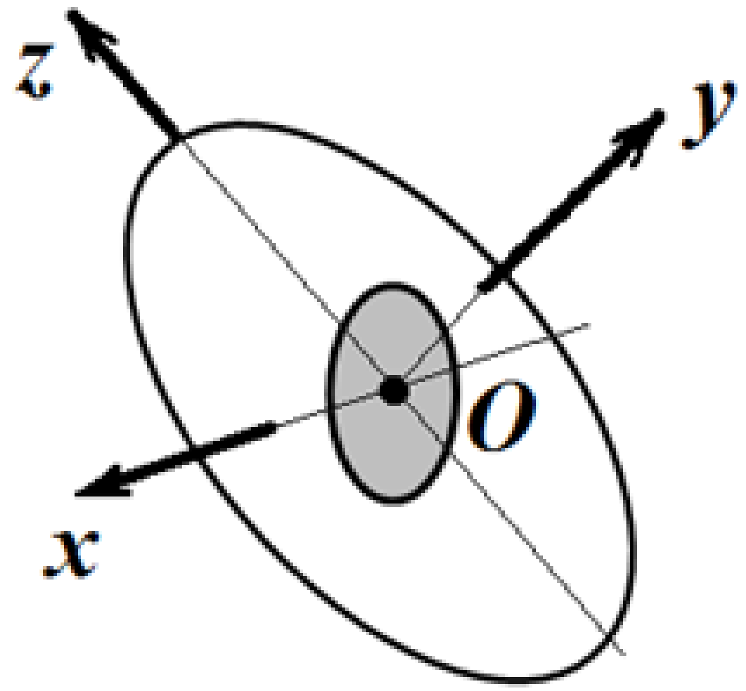
Международная конференция
«Дни динамики в Сибири»

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ



В.В. Сидоренко[1,2], С.М. Рамоданов[2]

[1]ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, [2]МФТИ

04 марта 2026 г.

ИНТРОДУКЦИЯ

ПМТФ, № 3, 1960

О ДВИЖЕНИИ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА С ПОЛОСТЬЮ, НАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ [1]

С. Л. Соболев

(Новосибирск)

I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА

§ 1. Уравнение движения и граничные условия. 1°. Рассмотрим тяжелый волчок, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Пусть ножка волчка неподвижна. Поместим начало координат в этой неподвижной точке, и пусть ось z^* напра... оси x^* и y^* неподвижной координатной сист... плоскости. Внутри волчка пусть имеется ... костью.

[1] Данная работа закончена автором в 1943 г. и не была своевременно опубликована. За истекшее время вопросы аналогичного характера вызвали к жизни ряд исследований. В работе автора [1] и ряде работ других авторов изучались спектральные задачи для систем уравнений аналогичного вида, краевые задачи и т. п. Однако эта область механики по-прежнему привлекает внимание и, вероятно, публикация одной из первоначальных работ по этим вопросам представляет интерес.

С.Л.Соболев

СОДЕРЖАНИЕ

- Подход Ф.Л.Черноусько к моделированию движения тела с жидкостью большой вязкости и его интерпретация в рамках теории интегральных многообразий
- Инвариантная форма конструкций Ф.Л.Черноусько в случае эллиптической полости
- Проблема начальных условий
- Примеры
- Некоторые обобщения

МОДЕЛЬ Ф.Л.ЧЕРНОУСЬКО (1/3)

Уравнения движения тела с жидкостью:

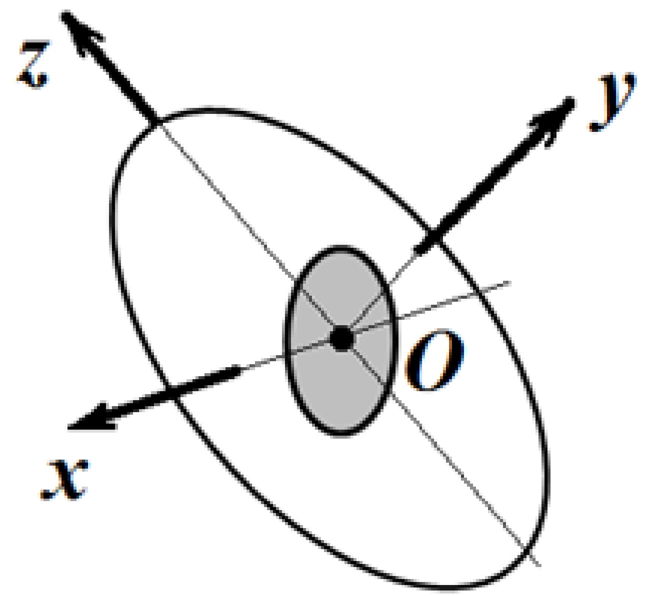
$$\frac{d\Xi}{dt} = \mathbf{k}(\Xi, \boldsymbol{\omega}),$$

