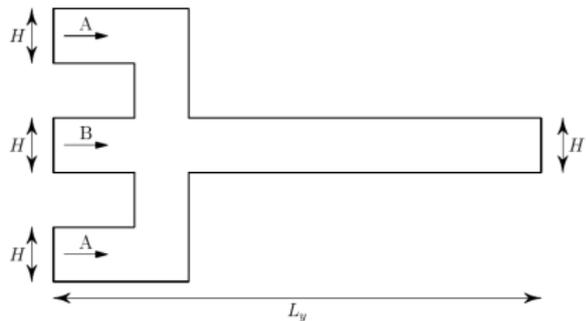


Капиллярное поднятие II

$$\xi(t) = \frac{2\sigma_{AB} \cos \theta}{Rg\Delta\rho} \left[1 - \exp\left(-\frac{g\Delta\rho R^2}{\eta L} t\right) \right]$$



Гидродинамическая фокусировка I

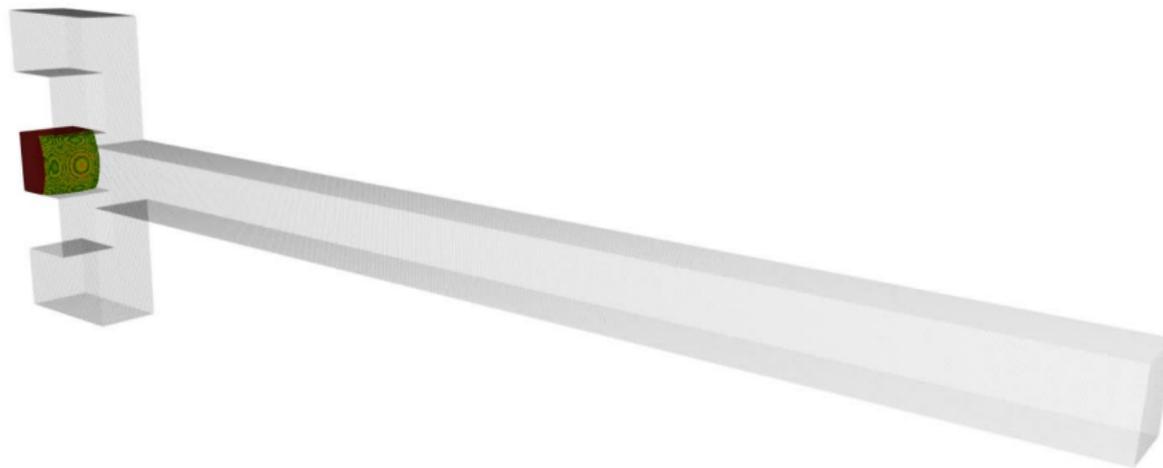


Сечение 1

Сечение 2

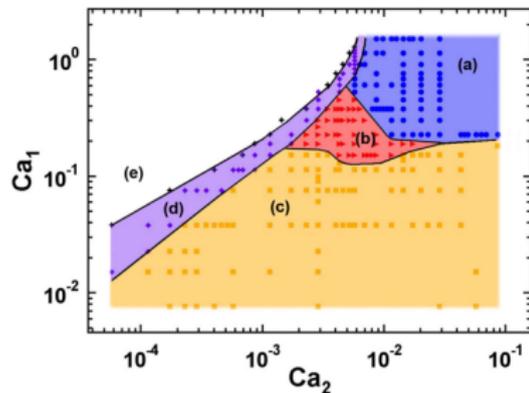
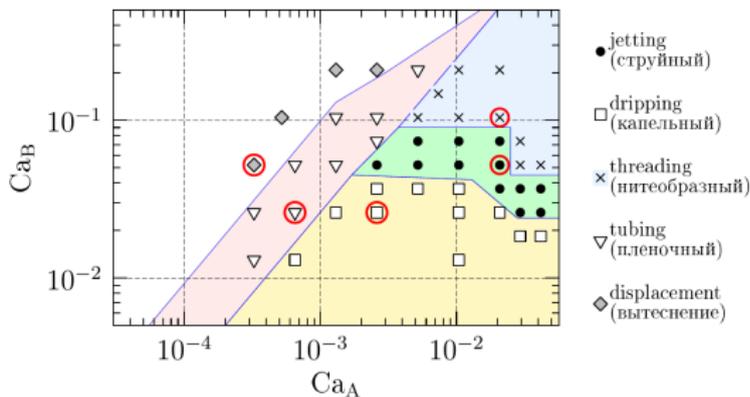


Гидродинамическая фокусировка II



Гидродинамическая фокусировка III

Качественное сравнение с экспериментальными данными* (полностью воспроизвести параметры эксперимента не удалось из-за большой вязкости глицерина, который использовался в эксперименте в качестве одной из фаз)



