

# Уравнения Навье–Стокса динамики вязкой несжимаемой жидкости с интенсивным начальным импульсом

Сергей Александрович Саженов  
(ИГиЛ СО РАН, Новосибирск; АлтГУ, Барнаул)

Динамика в Сибири (Dynamics in Siberia)  
Новосибирск, 2 марта 2026 г.

# Синописис

- Рассматривается система уравнений Навье–Стокса, моделирующая однородную вязкую несжимаемую жидкость при наличии кратковременного интенсивного импульса, начинающегося в начальный момент времени.
- Существование слабого решения Лерэ–Хопфа у начально-краевой задачи для этой системы в случае, когда длительность импульса фиксирована, гарантируется хорошо известной теорией уравнений Навье–Стокса.
- В настоящем исследовании, на строгом математическом уровне выполняется предельный переход в задаче при стремлении длительности импульса к нулю, в то время как суммарное воздействие импульса остается постоянным.

- В результате доказывається, что семейство слабых решений Лерэ–Хопфа рассматриваемой задачи имеет подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению начально-краевой задачи для системы классических уравнений Навье–Стокса, дополненной «корректным» полем начальной скорости, наследующим полную информацию о профиле и кумулятивном воздействии исходного импульса.
- Скорректированное поле начальной скорости определяется как решение дополнительной предельной системы уравнений для невязкой жидкости, полученной на микроскопическом («быстром») временном масштабе, являющемся характерным временным масштабом длительности импульса.
- Наконец, выделяются два частных случая, для которых эта система может быть решена явно, что приводит к явному выражению скорректированной начальной скорости.

Исследование проведено в соавторстве со

- *Станиславом Николаевичем Антонцевым*, ИГиЛ СО РАН,
- *Иваном Владимировичем Кузнецовым*, ИГиЛ СО РАН,

и опубликовано в совместной статье

- *S. Antontsev, I. Kuznetsov, and S. Sazhenkov*, Weak solutions of the Navier–Stokes equations with a short-term intense pulse, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 1285–1310. <https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.078>.

# 1. Постановка задачи

Изучается начально-краевая задача для системы уравнений Навье–Стокса динамики однородной вязкой несжимаемой жидкости в присутствии кратковременного импульса сразу после начального момента времени:

$$\partial_t \mathbf{v}_n + \operatorname{div}_x(\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n) = \mu \Delta_x \mathbf{v}_n + \varphi_n(t)(\mathbf{b}(x) + \mathbb{B}(x)\mathbf{v}_n) - \nabla_x p_{*n} + \mathbf{f} \quad \text{в } Q_T, \quad (1a)$$

$$\operatorname{div}_x \mathbf{v}_n = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad (1b)$$

$$\mathbf{v}_n(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1c)$$

$$\mathbf{v}_n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T). \quad (1d)$$

В (1) и далее,

- $\Omega \subset \mathbb{R}_x^d$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega \in C^3$ ;
- $d \in \{2, 3\}$  — размерность пространства физических позиций  $\mathbf{x}$ ;
- $Q_T = \Omega \times (0, T)$  — пространственно-временной цилиндр;

$$\partial_t \mathbf{v}_n + \operatorname{div}_x(\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n) = \mu \Delta_x \mathbf{v}_n + \varphi_n(t)(\mathbf{b}(x) + \mathbb{B}(x)\mathbf{v}_n) - \nabla_x p_{*n} + \mathbf{f} \quad (1a)$$

### Искомые функции:

- $\mathbf{v}_n: Q_T \mapsto \mathbb{R}^d$  — поле скоростей;
- $p_{*n}: Q_T \mapsto \mathbb{R}$  — распределение давления.

