

Conference

Dynamics in Siberia

March, 2 – March 6, 2026, Novosibirsk

Generalized solutions of the porous medium
equation with low order terms

Tersenov A.S.

Sobolev Institute of mathematics, Novosibirsk



Рассмотрим уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, u, Du) u_{x_i x_j} + B(x, u, Du) = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n D_i (A_i(x, u, Du)) + B(x, u, Du) = 0. \quad (2)$$

Классы решений (1), (2):

1. Классические решения ($u \in C^2$).
2. Сильные решения ($u \in W_p^2$).
3. Слабые решения в смысле Соболева ($u \in W_p^1$).
4. Очень слабые решения в смысле Соболева ($u \in L_p$).
5. Вязкие решения по Лионсу.

$$\sum_{i=1}^n D_i (A_i(x, u, Du)) + B(x, u, Du) = 0. \quad (2)$$

u слабое решение (2), если для всех $\psi \in C_0^\infty$

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (D_i A_i(x, u, Du)) + B(x, u, Du) \right) \psi dx =$$

$$- \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n A_i(x, u, Du) D_i \psi \right) dx + \int_{\Omega} B(x, u, Du) \psi dx = 0. \quad (3)$$

Если $A = (A_1, \dots, A_n) = DW(x, u)$, то u очень слабое решение (2), если оно удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (D_i A_i(x, u, Du)) + B(x, u, Du) \right) \psi dx =$$

$$\int_{\Omega} W(x, u) \Delta \psi dx + \int_{\Omega} B(x, u, Du) \psi dx = 0. \quad (4)$$

Вязкие решения

Главная идея, лежащая в определении **вязкого** решения: *использование принципа максимума для сбрасывания производных на гладкие пробные функции, не применяя интегрирование по частям.*

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x, u, Du, D^2 u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

где Φ имеет вид (1), (2). Предполагаем, что Φ всегда может быть записано в недивергентном виде.

Применяя принцип максимума, можно показать, что если $u \in C^2(\Omega)$, то для любой функции $\psi \in C^2(\Omega)$, для которой $u - \psi$ имеет локальный максимум равный нулю в некоторой окрестности точки x_0 , выполнено

$$\Phi(x_0, \psi(x_0), D\psi(x_0), D^2\psi(x_0)) \leq 0. \quad (6)$$

ψ является субрешением (5) в точке x_0 .

Определение вязкого решения $u(t, x) \in C(\overline{\Omega_T})$.

$$u_t - \Phi(t, x, u, Du, D^2 u) = 0. \quad (5)$$

(i) Если любая гладкая функция, которая может коснуться u в точке (t_0, x_0) сверху является субрешением (5), то u называется вязким субрешением (5) в точке (t_0, x_0) .

(ii) Если любая гладкая функция, которая может коснуться u в точке (t_0, y_0) снизу является суперрешением (5), то u называется вязким суперрешением (5).

(iii) Будем говорить, что u является вязким решением (5) в точке (t_0, x_0) , если оно одновременно является суб- и суперрешением (5) в точке (t_0, x_0) .

Замечания по определению вязкого решения

1. Решением уравнения второго порядка является функция, которая изначально предполагается только лишь непрерывной. Все производные мы перебрасываем на пробные функции.
2. Если невозможно кандидата на ВСУБР (ВСУПР) коснуться гладкой функцией сверху (снизу), то он считается ВСУБР (ВСУПР) в исследуемой точке.
3. Может ли существовать $u \in \mathbb{C}$, которую невозможно коснуться ни в одной точке Ω_T гладкой функцией ни сверху ни снизу?

В этом случае эта функция была бы ВР решением всех дифференциальных уравнений.

Если такой функции не существует, то можно ли описать множество точек, в которых это возможно?

Лемма. Пусть задана $u \in \mathbb{C}(\Omega_T)$. Множество точек, в которых u можно коснуться сверху (снизу), плотно в Ω_T .

Замечания по определению вязкого решения

4. Согласованы ли понятия вязкого и классического решения. Т.е. совпадают ли вязкие $\mathbb{C}_{t,x}^{1,2}$ -решения с классическими?

Лемма. Если $u \in \mathbb{C}$ является вязким решением $\Phi = 0$, тогда в точках, в которых оно непрерывно дифференцируемо по t и дважды непрерывно дифференцируемо u удовлетворяет уравнению в классическом смысле.

И наоборот, если $u \in \mathbb{C}_{t,x}^{1,2}$ является классическим решением $\Phi = 0$, то оно также является и вязким решением.

5. Одним из важных преимуществ теории вязких решений является возможность их определять для уравнений недивергентного вида.

6. Существенно упрощается предельный переход в последовательности вязких решений.