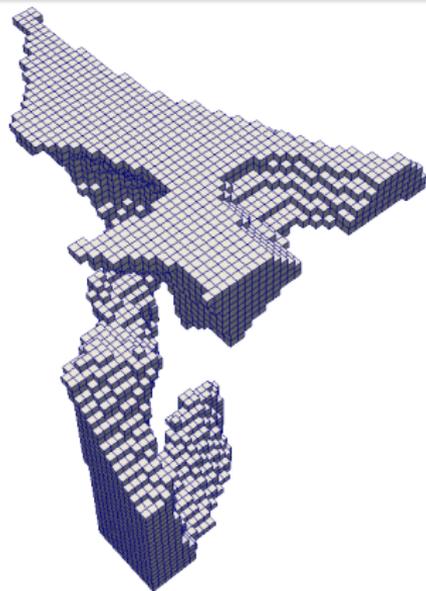
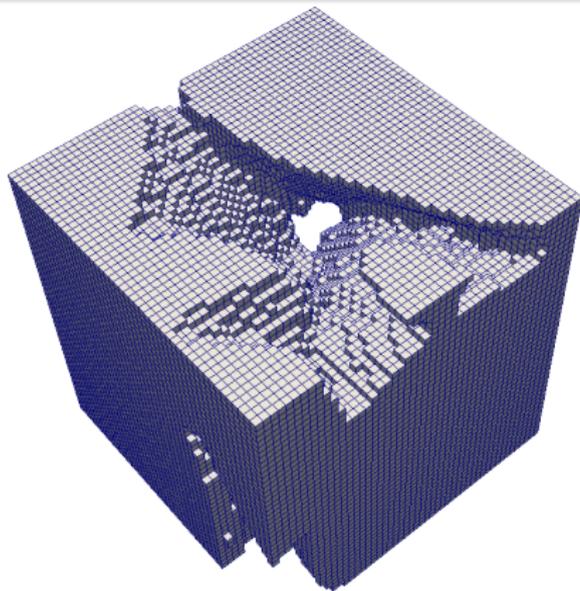
* T. Cubaud, T.G. Mason. Capillary threads and viscous droplets in square microchannels. *Physics of Fluids*, 20(5), 2008, <https://doi.org/10.1063/1.2911716>



Вытеснение в образце I

Геометрия расчетной области

- Строится на основе результатов томографии миниобразца керна
- Имеет **воксельное** представление



Вытеснение в образце II

Одной из важных задач является оценка кривых ОФП (относительных фазовых проницаемостей) $k_r^F = k_F/k_a$ от насыщенности S

$$\frac{Q_F}{A} = \frac{k_F}{\eta_F} \frac{\Delta P_F}{L_y}$$

Способ I

Периодические условия, начальное распределение фаз. Течение за счет действия объемной силы f . В з-не Дарси вместо ΔP используется f .

«Недостатки» (особенности):

- На каждое значение насыщенности S необходимо проводить отдельное моделирование
- Итоговые кривые принципиально зависят от начального распределения
- Обеспечение периодичности порового пространства

«Достоинство» (удобство) — вместо перепада давления использовать объемную силу.



Вытеснение в образце III

Способ II, предложен в работе [1]

Моделируется обычное вытеснение, но перепад давления вычисляется как скорость диссипации энергии в жидкости вследствие действия вязких сил:

$$\Delta P_F = -\frac{1}{Q_F} \int_{V_F} \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{\Pi}^{\text{NS}} dV, \quad Q_F = \frac{1}{N_y} \int_{V_F} u_y ds.$$

V_F — объем, занятый фазой F , Q_F — средний объемный расход.
«Достоинства» (особенности)

- Один расчет → одна пара кривых ОФП
- Более «естественное» распределение фаз в поровом пространстве
- Нет неопределенности в начальных условиях
- Нет необходимости в периодичности

«Недостаток»: более сложное вычисление перепада давления.

¹ A.Q. Raeini, M.J. Blunt, B. Bijeljic, Direct simulations of two-phase flow on micro-CT images of porous media and upscaling of pore-scale forces // *Advances in Water Resources* v. 74, 2014, p. 116–126, <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2014.08.012>



Вытеснение в образце IV

Оба способа «правильные»: могут быть использованы для оценки тех или иных свойств порового пространства (точнее системы «образец–жидкость»). Выбор зависит от процесса, который необходимо смоделировать.