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \rho\frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{r}\times\mathbf{u})\,dV = \mathbf{M} - \boldsymbol{\omega}\times I\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\times\rho\int_V (\mathbf{r}\times\mathbf{u})\,dV,$$

$$\frac{1}{\nu}\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right] - \Delta\mathbf{u} + \nabla q = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u}\big|_{\partial V} = 0.$$

$$q = \frac{1}{\nu}\left[\frac{p}{\rho} + \Pi - \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right|^2 - \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{V}_O}{dt}\right)\right]$$



МОДЕЛЬ Ф.Л.ЧЕРНОУСЬКО (2/3)

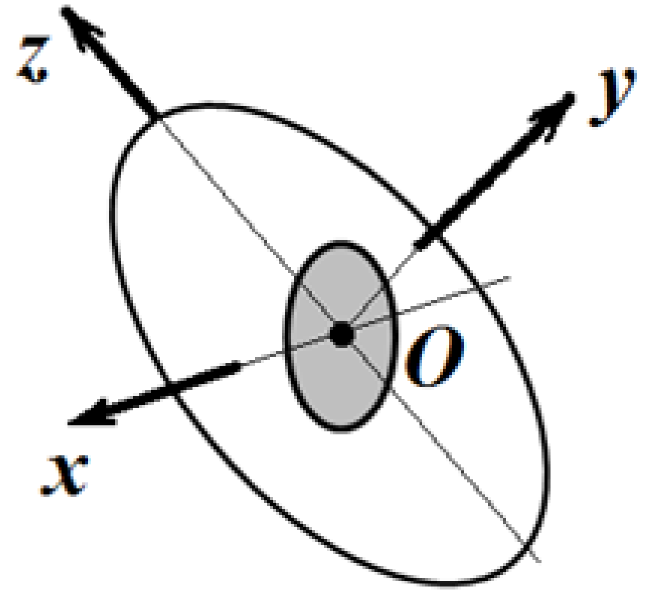
$$\boxed{E = \frac{\nu}{\omega_* L_*^2} >> 1}$$

условие большой вязкости жидкости

E – число Экмана

При E>>1 после завершения переходного процесса движение жидкости становится квазистатическим

Гринспен Х.: Теория вращающихся жидкостей. Л. Гидрометеоиздат, 1975.



МОДЕЛЬ Ф.Л.ЧЕРНОУСЬКО (3/3)

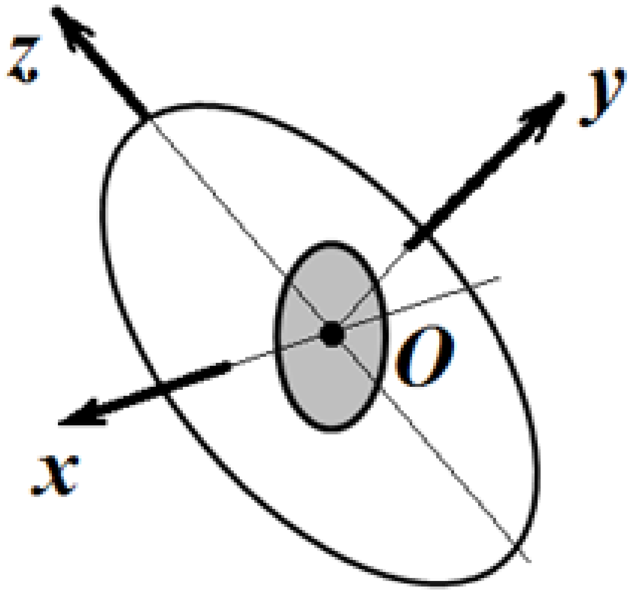
Черноусько (1965): при E>>1 динамика движение системы «тело+жидкость» эквивалентна динамике «отвердевшей» системы, к которой дополнительно приложен момент специального вида

$$\boxed{\frac{d\Xi}{dt} = \mathbf{k}(\Xi, \boldsymbol{\omega}), \quad I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_{fluid} - \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega}.}$$

$$\mathbf{M}_{fluid} = \frac{\rho}{\nu}\left[P\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times P\boldsymbol{\varepsilon}\right], \ \mathbf{K}_{fluid} \approx -\frac{\rho}{\nu}P\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0(\Xi, \boldsymbol{\omega}) = I^{-1}\left[\mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega}\right]$$