Теорема о сходимости

Пусть

$$\Phi_\varepsilon(t, x, r, p, X) : Q = \Omega_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \mapsto \mathbb{R}$$

непрерывная функция на множестве Q , где S^n –пространство симметричных матриц $n \times n$, а $u_\varepsilon \in C(\overline{\Omega}_T)$. Предположим, что u_ε – вязкое решение

$$u_t - \Phi_\varepsilon(t, x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{в } \Omega_T \quad \text{при } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (7)$$

и $\Phi_\varepsilon(t, x, r, p, X) \rightarrow \Phi(t, x, r, p, X)$ равномерно на компактных подмножествах Q , а также $u_\varepsilon \rightarrow u$ равномерно на компактных подмножествах Ω_T для некоторых Φ и u при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда u – вязкое решение

$$u_t - \Phi(t, x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{в } \Omega_T. \quad (8)$$

Анизотропные уравнения

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(t,x)} u_{x_i})_{x_i} = B(t, x, u, \nabla u). \quad (9)$$

Методика исследования.

Поиск решения в виде $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$, где $\{u_\varepsilon\}$ – классические решения семейства регуляризованных задач.

Способы предельного перехода:

1. Метод монотонности Минти-Браудера (случай линейного градиента). Получена теорема существования слабого соболевского решения для первой краевой задачи
2. Применение теоремы о сходимости (случай нелинейного градиента). Получена теорема существования вязкого решения.

Доказано, что слабое соболевское решение из 1. и вязкое решение из 2. при линейном градиенте эквивалентны.

Уравнение фильтрации для давления, m – постоянная

Рассмотрим следующую задачу

$$Lu \equiv -u_t + (m-1)uu_{xx} + u_x^2 + B(t, x, u, u_x) = 0, \quad \text{в } \Omega_T, \quad (10)$$

$$u(t, \pm l) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_0(\pm l) = 0. \quad (11)$$

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq C_0|x - y|^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (12)$$

Регуляризованная задача (14)–(16)

$$Lu_\mu = 0, \quad \text{в } \Omega_T = (0, T) \times (-l, l), \quad (13)$$

$$u_\mu(t, \pm l) = \mu > 0, \quad u_\mu(0, x) = u_{0\mu}(x) \geq \mu, \quad u_{0\mu}(\pm l) = \mu, \quad (14)$$

где функция $u_{0\mu}(x)$ – гладкая функция, удовлетворяющая (12) такая, что

$$\|u_{0\mu}(x) - u_0(x)\|_{C^\alpha([-l, l])} \rightarrow 0 \quad \text{при } \mu \rightarrow 0. \quad (15)$$

$$u_{\mu t} = (m - 1)u_{\mu}u_{\mu xx} + u_{\mu x}^2 + B(t, x, u_{\mu}, u_{\mu x}), \quad \text{в } \Omega_T, \quad (17)$$

$$u_{\mu}(t, \pm l) = \mu > 0, \quad u_{\mu}(0, x) = u_{0\mu}(x) \geq \mu, \quad u_{0\mu}(\pm l) = \mu, \quad (18)$$

$$\|u_{0\mu}(x) - u_0(x)\|_{C^{\alpha}([-l, l])} \rightarrow 0 \quad \text{при } \mu \rightarrow 0. \quad (19)$$

Теорема о сходимости. Рассмотрим задачу (10)–(12).

Предположим, что существует семейство вязких равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных, на любом компактном подмножестве области Ω_T , решений u_{μ} задачи (13)–(15). Тогда существует непрерывное в Ω_T вязкое решение u задачи (10)–(12) такое, что

$$u = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_{\mu}.$$

Для того, чтобы применить теорему о сходимости, достаточно получить равномерные по μ оценки Гельдера.

Оценки классических (вязких) решений

Непрерывность по Гельдеру по x

$$|u_\mu(t, x) - u_\mu(t, y)| \leq C_0|x - y|^\alpha, \quad t \in [0, T], \quad x, y \in [-l, l]. \quad (16)$$

Для непрерывности по Гельдеру по t необходимо наложить дополнительное условие на B по переменной q

$$\max_{(t,x) \in \Omega_T, |z| \leq M} |B(t, x, z, q)| \leq \kappa_0(1 + |q|^p), \quad \kappa_0, p \geq 0 \quad (17)$$

При выполнении (17), удастся доказать обобщение результата Кружкова-Гилдинга на случай полиномиальной градиентной нелинейности без априорной оценки на производную по x .

Лемма. Для любого классического решения u задачи (13)–(15), удовлетворяющего (16), (17), имеет место оценка

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \leq C_1|t_1 - t_2|^\gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\max\{2, p\}}, \quad (18)$$

где $x \in (-l, l)$, $t_1, t_2 \in (0, T)$, C_1 зависит от $C_0, \kappa_0, l, \alpha, p$ и $d = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

Полагаем, что B удовлетворяет условию (17), а также некоторым дополнительным условиям, которые не привожу в силу их громоздкости.

Пример функций, удовлетворяющих дополнительным условиям:

$$B(t, x, u, u_x) = f(t, u)g(t, u_x), \quad (19)$$

где $g(t, u_x) \geq 0$, $g(t, 0) = 0$, а $f(t, u)$ невозрастающая по u и такая, что $f(t, u) \geq 0$ при $u \leq 0$.