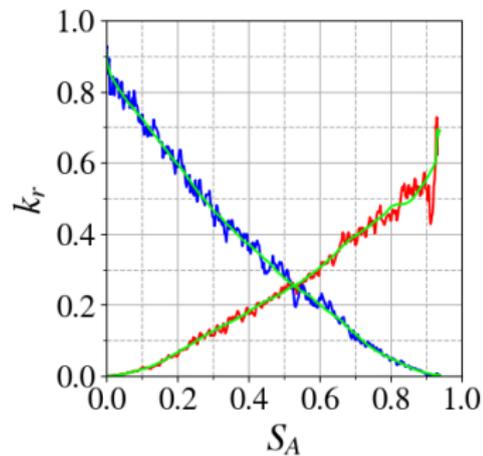
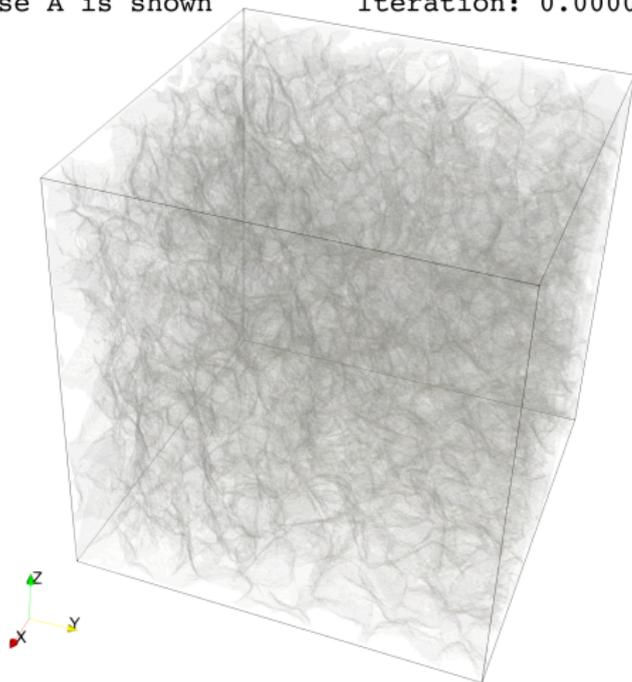


Вытеснение в образце V

Результаты, следуя способу II

Phase A is shown

Iteration: 0.0000e+00

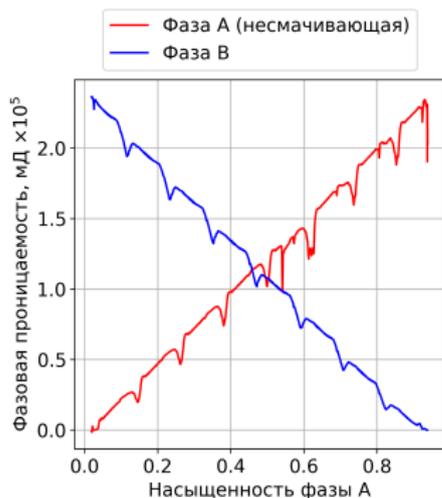
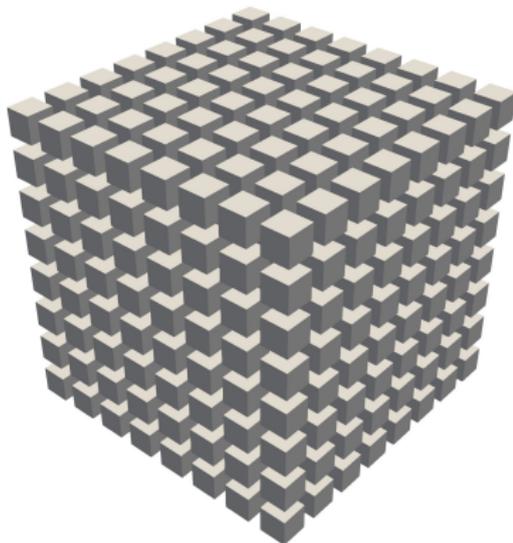