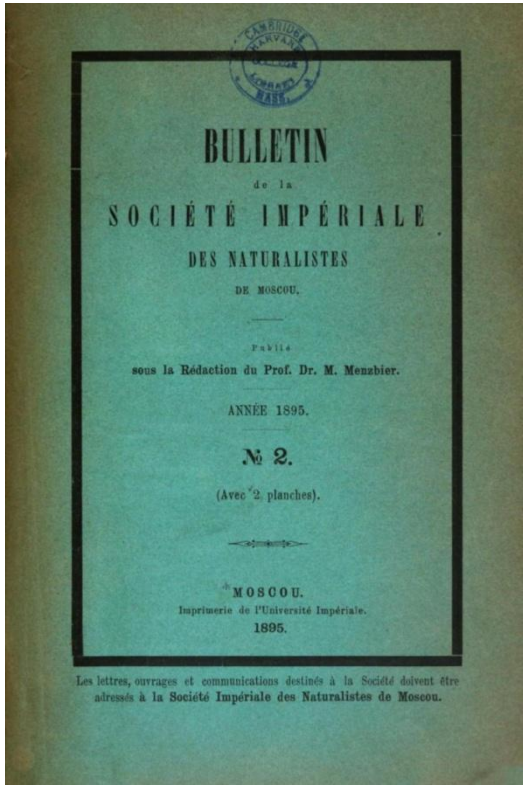
$$\left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt}\right)_0 = I^{-1}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Xi}\right)\mathbf{k} + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_0 - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \times I\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\varepsilon}_0\right]$$



ЖВМиМФ, 5:6, 1049-1070 (1965)

ПРИМЕР: ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЯ ПЛАНЕТЫ С ЖИДКИМ ЯДРОМ (1/2)

Ф.А.Слудский (1896)



BULLETIN

de la

SOCIÉTÉ IMPÉRIALE

DES NATURALISTES

DE MOSCOU.

Publié

sous la Rédaction du Prof. Dr. M. Menzbier.

ANNÉE 1895.

№ 2.

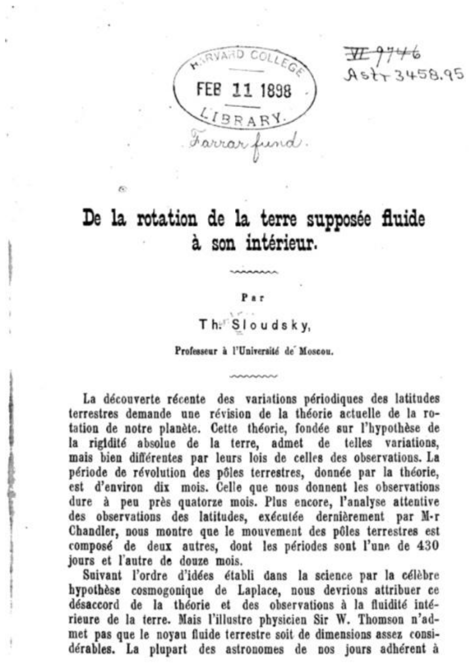
(Avec 2 planches).

MOSCOU.

Imprimerie de l'Université Impériale.

1895.

Les lettres, ouvrages et communications destinés à la Société doivent être adressés à la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.



De la rotation de la terre supposée fluide à son intérieur.

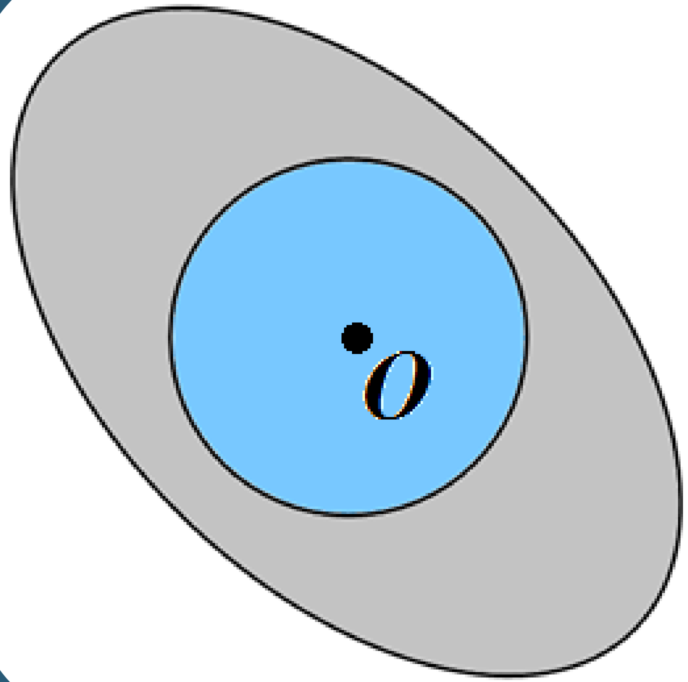
Par

Th. Sloudsky,

Professeur à l'Université de Moscou.

La découverte récente des variations périodiques des latitudes terrestres demande une révision de la théorie actuelle de la rotation de notre planète. Cette théorie, fondée sur l'hypothèse de la rigidité absolue de la terre, admet de telles variations, mais bien différentes par leurs lois de celles des observations. La période de révolution des pôles terrestres, donnée par la théorie, est d'environ dix mois. Celle que nous donnent les observations dure à peu près quatorze mois. Plus encore, l'analyse attentive des observations des latitudes, exécutée dernièrement par M-r Chandler, nous montre que le mouvement des pôles terrestres est composé de deux autres, dont les périodes sont l'une de 430 jours et l'autre de douze mois.