### Данные задачи:

- $\mu = \operatorname{const} > 0$  — коэффициент вязкости;
- $\mathbf{f}: Q_T \mapsto \mathbb{R}^d$  — распределенная массовая сила;
- $\mathbf{v}_0: \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$  — начальное распределение поля скоростей;
- $\mathbf{b}: \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$  — вектор интенсивности импульса;
- $\mathbb{B}: \Omega \mapsto \mathbb{R}^{d \times d}$  — матрица интенсивности импульса;
- $\varphi_n: [0, T] \mapsto \mathbb{R}_+$  — функция временного профиля импульса.

$$\partial_t \mathbf{v}_n + \operatorname{div}_x(\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n) = \mu \Delta_x \mathbf{v}_n + \varphi_n(t)(\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbb{B}(\mathbf{x})\mathbf{v}_n) - \nabla_x p_{*n} + \mathbf{f} \quad (1a)$$

Предполагается, что данные задачи удовлетворяют следующим структурным требованиям и требованиям регулярности:

$$\mathbf{f} \in C([0, T]; W^{-1,2}(\Omega)^d), \quad \operatorname{div}_x \mathbf{f} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad \operatorname{div}_x \mathbf{v}_0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (3)$$

$$b_i, b_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad |b_i(\mathbf{x})|, |b_{ij}(\mathbf{x})| \leq M_0 \text{ п.в. в } \Omega, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (4)$$

с некоторой положительной постоянной  $M_0$ .

Функцию  $\varphi_n(t)$  опишем на следующих трех слайдах.

$$\partial_t \mathbf{v}_n + \operatorname{div}_x(\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n) = \mu \Delta_x \mathbf{v}_n + \varphi_n(t)(\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbb{B}(\mathbf{x})\mathbf{v}_n) - \nabla_x p_{*n} + \mathbf{f} \quad (1a)$$

## Регуляризация дельта-функции Дирака

Функция  $\varphi_n = \varphi_n(t)$  с носителем на множестве  $\{0 \leq t \leq 1/n\}$  определена по формуле

$$\varphi_n(t) = n\Phi(nt), \quad t \in [0, T], \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$\Phi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$  — это гладкая функция с носителем на отрезке  $\{0 \leq \vartheta \leq 1\}$  и средним значением, равным единице, т.е.

$$\int_0^1 \Phi(\vartheta) d\vartheta = 1. \quad (5)$$

$$\varphi_n(t) = n\Phi(nt)$$

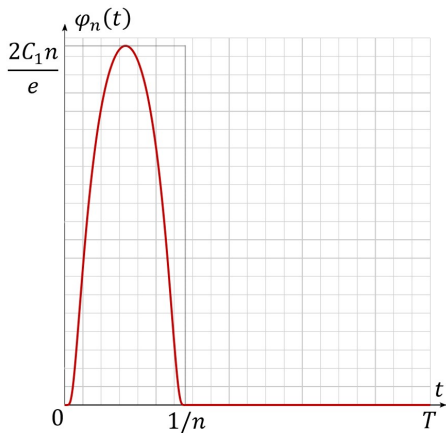


Рис.: Сглаженная функция Дирака  $\varphi_n(t) = (\delta_{(t=0+)})_n$

$$\partial_t \mathbf{v}_n + \operatorname{div}_x(\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n) = \mu \Delta_x \mathbf{v}_n + \varphi_n(t)(\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbb{B}(\mathbf{x})\mathbf{v}_n) - \nabla_x p_{*n} + \mathbf{f} \quad (1a)$$

$$\varphi_n(t) = n\Phi(nt)$$

Полагаем, что  $n \geq n_0$ , где  $n_0 \in \mathbb{N}$  — достаточно большое число.