Вытеснение в образце VI

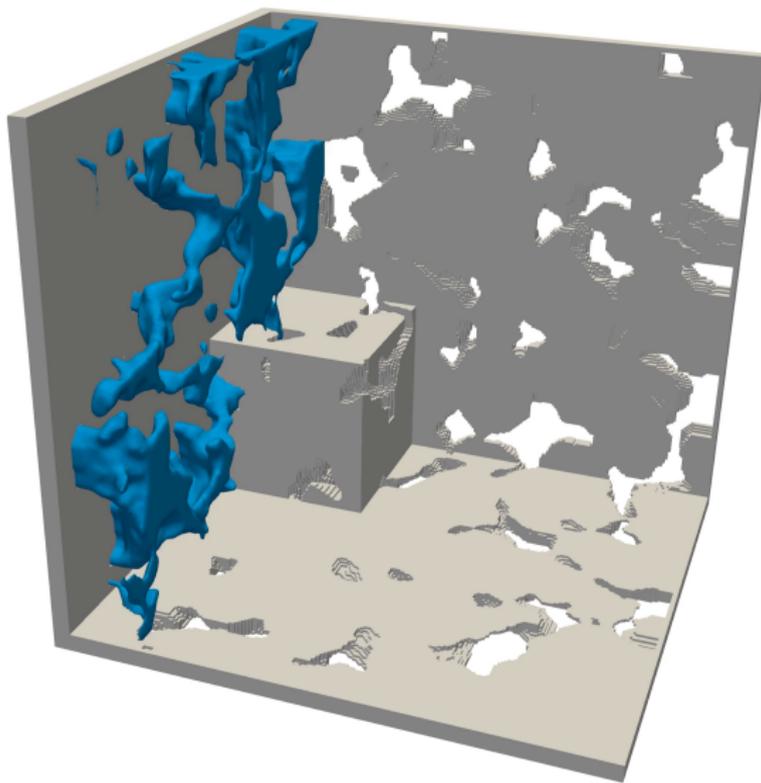
Замечание об осцилляциях на кривых ОФП

Связаны с возмущениями давления и/или поля скорости в виду капиллярных эффектов (процелкивания менисков из более узких пор в более широкие, слияние/разделение фаз)

Модельный пример:



Вытеснение в образце V



Трехфазная система типа «жидкая линза» I

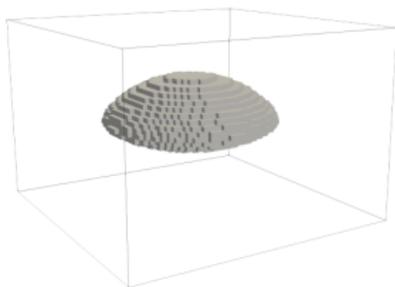
Свободная энергия

Задается по аналогии с 2-фазным случаем

$$\psi_0(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \frac{\psi^A \psi^B \psi^C}{\psi^A \psi^B + \psi^B \psi^C + \psi^C \psi^A},$$

$$\psi^Z(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = Z_\psi [(\rho_1 - \rho_1^Z)^2 + (\rho_2 - \rho_2^Z)^2 + (\rho_3 - \rho_3^Z)^2], \quad Z = A, B, C.$$

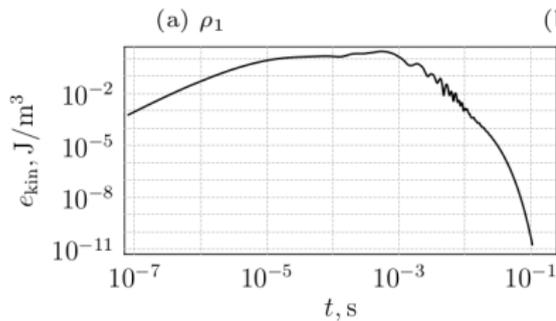
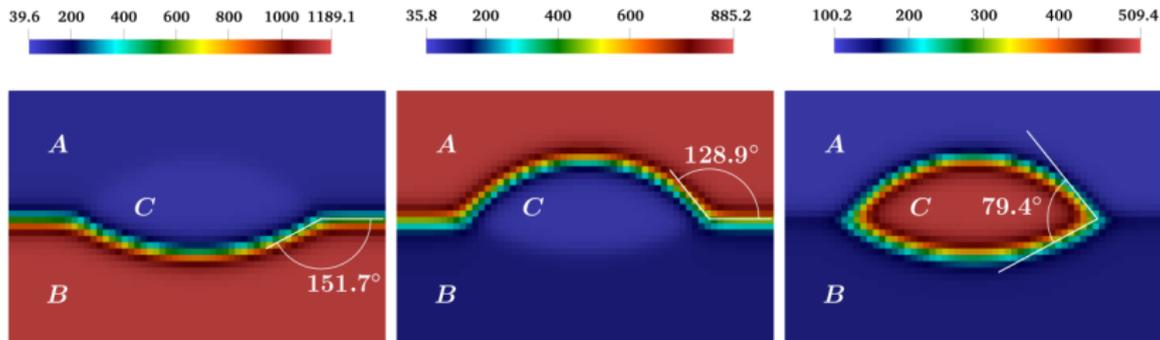
Жидкая линза. Начальные условия: круглая капля на границе раздела.