Suivant l'ordre d'idées établi dans la science par la célèbre hypothèse cosmogonique de Laplace, nous devrions attribuer ce désaccord de la théorie et des observations à la fluidité intérieure de la terre. Mais l'illustre physicien Sir W. Thomson n'admet pas que le noyau fluide terrestre soit de dimensions assez considérables. La plupart des astronomes de nos jours adhérent à



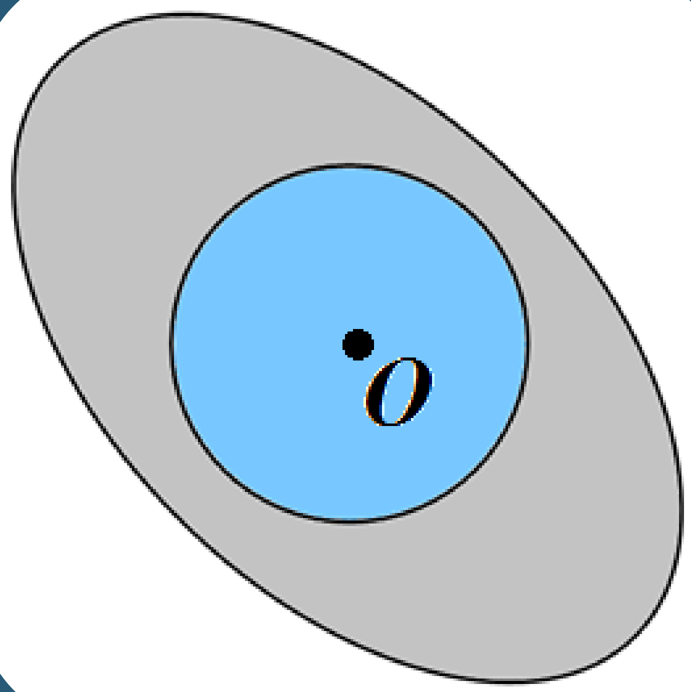
ПРИМЕР: ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЯ ПЛАНЕТЫ С ЖИДКИМ ЯДРОМ (2/2)

В.В.Сидоренко (1993):
Планета со сферической полостью, орбита центра масс круговая

$$\mathbf{M}_c = \kappa\left[\left(\frac{d^2\omega}{dt^2}\right)_{fr} + \omega \times \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{fr}\right], \; \kappa = \frac{8\pi\rho R_{core}^7}{525\nu} = O(E^{-1}).$$

Эволюция быстрых вращений планеты

Устойчивость вращений вокруг нормали



А существуют ли планеты с E>>1?

Смайли, Д.Е., Бражкин, В.В., Палмер, А.: Прямые наблюдения вязкости внешнего ядра Земли и экстраполяция измерений вязкости жидкого железа // УФН, 179, 91-105 (2009)

МОДЕЛЬ Ф.Л.ЧЕРНОУСЬКО: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В РАМКАХ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ (1/3)

Проблема обоснования: первые попытки основывались на методах теории пограничных функций

•Кобрин, А.И.: К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потециальном поле массовых сил // ПММ, 33:3, 431-440 (1969)

•Черноусько, Ф.Л., Шамаев, А.С.: Эволюционные уравнения для медленных переменных в теории сингулярно возмущенных систем // ДАН СССР, 277:2, 315-318 (1984)

Проблема построения оператора P, используемого для вычисления кинетического момента относительных движений жидкости

$$\boxed{\mathbf{K}_{fluid} \approx -\frac{\rho}{\nu} P\boldsymbol{\varepsilon}}$$

МОДЕЛЬ Ф.Л.ЧЕРНОУСЬКО: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В РАМКАХ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ (2/3)

Основные положения теории ИМ для сингулярно возмущенной системы ОДУ: Митропольский, Лыкова (1973) и Стрыгин, Соболев (1988)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mu),\ \mu\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mu),\ \mu << 1$$

Предположение: *Для* $\forall \mathbf{x}$

- *уравнение* $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y},0)=0$ *имеет изолированное решение* $\mathbf{y}=\mathbf{Y}_0(\mathbf{x})$
- *спектр матрицы* $\partial\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{Y}_0(\mathbf{x}),0)/\partial\mathbf{y}$ *лежит в левой полуплоскости* C^-

Определение: ИМ – инвариантная относительно фазового потока гиперповерхность $\mathbf{y}=\mathbf{Y}(\mathbf{x},\mu)$

- *уравнение, определяющее ИМ:* $\mu\frac{\partial\mathbf{Y}}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{Y},\mu)=\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{Y},\mu)$
- *решения, лежащие на ИМ:* $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{Y}(\mathbf{x},\mu),\mu),\ \mathbf{y}=\mathbf{Y}(\mathbf{x},\mu)$
- *выражение для ИМ в аналитическом случае:*

$$Y(x,\mu)=Y_0(x)+\mu Y_1(x)+\dots$$

МОДЕЛЬ Ф.Л.ЧЕРНОУСЬКО: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В РАМКАХ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ (3/3)

