Коротковолновые асимптотики линеаризованной системы уравнений мелкой воды со скачкообразно меняющимися коэффициентами

А.И. Шафаревич, МГУ им. М.В. Ломоносова (совместная работа с А.И. Аллилуевой)

4 марта 2026 г.

Outline

Линеаризованная система уравнений мелкой воды:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + (\mathrm{V}, \nabla)\mathrm{u} + (\mathrm{u}, \nabla)\mathrm{V} + \nabla\eta = 0,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{t}} + (\mathrm{V}, \nabla)\eta + \eta(\nabla, \mathrm{V}) + (\mathrm{u}, \nabla)(\mathrm{h} + \mathrm{D}) + (\mathrm{h} + \mathrm{D})(\nabla, \mathrm{u}) = 0.$$

Здесь $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2$ — горизонтальные координаты $\mathrm{t} > 0$ — время, искомые двумерное векторное поле $\mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ и скалярная функция $\eta(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ — возмущения внешнего потока $\mathrm{V}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ и превышения свободной поверхности $\mathrm{h}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ соответственно, скалярная функция $\mathrm{D}(\mathrm{x})$ — профиль дна бассейна (функции $\mathrm{V}, \mathrm{h}, \mathrm{D}$ считаются заданными).

Коротковолновые начальные условия:

$$\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} u^0 \\ \eta^0 \end{pmatrix} e^{i\frac{S_0}{\varepsilon}},$$

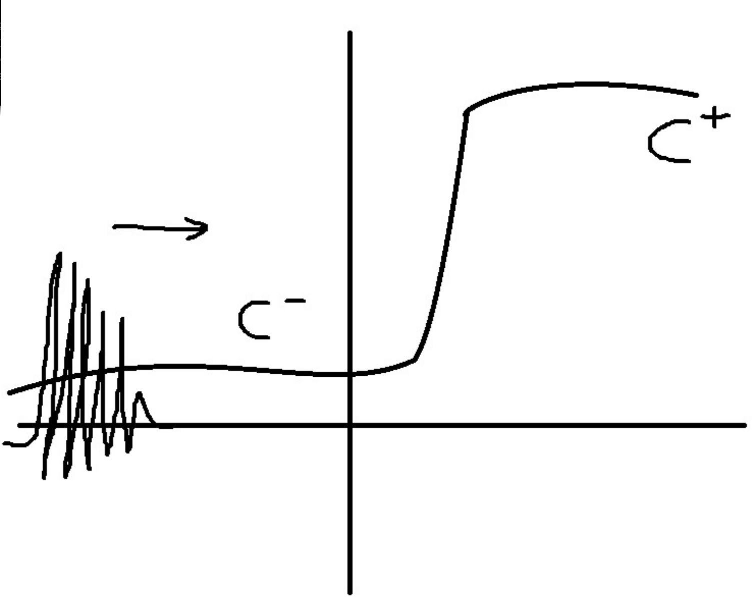
где $u^0(x), \eta^0(x), S_0(x)$ — гладкие функции, носитель u^0, η^0 компактен, $\varepsilon \to 0$ — малый параметр. Будем считать, что на носителе u^0, η^0 $\nabla S_0 \neq 0$.

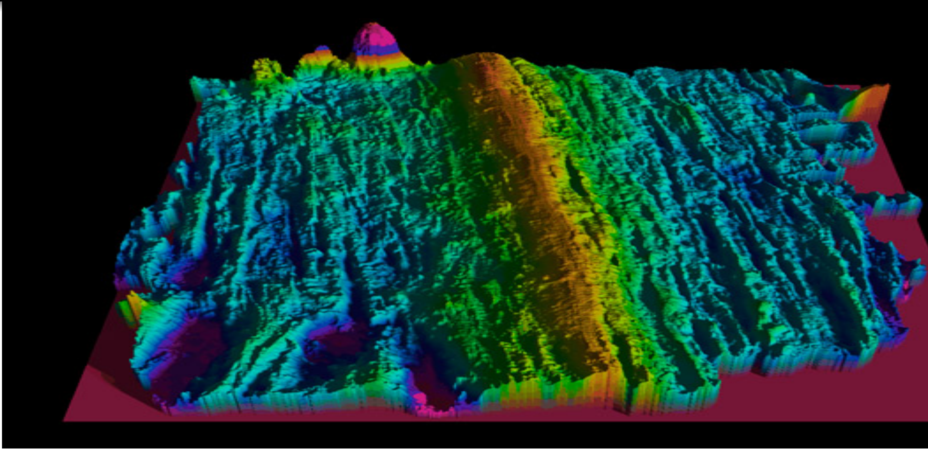
Пусть внешний поток V и функции h, D испытывают резкий скачок вблизи заданной кривой на плоскости переменных x. Точнее: будем считать, что $V = V(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x, t)$, $h = h(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x, t)$, $D = D(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x)$, причем $\Phi(x)$, $V(y, x, t), h(y, x, t), D(y, x)$ бесконечно дифференцируемы, ограничены вместе со всеми производными и