Таким образом,  $\varphi_n$  аппроксимирует правостороннюю дельта-функцию Дирака  $\delta_{(t=0+)}$  в слабом\* смысле при  $n \rightarrow +\infty$ , т. е. имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \varphi_n(t) dt = \phi(0+)$$

при любой интегрируемой в окрестности точки  $t = 0$  функции  $\phi$ , имеющей след в точке  $t = 0$  справа:  $\phi(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} \phi(t)$ .

$$\partial_t \mathbf{v}_n + \operatorname{div}_x(\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n) = \mu \Delta_x \mathbf{v}_n + \varphi_n(t)(\mathbf{b}(x) + \mathbb{B}(x)\mathbf{v}_n) - \nabla_x p_{*n} + \mathbf{f} \quad (1a)$$

О физическом смысле слагаемого  $\varphi_n(t)(\mathbf{b}(x) + \mathbb{B}(x)\mathbf{v}_n)$

Наличие в уравнении коэффициента  $\varphi_n(t)$ , аппроксимирующего дельта-функцию Дирака, соответствует импульсным (очень быстро протекающим) процессам.

Слагаемые типа  $\varphi_n(t)(\mathbf{b}(x) + \mathbb{B}(x)\mathbf{v}_n)$  в уравнении импульса (другими словами, количества движения) могут возникать при моделировании

- действия внешних немгновенных, но очень интенсивных сил на гидродинамические потоки;
- управления с обратной связью, в которой функция управления  $F_n$  зависит от переменной состояния —  $\mathbf{v}_n$  — через механизм прямого управления, выраженный линейным алгебраическим уравнением

$$\mathbf{F}_n = \varphi_n(t)(\mathbf{b} + \mathbb{B}\mathbf{v}_n);$$

- динамики активных жидкостей.

## Разрешимость задачи (1) при фиксированных $n \in \mathbb{N}$

Решение задачи (1) понимается в слабом смысле.

Вводится стандартное определение слабого решения Лерэ–Хопфа: приведем его на следующих трех слайдах.

Из хорошо известной теории уравнений Навье–Стокса следует результат о корректности задачи (1) при каждом  $n \in \mathbb{N}$ :

### Предложение 1.

1. Пусть выполнены условия (2)–(4) и  $d \in \{2, 3\}$ .

Тогда при каждом  $n \geq n_0$  задача (1) имеет по меньшей мере одно слабое решение Лерэ–Хопфа  $\mathbf{v}_n$ .

2. Пусть  $d = 2$ .

Тогда при условиях (2)–(4) слабое решение Лерэ–Хопфа задачи (1) единственно для каждого  $n \geq n_0$ .

## Обозначения для хорошо известных пространств:

$$\mathcal{V} := \{ \mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)^d : \operatorname{div}_x \mathbf{v} = 0 \},$$

$$\mathbf{H} := \text{замыкание } \mathcal{V} \text{ по норме } L^2(\Omega)^d,$$

$$\mathbf{V}^k := \text{замыкание } \mathcal{V} \text{ по норме } W_0^{k,2}(\Omega)^d, \quad \mathbf{V} := \mathbf{V}^1,$$

$$\mathbf{V}^{-k} := \text{сопряженное пространство к } \mathbf{V}^k.$$

Заметим, что  $\mathbf{f} \in C([0, T]; \mathbf{V}^{-1})$ ,  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}$ , согласно (2) и (3).

## Определение слабого решения Лерэ–Хопфа

Вектор-функция  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t)$  называется *слабым решением Лерэ–Хопфа* задачи (1), если выполняются следующие условия:

(i) выполняются требования регулярности

$$\mathbf{v}_n \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \quad \partial_t \mathbf{v}_n \in L^{4/d}(0, T; \mathbf{V}^{-1}),$$