Доказательство существования ИМ для уравнений движения тел с жидкостью большой вязкости:

Богатырев С.В.: Медленные движения в задачах динамики твердого тела с полостью заполненной вязкой жидкостью // ПММ, 58:5, 91-96 (1994)

Поле скоростей жидкости:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\Xi,\boldsymbol{\omega}) = \mu \mathbf{U}_1(\mathbf{r},\Xi,\boldsymbol{\omega}) + \mu^2 \mathbf{U}_2(\mathbf{r},\Xi,\boldsymbol{\omega}) + \ldots, \quad \mu = \nu^{-1}$$

где $\mathbf{U}_1(\mathbf{r},\Xi,\boldsymbol{\omega})$ является решением краевой задачи

$$\nabla \times \left[\Delta \mathbf{U}_1 - \mathbf{r} \times \boldsymbol{\varepsilon}_0\right] = 0, \ \operatorname{div} \mathbf{U}_1 = 0, \ \mathbf{U}_1\big|_{\partial V} = 0$$

Установлена структура оператора ***P***

Оператор P для эллипсоидальной полости

Уравнение эллипсоидальной полости: $V = \{\mathbf{r} \,|\, (\mathbf{r}, H\mathbf{r}) \le 1\}$

Приближенное выражение для поля скоростей:

$$\mathbf{u} \approx \nu^{-1}\Gamma_1 \boldsymbol{\varepsilon}_0 \times \nabla\Psi$$

$$\Gamma_1 = -2\left[\Gamma_0 - (\mathrm{tr}\,\Gamma_0)E\right]^{-1},\ \Gamma_0 = 2\left[(\mathrm{tr}\,H)E + 2H\right]$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{r}, H\mathbf{r}) - 1\right]^2$$

Кинетический момент относительных движений жидкости:

$$\mathbf{K}_{fluid} = \rho\int_V (\mathbf{r}\times\mathbf{u})\,dV \approx \frac{\rho}{\nu}\int_V \left[\mathbf{r}\times(\Gamma_1\boldsymbol{\varepsilon}_0 \times \nabla\Psi)\right]dV = P\boldsymbol{\varepsilon}_0$$

$$P = \frac{\rho\sigma}{\nu}\Gamma_1,\ \sigma = -\int_V \left[(\mathbf{r}, \nabla\Psi) + \Psi\right]dV = 2\int_V \Psi\,dV = \frac{16\pi}{105\sqrt{\det H}}$$

ПОДХОД Ф.Л.ЧЕРНОУСЬКО ПРИ НАЛИЧИИ ГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ, НАЛОЖЕННЫХ НА СИСТЕМУ

Угловая скорость как функция обобщенных координат:

$$\boldsymbol{\omega}(\zeta, \dot{\zeta}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_i(\zeta)\dot{\zeta}_i$$

Приближенные уравнения движения тела с жидкостью в форме уравнений Лагранжа II-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_i} + Q_i^{fluid}$$

Здесь

$$T = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\zeta)\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_j, \;\; a_{ij}(\zeta) = (\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_j), \; Q_i^{fluid} = (\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{M}_{fluid})$$

ПРОБЛЕМА НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Необходимо имитировать начальный переходной процесс: установление «квазистатического» течения!

Важный частный случай: в начальный момент жидкость покоится

Поправки в начальные условия при рассмотрении движения тела без наложения связей (А.И.Кобрин, 1969):

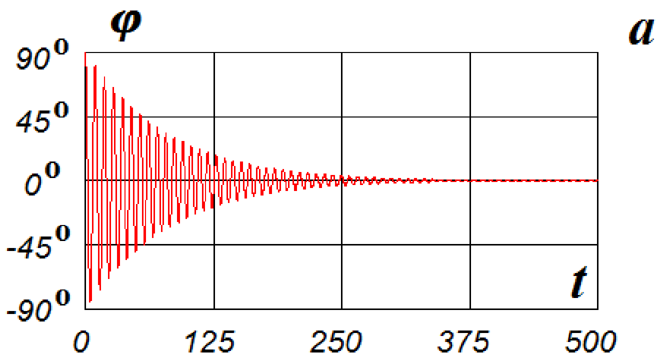
$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{mod}}(0) = \boldsymbol{\omega}(0) + \mu I^{-1} P \boldsymbol{\varepsilon}_0(0)$$