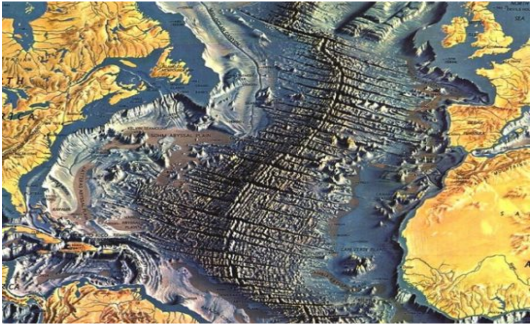
$$V(y, x, t) = V_{\pm}(x, t), \quad h(y, x, t) = h_{\pm}(x, t), \quad D(y, x) = D_{\pm}(x)$$

вне отрезка $[y_-, y_+]$. Здесь и далее через y обозначена "быстрая" переменная $y = \frac{\Phi(x)}{\varepsilon}$; индекс "$-$" обозначает значение соответствующей функции слева от y_-, индекс "$+$" — справа от y_+.

При $\varepsilon \to 0$ функции $\mathrm{V}, \mathrm{h}, \mathrm{D}$ стремятся (в слабом смысле) к разрывным функциям; точки разрыва задаются уравнением $\Phi(\mathrm{x}) = 0$. Будем считать, что это уравнение задает гладкую регулярную кривую M, разделяющую плоскость переменных x на две части ($\Phi > 0$ и $\Phi < 0$); без ограничения общности можно в качестве Φ взять функцию, в некоторой окрестности M равную расстоянию до этой кривой со знаком, причем $|\nabla\Phi| = 1$. Кроме того, будем считать, что носитель начального условия не пересекается с M и целиком лежит в области $\Phi < 0$.


C^-
C^+





Пусть $\mathrm{V}, \mathrm{h}, \mathrm{D}$ не зависят от “быстрой” переменной y (скачков нет).

$$\mathrm{u} = \sum_{\mathrm{j}=-1}^{1} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\mathrm{S}^{\mathrm{j}}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\varepsilon}}(\varphi_0^{\mathrm{j}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \varepsilon\varphi_1^{\mathrm{j}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \dots),$$

$$\eta = \sum_{\mathrm{j}=-1}^{1} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\mathrm{S}^{\mathrm{j}}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\varepsilon}}(\psi_0^{\mathrm{j}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \varepsilon\psi_1^{\mathrm{j}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \dots),$$

где индекс j нумерует моды.

В старшем приближении получаем систему трех линейных однородных уравнений относительно φ_0, ψ_0:

$$\mathrm{i}(\mathrm{p}_0 + (\mathrm{V}, \mathrm{p}))\varphi_0 + \mathrm{i}\mathrm{p}\psi_0 = 0,$$
$$\mathrm{i}(\mathrm{p}_0 + (\mathrm{V}, \mathrm{p}))\psi_0 + \mathrm{i}(\mathrm{h} + \mathrm{D})(\mathrm{p}, \varphi_0) = 0.$$

Здесь $\mathrm{p}_0 = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{t}}$, $\mathrm{p} = \nabla \mathrm{S}$. Условие разрешимости этой системы — характеристическое уравнение

$$(\mathrm{p}_0 + (\mathrm{V}, \mathrm{p})((\mathrm{p}_0 + (\mathrm{V}, \mathrm{p}))^2 - \mathrm{c}^2|\mathrm{p}|^2) = 0,$$

где $\mathrm{c} = \sqrt{(\mathrm{h} + \mathrm{D})}$; из него вытекают уравнения на фазы

$$\frac{\partial \mathrm{S}^0}{\partial \mathrm{t}} + (\mathrm{V}, \nabla \mathrm{S}^0) = 0 \quad \frac{\partial \mathrm{S}^{\mathrm{j}}}{\partial \mathrm{t}} + (\mathrm{V}, \nabla \mathrm{S}^{\mathrm{j}}) + \mathrm{j}\mathrm{c}(\mathrm{x}, \mathrm{t})|\nabla \mathrm{S}^{\mathrm{j}}| = 0, \quad \mathrm{j} = \pm 1.$$

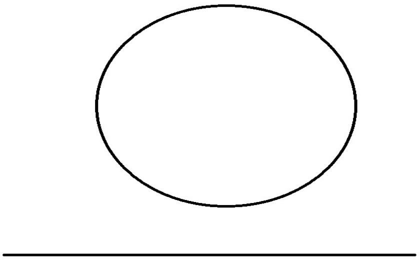


Рис.: Кривые Петровского

Фаза S^0 отвечает вихревой (или медленной) моде, $S^{\pm 1}$ — волновым (или быстрым) модам. Начальное условие для каждого из уравнений имеет вид

$$S^j|_{t=0} = S_0(x),$$

откуда (если нет фокальных точек) находятся фазы $S^j(x, t)$.