$$\mathbf{v}_n \in C([0, T]; \mathbf{H}) \text{ если } d = 2,$$

$$\mathbf{v}_n \in C_{\text{weak}}([0, T]; \mathbf{H}) \text{ если } d = 3;$$

(ii) для всевозможных пробных вектор-функций  $\mathbf{w} \in L^{4/(4-d)}(0, T; \mathbf{V})$  выполняется интегральное равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t \mathbf{v}_n(\cdot, t), \mathbf{w}(\cdot, t) \rangle_{\mathbf{V}^{-1}, \mathbf{V}} dt \\ & + \int_{Q_T} (\operatorname{div}_x(\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{w} + \mu \nabla_x \mathbf{v}_n : \nabla_x \mathbf{w}) dx dt = \\ & = \int_0^T \varphi_n(t) \int_{\Omega} (\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbb{B}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{w} dx dt \\ & + \int_0^T \langle \mathbf{f}(\cdot, t), \mathbf{w}(\cdot, t) \rangle_{\mathbf{V}^{-1}, \mathbf{V}} dt; \end{aligned}$$

(iii) в случае  $d = 2$  начальное условие (1с) выполняется в смысле сильного следа в  $\mathbf{H}$ , т.е.

$$\|\mathbf{v}_n(\cdot, t) - \mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0;$$

в случае  $d = 3$  начальное условие (1с) выполняется в смысле слабого следа в  $\mathbf{H}$ , т.е.

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H};$$

(iv) для всех  $t \in (0, T]$  выполняется интегральное неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_n(\cdot, t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \mu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_n|^2 d\mathbf{x} dt' \\ & \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \varphi_n(t') \int_{\Omega} (\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbb{B}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{v}_n d\mathbf{x} dt' \\ & \quad + \int_0^t \langle \mathbf{f}(\cdot, t'), \mathbf{v}_n(\cdot, t') \rangle_{\mathbf{V}^{-1}, \mathbf{V}} dt'. \end{aligned}$$

## Равномерные оценки по $n$

Дополнительно, конструируем следующее множество равномерных по  $n$  оценок для семейства слабых решений Лерэ–Хопфа.

### Предложение 2.

Семейство  $\{\mathbf{v}_n\}_{n=1,2,\dots}$  слабых решений Лерэ–Хопфа задачи (1) удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_n\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H})} + \|\mathbf{v}_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})} &\leq C_0, \\ \|\partial_t \mathbf{v}_n\|_{L^1(0,T;\mathbf{V}^{-3})} &\leq C_0,\end{aligned}$$

в которых положительная постоянная  $C_0$  не зависит от  $n$ .

## 2. Основные результаты

Главные результаты работы формулируются в виде теоремы:

### Теорема 1. (Предельный переход при $n \rightarrow +\infty$ .)

Пусть выполняются условия (2)–(4), и  $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq n_0}$  — это семейство слабых решений Лерэ–Хопфа задачи (1). Тогда справедливы следующие утверждения.

#### 1. (Относит. компактность семейства $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .)

Существуют подпоследовательность из  $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq n_0}$ , по-прежнему обозначаемая индексом  $n$ , и предельная вектор-функция  $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H})$ , такие, что

$$\mathbf{v}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{v} \text{ сильно в } L^2(0, T; \mathbf{H}), \text{ слабо в } L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ \text{слабо}^* \text{ в } L^\infty(0, T; \mathbf{H}).$$

Иными словами, семейство  $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq n_0}$  относительно компактно в  $L^2(0, T; \mathbf{H})$ , относительно слабо компактно в  $L^2(0, T; \mathbf{V})$  и относительно слабо\* компактно в  $L^\infty(0, T; \mathbf{H})$ .

## 2. (Относительная компактность семейства ремасштабированных решений.)

Семейство ремасштабированных решений  $\bar{\mathbf{v}}_n: \Omega \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^d$ , определенных формулой

$$\bar{\mathbf{v}}_n(\mathbf{x}, \vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_n\left(\mathbf{x}, \frac{\vartheta}{n}\right), \quad \vartheta \in [0, 1],$$

относительно слабо\* компактно в  $L^\infty(0, 1; \mathbf{H})$ , т.е. существует подпоследовательность из  $\{\bar{\mathbf{v}}_n\}_{n \geq n_0}$ , по-прежнему обозначаемая индексом  $n$ , и предельная вектор-функция  $\bar{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, 1; \mathbf{H})$ , такие, что

$$\bar{\mathbf{v}}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \bar{\mathbf{v}} \quad \text{слабо* в } L^\infty(0, 1; \mathbf{H}).$$

### Примечание.

Как видно, ремасштабирование происходит на интервале времени  $\{0 \leq t \leq 1/n\}$ , то есть на носителе функции  $\varphi_n = \varphi_n(t)$ .