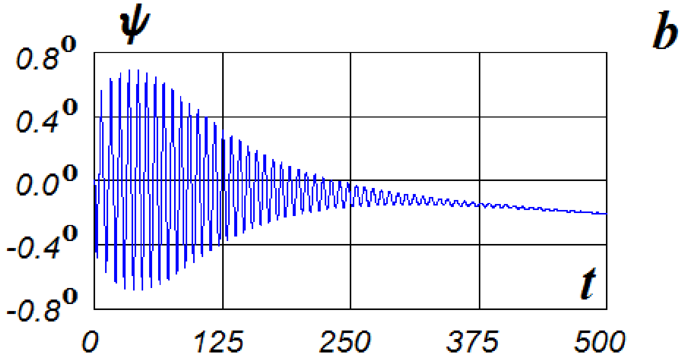
Поправки в начальные условия в случае 2DOF

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\zeta}_1 \\ \Delta\dot{\zeta}_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\omega}_1, P\boldsymbol{\varepsilon}_0(0)) \\ (\boldsymbol{\omega}_2, P\boldsymbol{\varepsilon}_0(0)) \end{pmatrix}$$

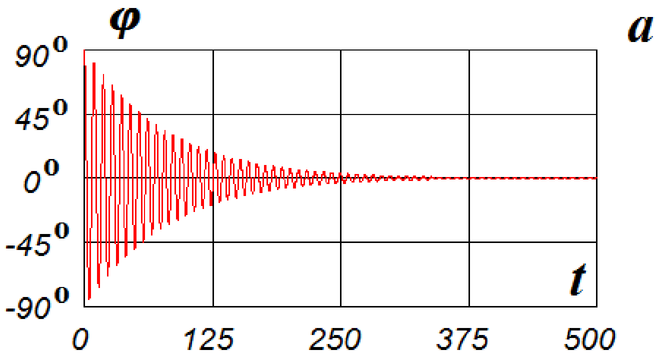
Roberts, A.J.: Appropriate initial conditions for asymptotic descriptions of the long term evolution of dynamical systems // J. Austral. Math. Soc. Ser. B31, 48-75 (1989)

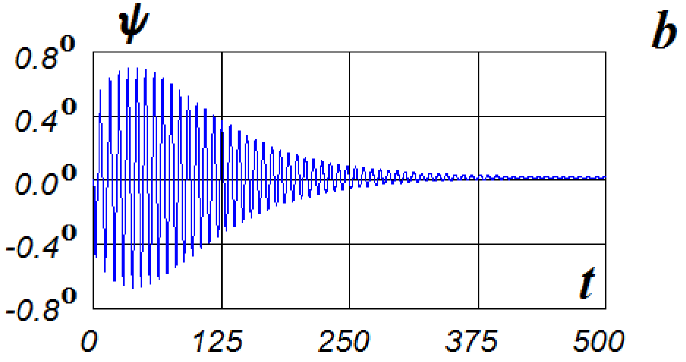
ПРИМЕР: ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК С ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОЛОСТЬЮ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАТФОРМЕ



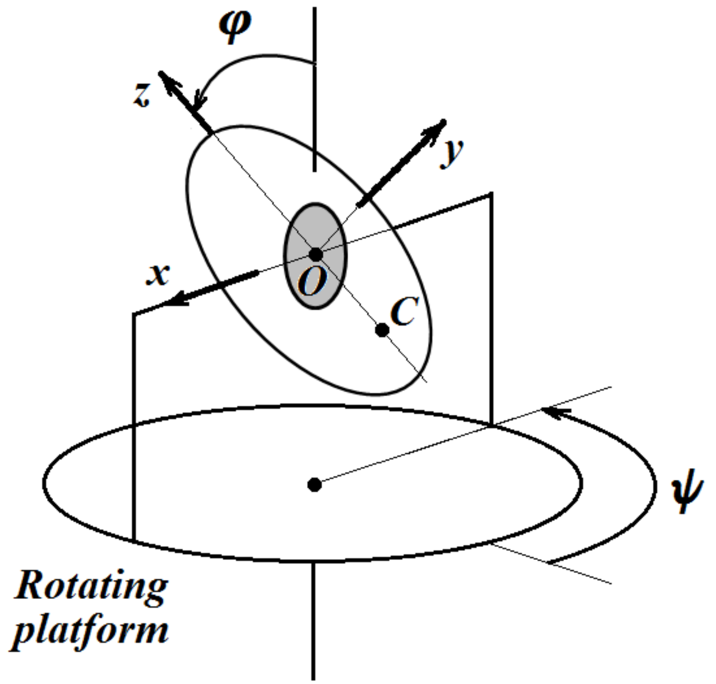


Начальное распределение скоростей жидкости соответствует установившемуся движению