Для функций φ_0, ψ_0, соответствующих каждой моде, получаем

$$\varphi_0^0 = \sigma_0^0(x,t) m^0, \quad \psi_0^0 = 0, \quad \varphi_0^j = \sigma_0^j(x,t)\frac{p^j}{|p^j|}, \quad \psi_0^j = jc\sigma_0^j(x,t),$$

где $\quad m^j = \frac{1}{|p^j|}\begin{pmatrix} -p_2^j \\ p_1^j, \end{pmatrix}$ и σ_0^j — скалярные функции. Эти функции находятся из следующего приближения:

$$\frac{\partial \sigma_0^0}{\partial t} + (V, \nabla)\sigma_0^0 + (m, \frac{\partial V}{\partial x} m)\sigma_0^0 = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_0^j}{\partial t} + (V, \nabla)\sigma_0^j + jc(\frac{p}{|p|}, \nabla)\sigma_0^j +$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma_0^j(\frac{1}{|p|^2}(p, \frac{\partial V}{\partial x} p) +$$
$$3jc(\frac{p}{|p|}, \nabla)c + \frac{1}{c}(V, \nabla)c + jc(\nabla, \frac{p}{|p|}) + (\nabla, V)) = 0.$$

Начальные условия

$$\sigma_0^0|_{t=0} = (\varphi^0, m|_{t=0}), \quad \sigma_0^j|_{t=0} = \frac{1}{2}((\varphi^0, \frac{p}{|p|}|_{t=0}) + j\frac{\eta^0}{c}), \quad p|_{t=0} = \nabla S_0.$$

Трем модам соответствуют функции Гамильтона $H^0(x, p_0, p) = p_0 + (V, p)$, $H^j(x, p_0, p) = p_0 + (V, p) + jc|p|$, $j = \pm 1$; обозначим через $X^j(\alpha, t), P^j(\alpha, t)$ решения гамильтоновых систем

$$\dot{x} = \frac{\partial H^j}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H^j}{\partial x}, \quad x(0) = \alpha, \quad p(0) = \nabla S_0(\alpha).$$

Тогда

$$S^j = S_0(\alpha)$$

$$\sigma_0^0 = (\mathrm{u}^0(\alpha), \mathrm{m}^0(\alpha, 0)) \frac{|\mathrm{P}^0(\alpha, 0)|}{|\mathrm{P}^0(\alpha, \mathrm{t})|} \mathrm{e}^{-\int_0^{\mathrm{t}} ((\nabla, \mathrm{V})(\mathrm{X}^0(\alpha, \mathrm{t}_1), \mathrm{t}_1) \mathrm{dt}_1}$$

$$\sigma_0^{\mathrm{j}} = \sigma_0^{\mathrm{j}}(0) \frac{\sqrt{\mathrm{J}^{\mathrm{j}}(\alpha, 0)\mathrm{c}(\alpha, 0)|\mathrm{P}^{\mathrm{j}}(\alpha, \mathrm{t})|}}{\sqrt{\mathrm{J}^{\mathrm{j}}(\alpha, \mathrm{t})\mathrm{c}(\alpha, \mathrm{t})|\mathrm{P}^{\mathrm{j}}(\alpha, 0)|}}$$

$$\sigma_0^{\mathrm{j}}(0) = \frac{1}{2}((\mathrm{u}^0(\alpha), \frac{\nabla \mathrm{S}_0(\alpha)}{|\nabla \mathrm{S}_0(\alpha)|}) + \mathrm{j}\frac{\eta^0(\alpha)}{\mathrm{c}(\alpha, 0)})$$

Здесь $\mathrm{J}^{\mathrm{j}}(\alpha, \mathrm{t}) = \det \frac{\partial \mathrm{X}^{\mathrm{j}}(\alpha, \mathrm{t})}{\partial \alpha}$ и для функций с индексом j $\alpha = \alpha^{\mathrm{j}}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ — решение уравнения $\mathrm{X}^{\mathrm{j}}(\alpha, \mathrm{t}) = \mathrm{x}$.

Приведенные формулы справедливы при условии отсутствия фокальных точек, т.е. если $\mathrm{J}^{\mathrm{j}} \neq 0$; в частности, это верно при достаточно малых t. Если указанное условие перестает выполняться, коротковолновая асимптотика содержит результат применения канонического оператора Маслова к функциям на соответствующих лагранжевых поверхностях.

Шестимерное фазовой пространство $\mathbb{R}^6_{(t,x,p_0,p)}$; начальные изотропные поверхности $\Lambda_0^j : p = \frac{\partial S_0}{\partial x}$, $H^j = 0$.
Лагранжевы многообразия $\Lambda_j = \cup_s g_j^s \Lambda_0^j$.
Формы объема $\sigma_0 = dx$ на Λ_0^j, $\sigma_j = ds \wedge (g_j^s)^* dx$ on Λ_j.