### 3. (Предельная модель.)

3а. Предельная вектор-функция  $\bar{\mathbf{v}}$  служит сильным решением задачи

$$\partial_{\vartheta} \bar{\mathbf{v}} = \Phi(\vartheta) (\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbb{B}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{v}}) - \nabla_{\mathbf{x}} \bar{p}_* \quad \text{в } \Omega \times (0, 1), \quad (6a)$$

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, 1), \quad (6b)$$

$$\bar{\mathbf{v}}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6c)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, 1). \quad (6d)$$

3б. Предельная вектор-функция  $\mathbf{v}$  служит слабым решением задачи

$$\partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{x}} p_* + \mathbf{f} \quad \text{в } Q_T, \quad (7a)$$

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad (7b)$$

$$\mathbf{v}(\cdot, 0+) = \bar{\mathbf{v}}(\cdot, 1) \quad \text{в } \Omega, \quad (7c)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T). \quad (7d)$$

В (7с) начальная вектор-функция  $\mathbf{v}(\cdot, 0+)$  однозначно определяется решением задачи (6) в момент времени  $\vartheta = 1$ .

### *Замечание 1.*

Определения сильного решения задачи (6) и слабого решения задачи (7) вводятся стандартным образом.

Сильное решение задачи (6) является единственным при  $d \in \{2, 3\}$ .

Слабое решение задачи (7) является единственным при  $d = 2$ .

### *Замечание 2.*

Уравнения (6a) и (6b) назовем *уравнениями начального инфинитезимального слоя*.

Независимую переменную  $\vartheta$  можно назвать переменной *быстрого времени*, а пару  $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{p}_*)$  можно назвать *решением микроскопического начального слоя*.

Переменная  $t$  является переменной *медленного времени* и пара  $(\mathbf{v}, p_*)$  является *макроскопическим внешним решением*.

Вектор-функция  $\bar{\mathbf{v}}(\cdot, 1)$  может считаться *скорректированным начальным полем скоростей*.

### 3. Апскейлинг: два примера

Уравнение

$$\partial_{\vartheta} \bar{\mathbf{v}} = \Phi(\vartheta)(\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbb{B}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{v}}) - \nabla_{\mathbf{x}} \bar{p}_* \quad \text{в } \Omega \times (0, 1) \quad (6a)$$

имеет достаточно простой вид и потому может быть легко проинтегрировано явно для сравнительно простых матриц  $\mathbb{B}$ , что приводит к явным формулам скорректированного начального поля скоростей  $\bar{\mathbf{v}}(\cdot, 1)$ .

Обсудим два результата в этом направлении в двумерном случае и сделаем пару интересных заключений.

*Предположение.* Для простоты и ясности представления решений, дополнительно положим, что

$$\Omega \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: x_1 > 0, x_2 > 0\} \quad (8)$$

и что заданное начальное поле скоростей  $\mathbf{v}_0$  принадлежит  $\mathbf{V}$  и продолжено за пределы  $\Omega$  нулем.

$$\partial_{\vartheta} \bar{\mathbf{v}} = \Phi(\vartheta)(\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbb{B}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{v}}) - \nabla_{\mathbf{x}} \bar{p}_* \quad \text{в } \Omega \times (0, 1) \quad (6a)$$

Во-первых, предположим, что

$$\mathbf{b} = 0, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a \cos \phi & a \sin \phi \\ -a \sin \phi & a \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где значения  $a \in \mathbb{R}$  и  $\phi \in [0, 2\pi)$  постоянны и заданы.