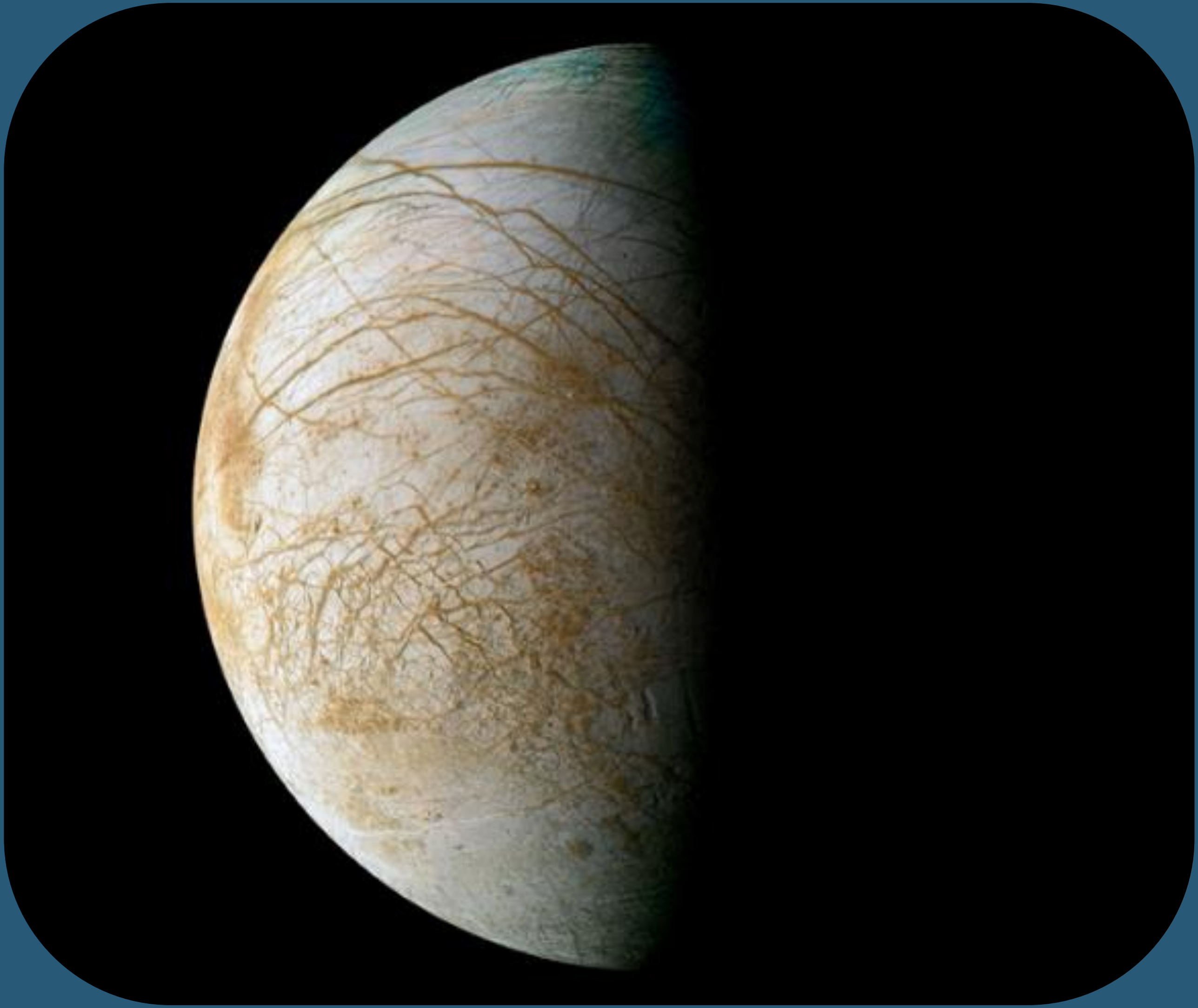




Жидкость в начальный момент покоится

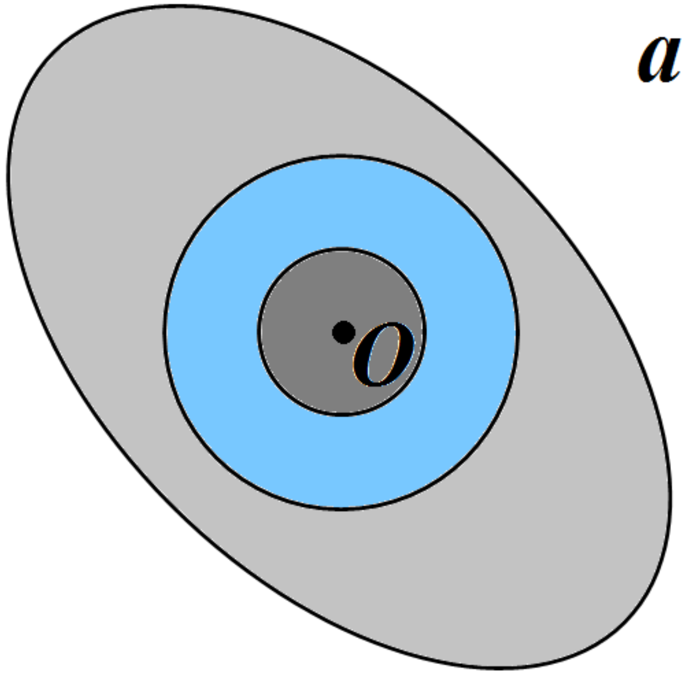


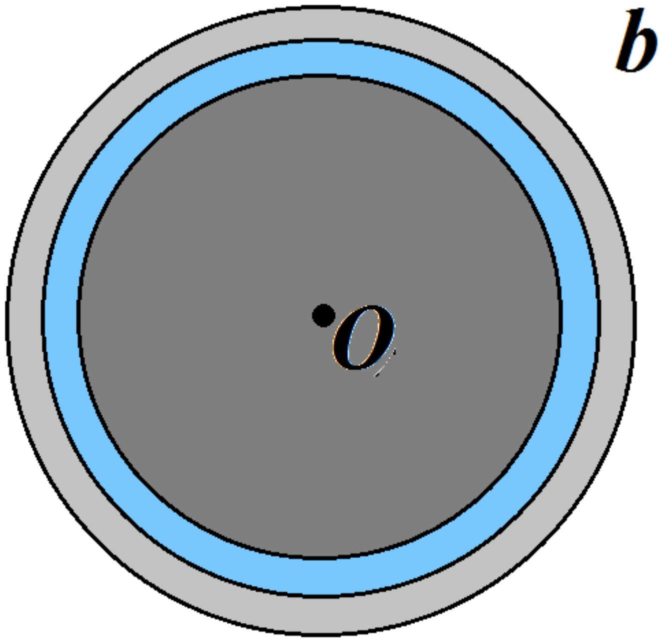
ПРИМЕР: (THE MULTI-SHELL MODELS OF CELESTIAL BODIES) МОДЕЛИ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ СЛОИСТОГО СТРОЕНИЯ (1/4)



Европа: спутник Юпитера. Предполагается наличие океана, покрытого ледяной оболочкой

ПРИМЕР: (THE MULTI-SHELL MODELS OF CELESTIAL BODIES) МОДЕЛИ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ СЛОИСТОГО СТРОЕНИЯ (2/4)





$$E = \frac{\mu}{\rho_f \omega_{rot} R_c^2}$$

«Планета»: компактное твердое внутреннее ядро

«Спутник»: тонкая внешняя ледяная оболочка

«Тело» Лаврентьева: предельный случай, когда толщина жидкого слоя стремится к нулю

ПРИМЕР: (THE MULTI-SHELL MODELS OF CELESTIAL BODIES) МОДЕЛИ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ СЛОИСТОГО СТРОЕНИЯ (3/4)

Движение жидкости в полости

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{1}{\nu}\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right]-\Delta\mathbf{u}+\nabla q=0,\\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0,\\ \mathbf{u}\big|_{|\mathbf{r}|=R_{lc}}=0,\qquad \mathbf{u}\big|_{|\mathbf{r}|=R_{sc}}=\boldsymbol{\omega}^{r}_{sc}\times\mathbf{r},\end{gathered}}$$

При E>>1 движение жидкости и внутреннего ядра подчинено движению мантии:

$$\boxed{\mathbf{M}_{fluid}\approx I_{sc}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\mathbf{u}\approx\nu^{-1}\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\nabla f\right)}$$