Theorem

(В.П. Маслов, $\sim$ 1965). Решение задачи Коши разлагается в асимптотический ряд

$$\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} \sim \sum_{j=-1}^{1} K_{\Lambda_j,\sigma_j}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}_{j,k}\Big),$$

$K : C_0^\infty(\Lambda_j) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$ — канонический оператор Маслова, $\varphi_{j,k}$, $\psi_{j,k}$ — гладкие функции на Λ_j, вычисляются интегрированием вдоль траекторий гамильтоновых систем.

Поскольку функции $\mathrm{V}, \mathrm{h}, \mathrm{D}$ представляют собой внешний поток, невозмущенное превышение поверхности и профиль дна соответственно, естественно предположить, что они (хотя бы в старшем порядке по ε) удовлетворяют нелинейной системе

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{t}} + (\mathrm{V}, \nabla)\mathrm{V} + \nabla \mathrm{h} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{t}} + (\nabla, \mathrm{V}(\mathrm{h} + \mathrm{D})) = 0.$$

Два типа сглаженных скачков.
1. Тангенциальный скачок

$$\mathrm{V_n}|_\mathrm{M} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{y}}|_\mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{V}_\tau|_\mathrm{M}, \mathrm{D}|_\mathrm{M} - \text{любые}. \tag{1}$$

2. Нормальный скачок

$$\frac{\partial \mathrm{V}_\tau}{\partial \mathrm{y}}|_\mathrm{M} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\frac{1}{2}\mathrm{V_n^2} + \mathrm{h})|_\mathrm{M} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{V_n}(\mathrm{h}+\mathrm{D}))|_\mathrm{M} = 0. \tag{2}$$

Ниже будем предполагать, что функции $\mathrm{V}, \mathrm{h}, \mathrm{D}$ удовлетворяют либо равенствам (1), либо равенствам (2).

При достаточно малых t (пока ни одна из траекторий $X^j(\alpha, t)$ гамильтоновых систем, в которых гамильтонианы построены по предельным функциям $V_-(x,t), h_-(x,t), D_-(x,t)$, выпущенных из носителя начального поля (u^0, η^0) не достигла кривой M) приведенные выше формулы для асимптотики остаются справедливыми. После того, как траектории начинают пересекать M, появляются прошедшие и отраженные волны, причем каждая падающая мода (вихревая или волновая) может, вообще говоря, порождать разные прошедшие и отраженные моды.

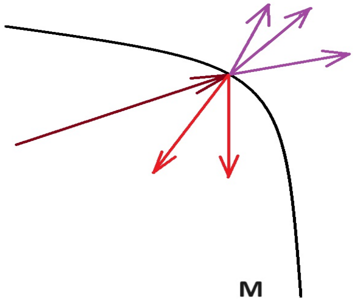


Рис.: Ветвящийся биллиард

Рис.: Total reflection

В шестимерном фазовом пространстве с координатами t, x, p_0, p рассмотрим функции Гамильтона

$$H^0 \pm = p_0 + (V_\pm(t,x), p), \quad H^j_\pm = p_0 + (V_\pm(t,x), p) + jc_\pm(t,x)|p|,$$

и соответствующие динамические системы

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = \frac{\partial H^j_\pm}{\partial p}, \quad \dot{p}_0 = -\frac{\partial H^j_\pm}{\partial t}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H^j_\pm}{\partial x}.$$

Траектории этих систем, соответствующие нижнему индексу “ $-$ ”, и выпущенные из двумерных поверхностей

$$\Lambda^j_0 : \quad t = 0, \quad x = \alpha \in U, \quad p = \nabla S_0(\alpha), \quad H^j_- = 0,$$

образуют трехмерные (лагранжевы) поверхности Λ^j — они описывают динамику каждой из трех мод, порожденных начальным возмущением.

Отражение и прохождение связано со структурой пересечения этих поверхностей с пятимерной поверхностью $\hat{\mathrm{M}}$, заданной одним уравнением $\Phi(\mathrm{x}) = 0$ (поднятием кривой M в фазовое пространство); обозначим эти пересечения через N^{j}. Рассмотрим одну из таких поверхностей; на ней выполнено равенство $\mathrm{H}^{\mathrm{j}}_{-} = 0$. Обозначим через p_τ и p_n касательную и нормальную к M компоненты вектора p. Зафиксировав точку на $\mathrm{P} \in \mathrm{N}^{\mathrm{j}}$ (т.е. значения переменных $(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{p}_0, \mathrm{p}_\tau, \mathrm{p}_\mathrm{n})$ в этой точке), рассмотрим совокупность уравнений на одну переменную ξ — новую нормальную компоненту импульса