Обозначим

$$\Psi(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ a \cos \phi \int_0^{\vartheta} \Phi(\vartheta') d\vartheta' \right\}.$$

С этими данными и введенными обозначениями, единственное сильное решение задачи (6) имеет вид

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \vartheta) = \Psi(\vartheta) \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, \vartheta) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]. \quad (10)$$

### Замечание 3.

Ассоциированная функция давления определяется по формуле

$$\bar{p}_*(\mathbf{x}, \vartheta) = (a \sin \phi) \Phi(\vartheta) \Psi(\vartheta) \int_0^{x_1} v_{02}(x'_1, x_2) dx'_1 + \text{const}, \quad (11)$$
$$(\mathbf{x}, \vartheta) \in \bar{\Omega} \times [0, 1].$$

Справедливость представлений (10) и (11) для решений проверяется их непосредственной подстановкой в уравнения (6a), (6b) и последующей калькуляцией с учетом условия  $\text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_0 = 0$ .

В силу (5) и (10) имеем

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, 1) = e^{a \cos \phi} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, 1) = e^{a \cos \phi} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega \quad (12)$$

Теперь можем сформулировать простой результат, который сразу следует из теоремы 1, формулы (12) и известной теории корректности для классической системы уравнений Навье–Стокса.

## Теорема 2.

Пусть  $d = 2$  и выполнены условия (2)–(4), (8), (9) и  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}$ . Тогда предельная функция  $\mathbf{v} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_n$  является единственным слабым решением начально-краевой задачи для системы уравнений Навье–Стокса (7a), (7b), снабженной условием прилипания (7d) и скорректированным начальным условием

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0+) = e^{a \cos \phi} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (13)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_n + \operatorname{div}_x(\mathbf{v}_n \otimes \mathbf{v}_n) = \mu \Delta_x \mathbf{v}_n + \varphi_n(t) \mathbb{B} \mathbf{v}_n - \nabla_x p_{*n} + \mathbf{f} \quad (1a)^*$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0+) = e^{a \cos \phi} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega \quad (13)$$

#### Замечание 4.

Если в (1a)\* формально заменить пару  $(\mathbf{v}_n, p_{*n})$  парой  $(\mathbf{v}, p_*)$  и импульсное слагаемое выражением  $\delta_{(t=0)} \mathbb{B}(\mathbf{x}) \mathbf{v}$ , то из (1a), (1c) вытекает «скорректированное» начальное условие

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0+) = (1 + a \cos \phi) \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \quad (14)$$

Заметим, что это условие не совпадает с условием (13) за исключением случаев, когда  $a = 0$  или  $\phi = \pi/2$ , или  $\phi = 3\pi/2$ .

Таким образом, в общем случае условие (14) не является верной аппроксимацией для начальной скорости при больших  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\partial_{\vartheta} \bar{\mathbf{v}} = \Phi(\vartheta)(\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbb{B}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{v}}) - \nabla_{\mathbf{x}} \bar{p}_* \quad \text{в } \Omega \times (0, 1) \quad (6a)$$

Во-вторых, предположим, что

$$\mathbf{b} \text{ удовлетворяет условиям (4), } \mathbb{B} = 0,$$

и  $\Phi$  и  $\mathbf{v}_0$  удовлетворяют соответственно условиям (5) и (3).