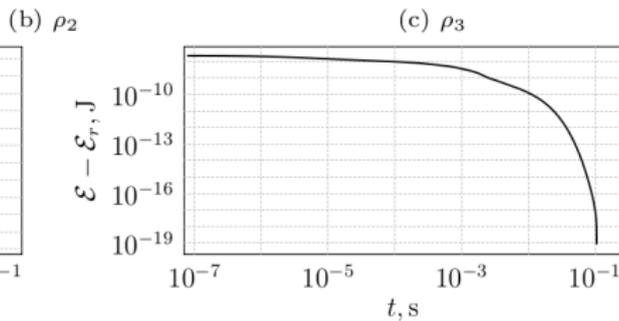
Grid cells with $\rho_3 > 305 \text{ kg/m}^3$ for $t = 6 \cdot 10^5 \Delta t$.



Трехфазная система типа «жидкая линза» II



(a) e_{kin}



(b) ϵ

Kinetic and total energies observed in the simulation of liquid lens.

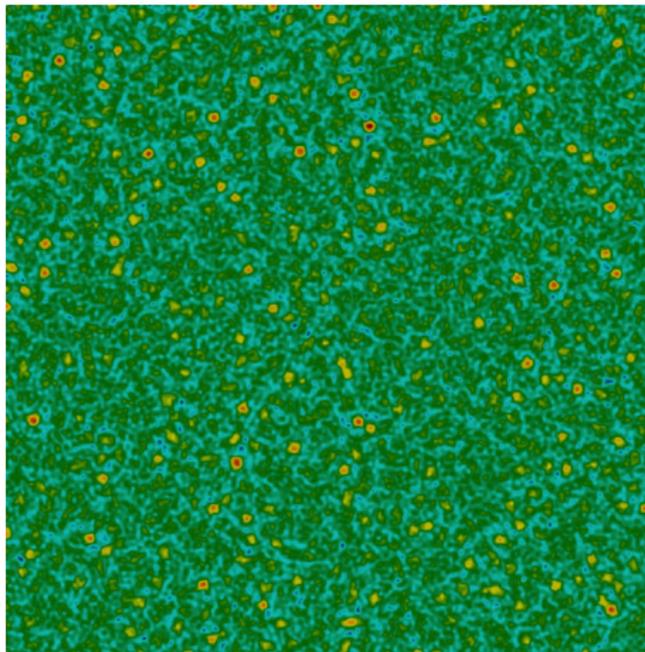


Спинодальный распад

Фаза А

Фаза В

Фаза С

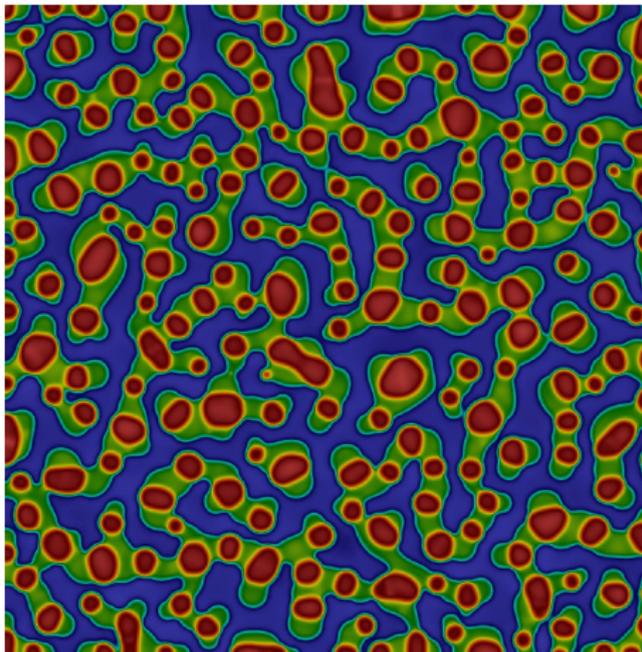


Спинодальный распад

Фаза А

Фаза В

Фаза С



Текущее развитие I

- Устойчивые аппроксимации по времени: расщепление по физическим процессам, гарантирующее ТД корректность + метод Эйра/SAV + линейная алгебра (М. А. Бочев, И. А. Фахурдинов)
- Многокомпонентность с числом фаз > 3 и «дополнительная» физика
- Валидация на лабораторных экспериментах (кern + микрочипы)



Текущее развитие II

- Электрический пробой в микронеоднородной среде — м.ф.п. + квази(электро)статика (Е. В. Зипунова; группа В. Т. Жукова, — многосеточный метод)
- Термомеханика/взрыв-и-удар — гиперболические постановки, однородный расчет с учетом многофазности (Р. Р. Полехина, И. С. Меньшов)

Программная платформа DIMP \equiv Digital IMage Multipysics

- Воксельные геометрические модели естественных и техногенных сред / томография
- Полностью безматричный солвер (и планирует остаться)
- CPU/GPU/CPU + GPU + единая кодовая база (М. М. Краснов)



Содержание

- 1 Технология «Цифровой керн»
- 2 Математическая модель
- 3 Численный алгоритм
- 4 Примеры



Электрический пробой

Явление резкого возрастания тока в диэлектрике при приложении электрического напряжения выше критического.