$$\mathrm{H}_{+}^{\mathrm{k}}(\mathrm{t}(\mathrm{P}), \mathrm{x}(\mathrm{P}), \mathrm{p}_0(\mathrm{P}), \mathrm{p}_\tau(\mathrm{P}), \xi) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}_{+}^{\mathrm{k}}}{\partial \mathrm{p}_\mathrm{n}}(\mathrm{t}(\mathrm{P}), \mathrm{x}(\mathrm{P}), \mathrm{p}_0(\mathrm{P}), \mathrm{p}_\tau(\mathrm{P}), \xi) > 0,$$

$$\mathrm{H}_{-}^{\mathrm{k}}(\mathrm{t}(\mathrm{P}), \mathrm{x}(\mathrm{P}), \mathrm{p}_0(\mathrm{P}), \mathrm{p}_\tau(\mathrm{P}), \xi) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}_{-}^{\mathrm{k}}}{\partial \mathrm{p}_\mathrm{n}}(\mathrm{t}(\mathrm{P}), \mathrm{x}(\mathrm{P}), \mathrm{p}_0(\mathrm{P}), \mathrm{p}_\tau(\mathrm{P}), \xi) < 0.$$

Наличие проходящих и отражающихся мод связано с существованием корней этих уравнений, удовлетворяющих соответствующим неравенствам; корни уравнений, содержащих $\mathrm{H}_{+}^{\mathrm{k}}$, определяют проходящие моды, а корни уравнений, содержащих $\mathrm{H}_{-}^{\mathrm{k}}$ — отражающиеся.

Пусть $\mathrm{V_n} = 0$. Поскольку траектории системы Гамильтона для вихревой моды содержат уравнения $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{V}_{-}$, они не достигают M и, следовательно, не дают вклада в проходящие и отражающиеся волны; тем самым, в качестве поверхностей Λ^{j}, описывающих падающие волны, нужно выбирать те, которые соответствуют волновым модам ($\mathrm{j} = \mp 1$).

Пусть точка P лежит на поверхности N^{j}.
1. Уравнения отражения имеют допустимые решения (т.е. решения, удовлетворяющие нужным неравенствам), только при $\mathrm{k} = \mathrm{j}$; такое решение единственно и имеет вид $\xi = -\mathrm{p}_{\mathrm{n}}$.

2. Пусть в точке P выполнено неравенство

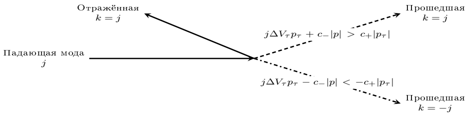
$$|c^{-}|p| + j(V_{\tau}^{-} - V_{\tau}^{+})p_{\tau}| > c^{+}|p_{\tau}|. \tag{3}$$

Тогда уравнения прохождения имеют единственное допустимое решение. При этом, если $c^{-}|p| + j(V_{\tau}^{-} - V_{\tau}^{+})p_{\tau} > c^{+}|p_{\tau}|$, то решение соответствует номеру $k = j$, если же $c^{-}|p| + j(V_{\tau}^{-} - V_{\tau}^{+})p_{\tau} < -c^{+}|p_{\tau}|$, то решение соответствует номеру $k = -j$.
3. Если в точке P

$$|c^{-}|p| + j(V_{\tau}^{-} - V_{\tau}^{+})p_{\tau}| < c^{+}|p_{\tau}|, \tag{4}$$

уравнения прохождения не имеют допустимых решений.

Приведенное утверждение описывает отражение и прохождение волновых мод через тангенциальный скачок. Отражается всегда та же мода, что падает; если при этом выполнено условие (4), то за кривую M не проходит ничего (полное внутреннее отражение). Гамильтониан H^1 описывает прямую волну (нормальные компоненты фазовой и групповой скоростей направлены в одну сторону), а гамильтониан H^{-1} — обратную (эти компоненты направлены в противоположные стороны). Если выполнено условие (3), за кривой M возникает прошедшая волна, причем, если $\mathrm{c}^-|\mathrm{p}| + \mathrm{j}(\mathrm{V}_\tau^- - \mathrm{V}_\tau^+)\mathrm{p}_\tau > \mathrm{c}^+|\mathrm{p}_\tau|$, то при прохождении через M прямая волна остается прямой, а обратная — обратной; если же $\mathrm{c}^-|\mathrm{p}| + \mathrm{j}(\mathrm{V}_\tau^- - \mathrm{V}_\tau^+)\mathrm{p}_\tau < -\mathrm{c}^+|\mathrm{p}_\tau|$, то прямая и обратная волны при прохождении меняются местами.



$$\Delta V_\tau = V_\tau^- - V_\tau^+, \quad |p| = \sqrt{p_n^2 + p_\tau^2}$$

Пусть $\frac{\partial \mathrm{V}_\tau}{\partial \mathrm{y}}|_{\mathrm{M}} = 0$. Напомним, что в этом случае $\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{V}_{\mathrm{n}}\mathrm{c}^2)|_{\mathrm{M}} = 0$; в частности, на кривой M $\mathrm{V}_{\mathrm{n}}^{+}$ и $\mathrm{V}_{\mathrm{n}}^{-}$ одного знака (мы считаем далее, что эти функции не обращаются в ноль). Теперь вклад в прошедшие отраженные волны могут давать все три моды; рассмотрим эти вклады по отдельности.