В силу разложения Вейля имеем

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\text{sol}} + \nabla_{\mathbf{x}} \bar{\pi}_*, \quad \mathbf{b}_{\text{sol}} = \mathcal{P}_{\text{sol}}(\mathbf{b}) \in \mathbf{H}, \quad \bar{\pi}_* \in W^{1,2}(\Omega),$$

где  $\mathcal{P}_{\text{sol}}$  — это оператор проектирования на подпространство финитных соленоидальных вектор-функций, заданных в  $\Omega$ , и  $\mathbf{b}_{\text{sol}}$  и  $\bar{\pi}_*$  предполагаются заданными (единственным образом), поскольку  $\mathbf{b}$  задано.

$$\partial_{\vartheta} \bar{\mathbf{v}} = \Phi(\vartheta) \mathbf{b}(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \bar{p}_* \quad \text{в } \Omega \times (0, 1) \quad (6a)**$$

С этими данными, единственное сильное решение задачи (6) имеет вид

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \vartheta) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_{\text{sol}}(\mathbf{x}) \int_0^{\vartheta} \Phi(\vartheta') d\vartheta', \quad (\mathbf{x}, \vartheta) \in \bar{\Omega} \times [0, 1], \quad (15)$$

и ассоциированная функция давления определяется по формуле

$$\bar{p}_*(\mathbf{x}, \vartheta) = \Phi(\vartheta) \bar{\pi}_*(\mathbf{x}) + \text{const}, \quad (\mathbf{x}, \vartheta) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]. \quad (16)$$

Справедливость представлений (15) и (16) для решений проверяется их непосредственной подстановкой в уравнения (6a)\*\* , (6b) и последующей калькуляцией.

$$\partial_{\vartheta} \bar{\mathbf{v}} = \Phi(\vartheta) \mathbf{b}(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \bar{p}_* \quad \text{в } \Omega \times (0, 1) \quad (6a)**$$

В силу (5) и (15) имеем

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_{\text{sol}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \mathcal{P}_{\text{sol}}(\mathbf{b})(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (17)$$

Теперь можем сформулировать простой результат, который следует из теоремы 1 и формулы (17):

### Теорема 3.

Пусть  $d = 2$  и выполнены условия (2)–(4) и  $\mathbb{B} = 0$ . Тогда предельная функция  $\mathbf{v} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_n$  является единственным слабым решением начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса (7a), (7b), снабженных условием прилипания (7d) и «скорректированным» начальным условием

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0+) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \mathcal{P}_{\text{sol}}(\mathbf{b})(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (18)$$

$$\partial_{\vartheta} \bar{\mathbf{v}} = \Phi(\vartheta) \mathbf{b}(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} \bar{p}_* \quad \text{в } \Omega \times (0, 1) \quad (6a)^{**}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0+) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \mathcal{P}_{\text{sol}}(\mathbf{b})(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in \Omega \quad (18)$$

### Замечание 5.

Если в (1a)\*\* формально заменить пару  $(\mathbf{v}_n, p_{*n})$  парой  $(\mathbf{v}, p_*)$  и импульсное слагаемое выражением  $\delta_{(t=0)} \mathbf{b}(\mathbf{x})$ , то из (1a), (1c) вытекает в точности «скорректированное» начальное условие (18).

Таким образом, результат теоремы 3 хорошо согласуется с классическими формулировками задач о действии внешних мгновенных сил на гидродинамические потоки, см. в монографиях Дж. Бэтчелора (1967), Н.Е. Кочина, И.А. Кибеля, Н.В. Розе (1963), Г. Ламба (1932), Дж. Сэффмэна (1992).

## Смежные исследования

Аналогичные по целям исследования были проведены также для вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта:

- **С. Н. Антонцев, И. В. Кузнецов, С. А. Саженов,** Импульсные уравнения Кельвина–Фойгта динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости, *Прикладная механика и техническая физика*, 2024, **65**(5), 28–42.
- **S. N. Antontsev, I. V. Kuznetsov, D. A. Prokudin, and S. A. Sazhenkov,** The impulsive Kelvin–Voigt equations for two-component mixtures of viscoelastic fluids, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2025, **22**(1), 563–586.
- **С. Н. Антонцев, И. В. Кузнецов,** Уравнения Кельвина–Фойгта с плотностью, имеющей скачкообразный профиль, *Прикладная механика и техническая физика*, 2025, **66**(1), 104–116.