- Рассматриваем твердый диэлектрик
- Деградация диэлектрических свойств материала
- Процесс развивается в ограниченной зоне — канале пробоя
- Сложная физическая природа

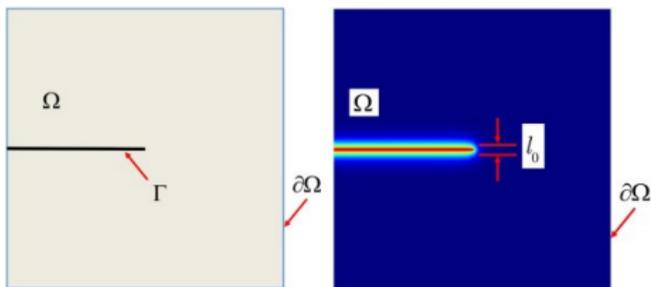


Математическая модель

Модель типа диффузной границы

Вещество находится в разных фазах. Состояние вещества описывается гладкой функцией $\phi(\mathbf{x}, t)$ – фазовым полем.

- $\phi = 1$ – неповрежденная среда
- $\phi = 0$ – полностью разрушенная среда
- Зона $\phi \in (0, 1)$ – диффузная граница
- На разрушение среды тратится энергия



Математическая модель

Уравнения динамики системы

- Уравнение электрического потенциала Φ :

$$\nabla \cdot (\epsilon[\phi] \nabla \Phi) = 0$$

- Уравнение фазового поля ϕ (типа Аллена–Кана):

$$\frac{1}{m} \partial_t \phi = \frac{1}{2} \epsilon'(\phi) \|\nabla \Phi\| + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \Gamma \Delta \phi$$

- Плотность свободной энергии

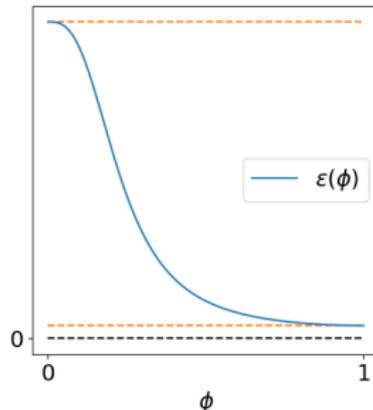
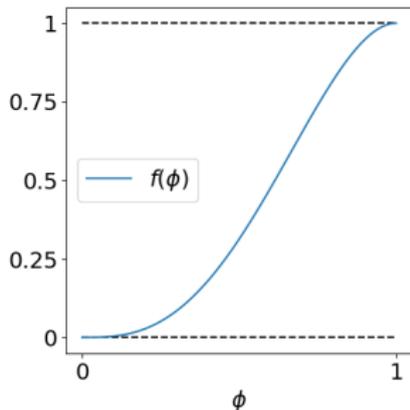
$$\pi = -\frac{1}{2} \epsilon[\phi] \|\nabla \Phi\|^2 + \Gamma \frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{\Gamma}{4} \|\nabla \phi\|^2$$

$$f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4, \quad \epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}$$

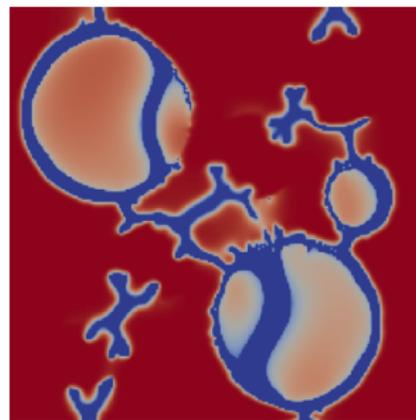
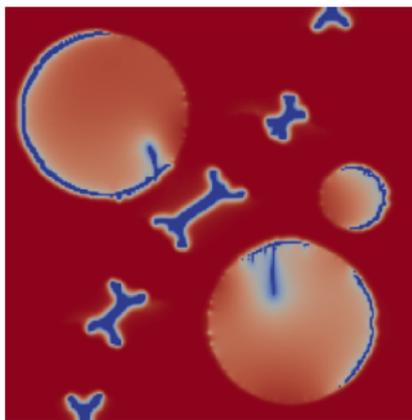
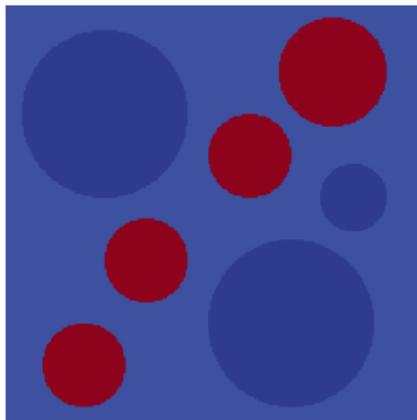