Пусть точка P лежит на поверхности N^0 (эта поверхность соответствует вихревой моде, траектории которой достигли кривой M); отметим, что в этой точке $\mathrm{V}_\mathrm{n}^- > 0$.
1. Уравнение отражения при $\mathrm{k} = 0$ не имеет допустимых решений (т.е. решений, удовлетворяющих нужным неравенствам).
2. Уравнение отражения при $\mathrm{k} = \pm 1$ имеют допустимые решения тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$\mu_- < 1, \quad |\mu_- \mathrm{p_n}| > |\mathrm{p}_\tau| \sqrt{1 - \mu_-^2}, \quad \mu_- = \frac{\mathrm{V}_\mathrm{n}^-}{\mathrm{c}_-}. \qquad (5)$$

Решение, если оно есть, единственно, причем, если $\mu_- \mathrm{p_n} > |\mathrm{p}_\tau| \sqrt{1 - \mu_-^2}$, оно соответствует номеру $\mathrm{k} = 1$, а если $\mu_- \mathrm{p_n} < -|\mathrm{p}_\tau| \sqrt{1 - \mu_-^2}$ — номеру $\mathrm{k} = -1$.

3. Уравнение прохождения при $\mathrm{k} = 0$ имеет единственное допустимое решение.
4. Уравнения прохождения при $\mathrm{k} = \pm 1$ имеют допустимые решения тогда и только тогда, когда реализуется одна из двух ситуаций:
a).

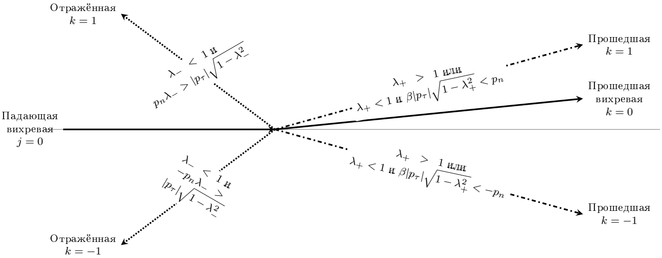
$$\mu_+ > 1, \quad \mu_+ = \frac{\mathrm{V}_\mathrm{n}^+}{\mathrm{c}_+}. \tag{6}$$

В этом случае каждое из уравнений (при $\mathrm{k} = 1$ и при $\mathrm{k} = -1$) имеет по одному допустимому решению.

b).

$$\mu_+ < 1, \quad |\frac{V_n^-}{c_+}p_n| > |p_\tau|\sqrt{1-\mu_+^2}. \tag{7}$$

В этом случае допустимое решение единственно, причем, если $\frac{V_n^-}{c_+}p_n > |p+\tau|\sqrt{1-\mu_-^2}$, оно соответствует номеру $k=1$, а если $\frac{V_n^-}{c_+}p_n < -|p+\tau|\sqrt{1-\mu_-^2}$ — номеру $k=-1$. Приведенное утверждение описывает отражение и прохождение при падении вихревой моды на нормальный скачок. Отражаться может не более одной моды, причем она всегда волновая; проходить может от одной до трех мод, причем вихревая всегда проходит.



$$\lambda_\pm = \frac{V_n^\pm}{c_\pm}, \quad V_n^\pm > 0, \quad |p| = \sqrt{p_n^2 + p_\tau^2}, \quad \beta = \frac{c_+}{V_n^-}$$

На M: $V_\tau^+ = V_\tau^-$, $\frac{\partial V_\tau}{\partial y} = 0$

Пусть точка P лежит на поверхности N^{j}, $\mathrm{j} = \pm 1$ (эта поверхность соответствует волновой моде, траектории которой достигли кривой M); отметим, что в этой точке $\mathrm{V}_{\mathrm{n}}^{-} + \mathrm{j}\frac{\mathrm{c}_{-}\mathrm{p}_{\mathrm{n}}}{|\mathrm{p}|} > 0$.
1. Уравнение отражения при $\mathrm{k} = 0$ имеет допустимое решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{V}_{\mathrm{n}} < 0$; в этом случае решение единственно. 2. Уравнение отражения при $\mathrm{k} = \mathrm{j}$ имеет допустимое решение тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$|\mu_{-}| < 1, \quad \frac{\mathrm{p}_{\mathrm{n}}}{|\mathrm{p}|} + \mathrm{j}\frac{\mathrm{V}_{\mathrm{n}}^{-}}{\mathrm{c}_{-}} \neq 0. \tag{8}$$

Это решение, если оно есть, единственно.
3. Уравнение отражения при $\mathrm{k} = -\mathrm{j}$ не имеет допустимых решений.