Теорема 1. Пусть функция $B(t, x, z, q) \in C^\beta(\Omega_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ с некоторым показателем $\beta \in (0, 1)$ и выполнены условия (17), (19). Тогда существует вязкое решение $u(t, x)$ задачи (10)–(12) такое, что

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq C_0 |x - y|^\alpha, \quad \alpha \leq \frac{m-1}{m},$$

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \leq C_1 |t_1 - t_2|^\gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\max\{2, p\}}.$$

Уравнение фильтрации для плотности, $m = m(t) \in \mathbb{C}$

Рассмотрим следующую задачу

$$u_t = \left(u^{m(t)} \right)_{xx} + F(t, u, u_x), \quad \min_{t \in [0, T]} m(t) \geq 2 \quad (20)$$

$$u(t, \pm l) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_0(\pm l) = 0, \quad (15)$$

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq C_0 |x - y|^\alpha, \quad \alpha = \min_{t \in [0, T]} \frac{1}{m(t)}, \quad (16)$$

Регуляризованная задача (24), (15), (16) ($u_\mu = u$)

$$u_t = m_\mu u^{m_\mu - 1} u_{xx} + m_\mu (m_\mu - 1) u^{m_\mu - 2} u_x^2 + F(t, u - \mu, u_x), \quad (21)$$

$$u_\mu(t, -l) = u_\mu(t, l) = \mu, \quad u_\mu(0, x) = u_{0\mu}(x) + \mu, \quad (22)$$

$m_\mu(t)$ – гладкая функция, $m_\mu(t) \rightrightarrows m(t)$, $u_{0\mu}(x)$ – гладкая функция, удовлетворяющая (16) такая, что

$$\|u_{0\mu}(x) - u_0(x)\|_{C^\alpha[-l, l]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \quad (23)$$

Вязкое решение

Предположим, что

$$F(t, u, 0) \geq 0 \text{ при } u \leq 0, \quad (24)$$

$$F(t, u, q) \leq 0 \text{ при } u \geq 0 \text{ и } |q| \geq \alpha C_0(2l)^{\alpha-1} \quad (25)$$

$$F(t, u_1, q) - F(t, u_2, q) \geq 0 \text{ при } u_1 < u_2. \quad (26)$$

$$\max_{t \in [0, T], u \in [0, C_0(2l)^\alpha]} |F(t, u, q)| \leq \kappa_0(1 + |q|^p), \quad \kappa_0 \geq 0, p \geq 0. \quad (27)$$

Примеры функций, удовлетворяющих условиям (24)–(27):

$$F = -u|u_x|^p, \quad F = -u^3 + |u_x|^p, \quad F = -f(t)u^{2n+1}, \quad (28)$$

$f(t) \geq 0$, n – натуральное число.

При условии непрерывности по Гельдеру функции F и выполнении условий (28)–(31), доказана теорема существования вязкого решения $u \in C_{t,x}^{\gamma,\alpha}$, где как и ранее

$$\gamma = \frac{\alpha}{\max\{2,p\}}.$$

Очень слабые решения, $F = F(t, u)$

$$u_t = \left(u^{m(t)} \right)_{xx} + F(t, u), \quad \min_{t \in [0, T]} m(t) \geq 2 \quad (24).$$

Определение. Будем называть непрерывную неотрицательную функцию $u(t, x)$ очень слабым решением задачи (24), (15), (16) при $F = F(t, u)$, если

$$\int_0^T \int_{-l}^l [u \phi_t + u^{m(t)} \phi_{xx} + F(t, u) \phi] dx dt = \int_{-l}^l u_0(x) \phi(0, x) dx$$

для произвольной $\phi(t, x) \in C^1(0, T; C_0^\infty(-l, l))$.

Пусть выполнены условия

$$uF(t, u) \leq 0 \quad \text{и} \quad F(t, u_1) - F(t, u_2) \geq 0 \quad \text{for} \quad u_1 < u_2. \quad (29)$$

При условии непрерывности по Гельдеру функции F и выполнении условий (29), доказана теорема существования очень слабого решения $u \in C_{t,x}^{\frac{\alpha}{2}, \alpha}$.

Связь между соболевскими и вязкими решениями

Уравнение фильтрации для давления

$$u_t = (m - 1)uu_{xx} + u_x^2 + F(t, u),$$

уравнение фильтрации для плотности

$$u_t = \left(u^{m(t)} \right)_{xx} + F(t, u).$$

Вязкие решения и очень слабые решения для обоих уравнений были получены с помощью предельного перехода по классическим решениям регуляризованных задач.

1. Указанные вязкие и очень слабые решения являются эквивалентными.
2. При постоянном m очень слабые решения становятся просто слабыми, т.е. есть эквивалентность между вязкими и слабыми решениями, полученными указанным способом.
3. Единственность вязких решений остается открытым вопросом.

THANK YOU FOR YOUR ATTENTION!