$$f(r)=\frac{1}{40}(r^2-R_{lc}^2)^2+\frac{R_{sc}^2}{15}\left(1-\frac{I_{sc}}{I_{fluid}}\right)\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_{lc}}\right)+\frac{1}{2R_{lc}^3}(r^2-R_{lc}^2)\right]$$

ПРИМЕР: (THE MULTI-SHELL MODELS OF CELESTIAL BODIES) МОДЕЛИ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ СЛОИСТОГО СТРОЕНИЯ (4/4)

Движение внутреннего ядра при E>>1:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_{sc}^{r} = \frac{\alpha}{\nu}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}}$$

$$\alpha = -R_{sc}^{2}\Xi_{sc}\left(\frac{R_{sc}}{R_{lc}},\frac{I_f}{I_{sc}}\right),\ \Xi_{sc}\left(\frac{R_{sc}}{R_b},\frac{I_f}{I_{sc}}\right) = \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{I_{sc}}{I_f}-1\right)\left(1-\left(\frac{R_{sc}}{R_{lc}}\right)^3\right)+\frac{1}{10}\cdot\left(\left(\frac{R_{lc}}{R_{sc}}\right)^2-1\right)$$

Если $I_{sc}>I_f$, то тогда движение внутреннего ядра является медленным вращением по отношению к мантии с угловой скоростью, направленной противоположно угловому ускорению мантии. Если вращение планеты замедляется, то движение ядра будет «суперротацией»

Примечание. Соотношения, описывающие течение Стокса в полости, ограниченной двумя равномерно вращающимися сферами, приведены в курсе «Теоретическая физика» Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица (том.6). В рассматриваемом случае движение внутренней границы подчинено движению внешней границы.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!