4. Уравнение прохождения при $\mathrm{k} = 0$ имеет допустимое решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{V_n} > 0$; в этом случае решение единственно. 5. Уравнения прохождения при $\mathrm{k} = \pm 1$ имеют допустимые решения тогда и только тогда, когда реализуется одна из двух ситуаций:
а).

$$\mu_+ > 1, \quad \mu_+ = \frac{\mathrm{V_n^+}}{\mathrm{c_+}}. \tag{9}$$

В этом случае каждое из уравнений (при $\mathrm{k} = 1$ и при $\mathrm{k} = -1$) имеет по одному допустимому решению.

b).

$$|\mu_+| < 1, \quad |\frac{V_n^-}{c_+} p_n + j\frac{c_-}{c_+}| > |p_\tau|\sqrt{1-\mu_+^2}. \qquad (10)$$

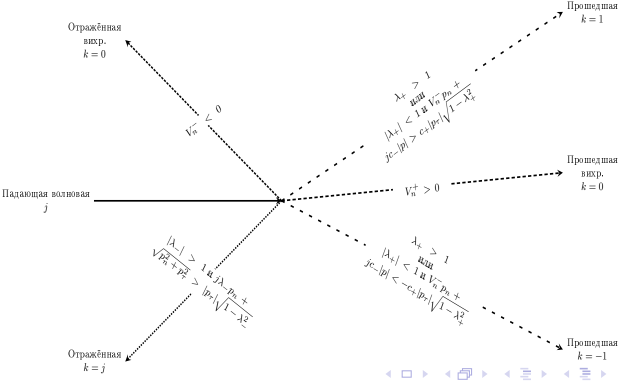
В этом случае допустимое решение единственно, причем, если $\frac{V_n^-}{c_+} p_n + j\frac{c_-}{c_+} > |p+\tau|\sqrt{1-\mu_-^2}$, оно соответствует номеру $k=1$, а если $\frac{V_n^-}{c_+} p_n + j\frac{c_-}{c_+} < -|p+\tau|\sqrt{1-\mu_-^2}$ — номеру $k=-1$.

Приведенное утверждение описывает отражение и прохождение при падении волновой моды на нормальный скачок. Отражаться может одна либо две моды, причем волновая (если она отражается) совпадает с падающей. Проходить может от одной до трех мод, причем вихревая мода обязательно либо отражается, либо проходит, тогда как волновые могут и проходить, и отражаться, а также исчезать (т.е. не проходить и не отражаться вовсе). Последняя ситуация реализуется, если выполнены условия

$$\frac{\mathrm{V_n^-}}{\mathrm{c_-}} > 1, \quad \frac{\mathrm{V_n^+}}{\mathrm{c_+}} < 1, \quad \frac{\mathrm{V_n^-}}{\mathrm{c_-}} + \frac{\mathrm{p_n}}{|\mathrm{p}|} > 0, \quad |\frac{\mathrm{V_n^-}}{\mathrm{c_+}}\mathrm{p_n} + \mathrm{j}\frac{\mathrm{c_-}}{\mathrm{c_+}}|\mathrm{p}|| < |\mathrm{p}_\tau|\sqrt{1-\mu_+^2}.$$

В этом случае не отражается ничего, а проходит только вихревая мода; отметим, что это возможно, в частности, если $V_n^- >> c_-$ и $c_+ >> c_-$. Максимальное количество мод, возникающих при рассеянии, в этом случае равно четырем — три прошедшие и одна отраженная. Такая ситуация реализуется при следующих условиях:

$$\frac{V_n^+}{c_+} > 1, \quad \frac{V_n^-}{c_-} < 1, \quad \frac{p_n}{|p|} + \operatorname{sgn} j \frac{V_n^-}{c_-} \neq 0.$$



Отражённая вихр. $k = 0$
$V_n^- < 0$
Прошедшая $k = 1$
$\lambda_+ > 1$ или $|\lambda_+| < 1$ и $V_n^- p_n + jc_-|p| > c_+|p_\tau|\sqrt{1-\lambda_+^2}$
Падающая волновая j
$V_n^+ > 0$
Прошедшая вихр. $k = 0$
$|\lambda_-| > 1$ и $j\lambda_- p_n + \sqrt{p_n^2 + p_\tau^2} > |p_\tau|\sqrt{1-\lambda_-^2}$
$\lambda_+ > 1$ или $|\lambda_+| < 1$ и $V_n^- p_n + jc_-|p| < -c_+|p_\tau|\sqrt{1-\lambda_+^2}$
Отражённая $k = j$
Прошедшая $k = -1$