Математическая модель

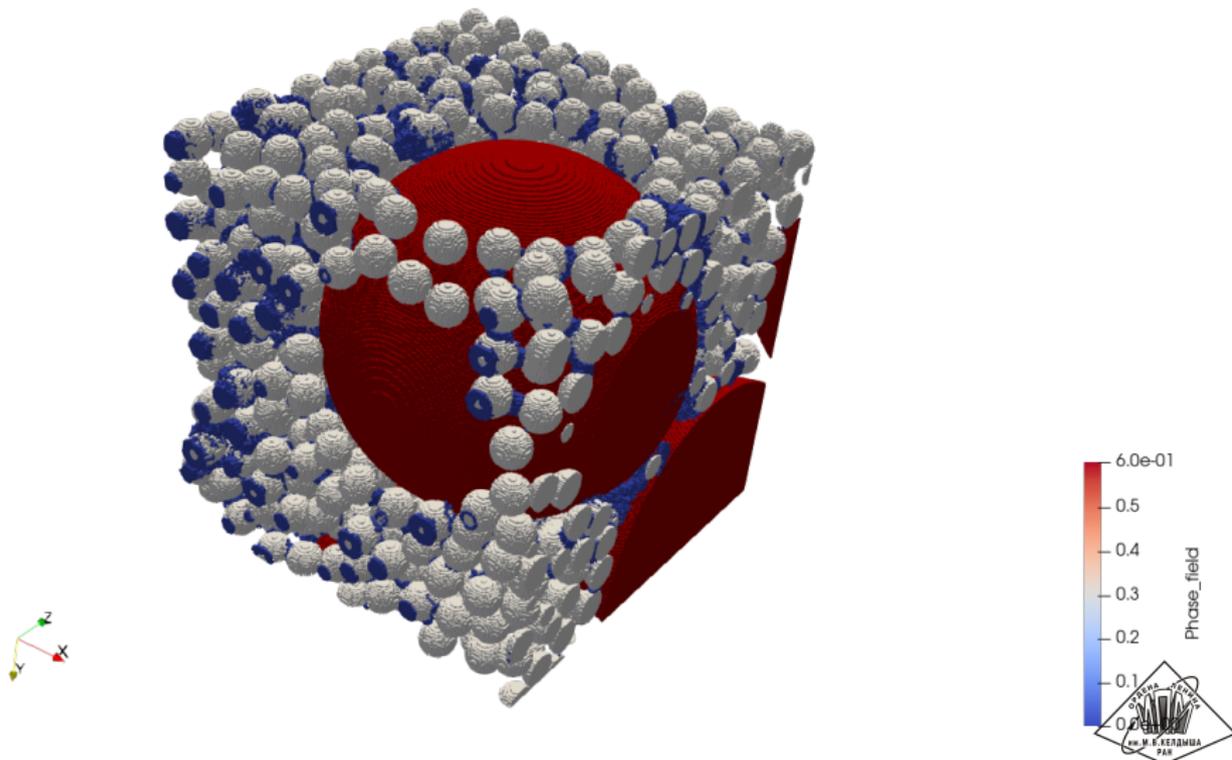
- $\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\epsilon_0(\mathbf{x})}{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \delta}$ – диэлектрическая проницаемость среды
- $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$ – интерполирующая функция