Для определения амплитуд проходящих и отраженных волн, рассмотрим в точках поверхности N вспомогательную систему уравнений относительно двумерного вектора w и скалярной функции β

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega \mathrm{w_n} + \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{V_n w_n}) + \dfrac{\partial \beta}{\partial \mathrm{y}} = 0, \\ \mathrm{i}\omega \mathrm{w}_\tau + \mathrm{V_n}\dfrac{\partial \mathrm{w}_\tau}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{w_n}\dfrac{\partial \mathrm{V}_\tau}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{ip}_\tau \beta = 0, \\ \mathrm{i}\omega\beta + \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{V_n}\beta + \mathrm{c}^2\mathrm{w_n}) + \mathrm{ic}^2\mathrm{p}_\tau \mathrm{w}_\tau = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Вне отрезка $[\mathrm{y}_-, \mathrm{y}_+]$ эта коэффициенты этой системы постоянны; амплитуды проходящих и отраженных волн определяются соответствующей задачей рассеяния, т.е. коэффициентами отражения и прохождения.

Пусть $V_n = 0$ и точка P лежит на поверхности N^j (т.е. на M падает соответствующая волновая мода); в этом случае второе из уравнений (11) перестает быть дифференциальным; выражая w_n, w_τ через β, получаем уравнение

$$\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c^2}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\beta + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - p_\tau^2\right)\beta = 0$$

Задача рассеяния для этого уравнения формулируется стандартным образом: существует единственное решение β, удовлетворяющее условиям

$$\beta = e^{ip_n y} + re^{-ip_n y}, \quad y < y_-, \quad \beta = \tau e^{i\xi y}, \quad y > y_+,$$

где $\xi^2 = \frac{1}{c_+^2}[c^-|p| + j(V_\tau^- - V_\tau^+)p_\tau]^2 - p_\tau^2$. Коэффициенты r, τ определяют амплитуды отраженной и прошедшей волн.

Пусть падает m-я мода и нет фокальных точек.

$$\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} = \sum_{j=0,\pm1,j\neq m} e^{\frac{iS^j}{\varepsilon}} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k^j(x,t) +$$

$$+ e^{\frac{iS^m}{\varepsilon}} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k^m\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x, t\right) +$$

$$\sum_q e^{\frac{iS^{-,q}}{\varepsilon}} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k^{-,q}\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x, t\right) +$$

$$\sum_q e^{\frac{iS^{+,q}}{\varepsilon}} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k^{+,q}\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}, x, t\right).$$

1. Фазы $S^{\pm,q}$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона-Якоби и краевым условиям на кривой M, определяемым решениями ξ уравнений прохождения и отражения.
2. $f_k^{\pm,q} \to \phi_k^{\pm,q}$ при $y \to \pm\infty$, $f_k^{\pm,q} \to 0$ при $y \to \mp\infty$.
3. Функции $\phi^{\pm,q}$ удовлетворяют уравнениям переноса с начальными условиями на M, определяемыми коэффициентами отражения и прохождения эталонных уравнений.
4. Функции $f^{\pm,q}$ склеиваются из $\phi^{\pm,q}$ и решений эталонных уравнений.

Общая теорема. Отраженные и прошедшие лагранжевы многообразия.
Отображения $Q_k^{\pm} : \hat{M} \to \hat{M}$:
$Q_k^{\pm}(t, x, p_0, p_\tau, p_n) = (t, x, p_0, p_\tau, \xi_k(t, x, p))$, ξ_k — допустимые корни.
$N_k^{\pm} = Q_k^{\pm}(N)$. Сдвигаем $N_k^{\pm}$ вдоль траекторий гамильтоновых систем с гамильтонианами $H_k^{\pm}$.

$$\Lambda_k^{\pm} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} g_{s,k}^{\pm} N^{\pm}$$

Theorem

(A.I. Allilueva, A.S.) В течение некоторого интервала времени

$$u \sim \sum_{j \neq m} K_{\Lambda_j}\Big(\sum_{s=0}^{\infty} h^s \varphi_{k,s}\Big) + K_{\Lambda_m}\Big(\sum_{s=0}^{\infty} h^s f_{m,s}\Big(\frac{\Phi(x)}{h}, \cdot\Big)\Big)$$

$$+ \sum_{k} K_{\Lambda_k^-}\Big(\sum_{s=0}^{\infty} h^s f_{k,s}^-\Big(\frac{\Phi(x)}{h}, \cdot\Big)\Big) +$$

$$+ \sum_{k} K_{\Lambda_k^+}\Big(\sum_{s=0}^{\infty} h^s f_{k,s}^+\Big(\frac{\Phi(x)}{h}, \cdot\Big)\Big)$$

СПАСИБО

ЗА

ВНИМАНИЕ!!!