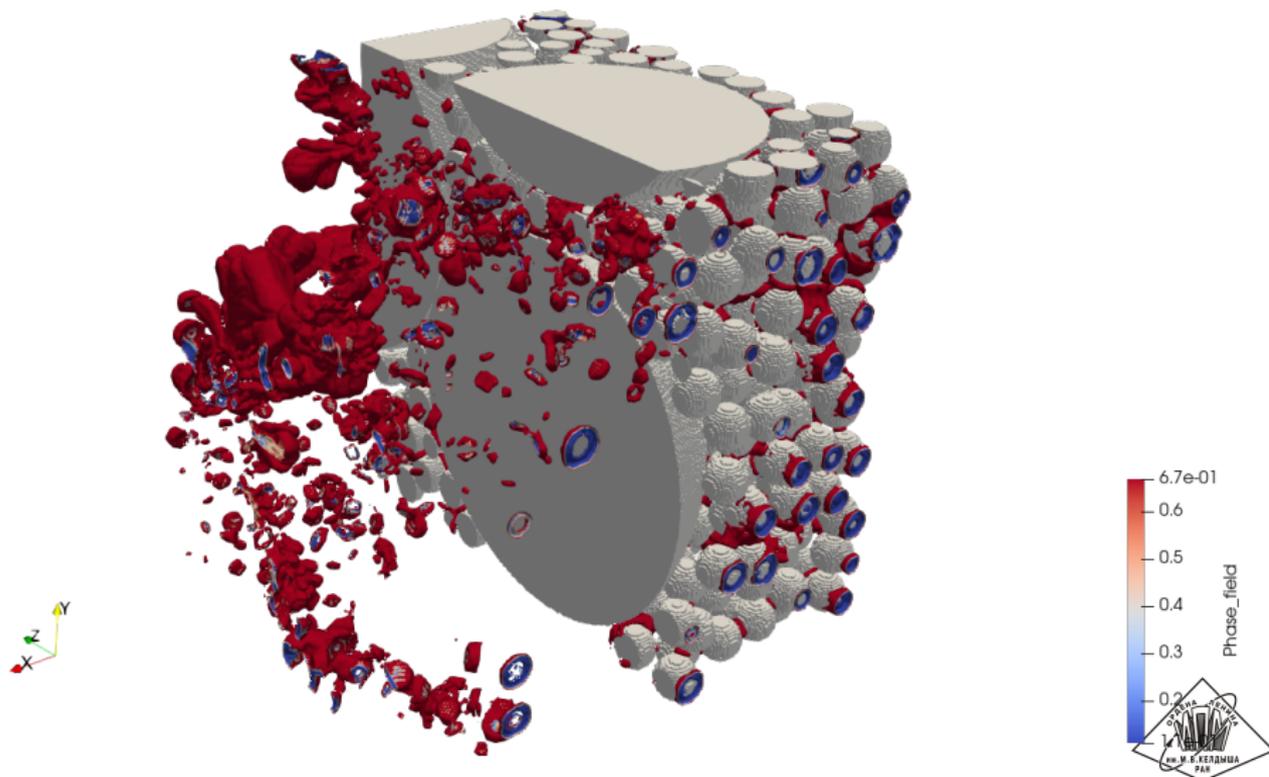
Пример вычислительного эксперимента



Электрический пробой I



Электрический пробой II

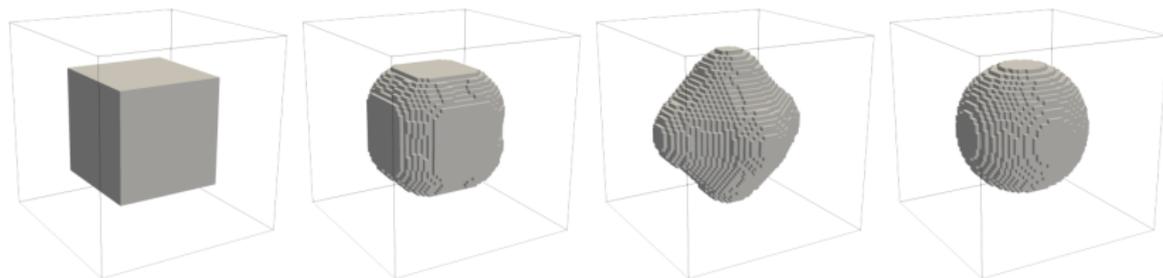


Спасибо за внимание!



Дискретизация по пространству и по времени I

Поведение полной энергии $\mathcal{E}_h(t)$ при использовании явного метода Эйлера для дискретизации по времени

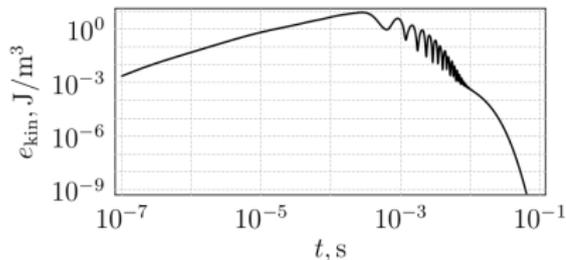


(a) $t = 0$

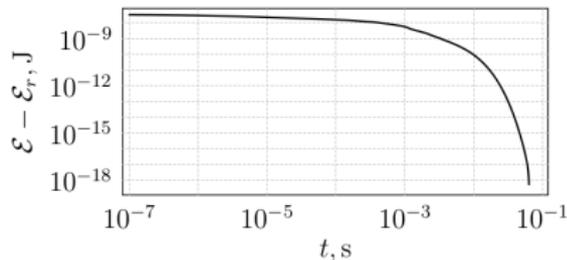
(b) $t = 2 \cdot 10^3 \Delta t$

(c) $t = 7 \cdot 10^3 \Delta t$

(d) $t = 100 \cdot 10^3 \Delta t$



(a) e_{kin}



(b) \mathcal{E}



