Weak solvability of the initial boundary value problem for the inhomogeneous incompressible Voigt fluid motion model with a substantial time derivative in the rheological relation[1]

Звягин В.Г., Турбин М.В.

Воронежский государственный университет
e-mail: mrmike@mail.ru

3 марта 2026 г.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00056.

Неоднородная несжимаемая жидкость

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$ — ограниченная область с гладкой границей. Движение неоднородной несжимаемой жидкости, заполняющей область Ω на промежутке времени $[0, T]$ описывается следующей системой уравнений:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\sigma + \nabla p = \rho f, \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times [0, T]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \mathrm{div}\, v = 0, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (2)$$

v — вектор скорости частиц жидкости,
ρ — плотность жидкости,
p — давление,
σ — девиатор тензора напряжений,
f — вектор плотности внешних сил.

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v + \nabla p = \rho f, \quad (x,t)\in Q_T = \Omega\times[0,T]; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i} = 0; \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x,t)\in Q_T. \tag{4}$$

Здесь ν — вязкость жидкости, $\nu > 0$.

А. В. Кажихов, Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений движения неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР, 1974, Том 216, С. 1008–1010.

Условие на начальное значение плотности жидкости:

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \geqslant m > 0, \quad x\in\Omega, \quad \rho_0\in L_\infty(\Omega).$$

О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1975, Том 52, С. 52–109.

Условие на начальное значение плотности жидкости:

$$\rho(\mathrm{x},0)=\rho_0(\mathrm{x})>0,\quad \mathrm{x}\in\Omega,\quad \rho_0\in \mathrm{C}^1(\Omega).$$

Неоднородная несжимаемая система Навье-Стокса

J. Simon, Nonhomogeneous Viscous Incompressible Fluids: Existence of Velocity, Density and Pressure // SIAM J. Math. Anal., 1990, Vol. 21, № 5, P. 1093–1117.

Условие на начальное значение плотности жидкости:

$$\rho(\mathrm{x}, 0) = \rho_0(\mathrm{x}) \geqslant 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad \rho_0 \in \mathrm{L}_\infty(\Omega), \quad 1/\rho_0 \in \mathrm{L}_{6/5}(\Omega).$$

Неоднородная несжимаемая система Навье-Стокса

R.J. DiPerna, P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Inventiones mathematicae, 1989, Vol. 98, P. 511-547.

Для случая слабого решения плотность ρ является непрерывной по t функцией со значениями в $L_p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$, то есть $\rho \in C([0,T], L_p(\Omega))$.

P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume 1. Incompressible Models // Oxford, Clarendon Press, 1996.

Условия на начальное значение плотности:

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \quad \rho_0 \in L_\infty(\Omega).$$

$$\rho v(x,0) = m_0(x), \quad x \in \Omega, \quad m_0 \in L_2(\Omega)^n$$

$m_0 = 0$ при п.в. $x \in \Omega$, при которых $\rho_0(x) = 0$, и $|m_0|^2/\rho_0 \in L_1(\Omega)$.

Принципиальная проблема для слабых решений моделей неоднородной жидкости

Для слабых решений однородной несжимаемой системы Навье–Стокса оценка слагаемого

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho v\varphi dx$$

дает непрерывность по времени скорости движения жидкости v как функции со значениями в V^{-1}.

Для неоднородной несжимаемой системы Навье–Стокса ограниченности этого слагаемого недостаточно (подробнее доказательство приведено в работе Симона). И это является основной причиной сложностей с начальными условиями в слабой постановке задачи для неоднородной несжимаемой системы Навье–Стокса и вообще неоднородных несжимаемых жидкостей.

Наличие вакуума в начальный момент времени для сильных решений системы Навье-Стокса

Для задачи о сильных решениях системы Навье-Стокса удалось доказать разрегимость при наличии областей вакуума в начальный момент времени.

H. J. Choe and H. Kim, Strong solutions of the Navier-Stokes equations for nonhomogeneous incompressible fluids // Commun. Partial Differ. Equations. 28(5–6), 1183–1201 (2003).

J. Li, Local existence and uniqueness of strong solutions to the Navier–Stokes equations with nonnegative density // Journal of Differential Equations, Volume 263, Issue 10, 2017, Pages 6512-6536.

R. Danchin and P. B. Mucha, The incompressible Navier-Stokes equations in vacuum // Commun. Pure Appl. Math. 72, 1351–1385 (2019).

Неньютоновские жидкости. Модель Фойгта с частной производной по времени в реологическом соотношении

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\varkappa\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathcal{E}, \quad \nu > 0, \varkappa > 0. \tag{5}$$

- S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, Generalized Kelvin–Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Communications in Mathematical Sciences, 2019, Vol. 17, № 7, P. 1915–1948.
- S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, The classical Kelvin–Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: existence, uniqueness and regularity // Nonlinearity, 2021, Vol. 34, № 5, P. 3083–3111.

Неньютоновские жидкости. Модель Кельвина-Фойгта с частной производной

$$\left(1+\sum_{i=1}^{L}\lambda_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\sigma(t,x)=2\left(\nu+\sum_{i=1}^{L+1}\varkappa_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\mathcal{E}(v)(t,x),\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T]. \tag{6}$$

Здесь $\nu>0$ — вязкость жидкости, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_L$ — времена релаксации, $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{L+1}$ — времена ретардации.

V.G. Zvyagin, M.V. Turbin, Weak solvability of the initial-boundary value problem for inhomogeneous incompressible Kelvin–Voigt fluid motion model of arbitrary finite order // J. Fixed Point Theory Appl., 2023, Vol. 25, № 3, Article 63.

Наличие вакуума в начальный момент времени

- S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Cauchy problem for the Navier–Stokes–Voigt model governing nonhomogeneous flows // Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fis. Nat. Ser A. Mat. 116(4), 158 (2022).
- V.G. Zvyagin, M.V. Turbin, An Existence Theorem for Weak Solutions of the Initial–Boundary Value Problem for the Inhomogeneous Incompressible Kelvin–Voigt Model in Which the Initial Value of Density is Not Bounded from Below // Math. Notes, 114:4 (2023), 630–634
- Zvyagin V., Turbin M. Weak solvability of the initial-boundary value problem for a finite-order model of the inhomogeneous incompressible Kelvin-Voigt fluid without a positive lower bound on the initial condition of fluid density // Evolution Equations and Control Theory. 2025, Volume 14, Issue 4, P. 623-648.

Модель Фойгта

В докладе рассматривается модель движения жидкости Фойгта, реологическое соотношение которой имеет вид:

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\varkappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathcal{E}, \quad \nu > 0, \varkappa > 0. \tag{7}$$

σ — девиатор тензора напряжений.
$\mathcal{E}$ — тензор скоростей деформаций, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathrm{v}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathrm{v} + (\nabla \mathrm{v})^{\mathrm{T}}\right).$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{t}} + \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_i}\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}},$
ν — вязкость жидкости, $\varkappa$ — время запаздывания (ретардации).

Модель Фойгта

- Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // ДАН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 809–812.
- Амфилохиев В.Б., Павловский В.А. Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та. 1976. Т. 104. С. 3–5.
- Амфилохиев В.Б., Войткунский Я.И., Мазаева Н.П., Ходорковский Я.С. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та. 1975. Т. 96. С. 3–9.

Разрешимость начально-краевых задач для модели Фойгта

- Turbin M.V. Research of a mathematical model of low-concentrated aqueous polymer solutions // Abstr. Appl. Anal. 2006. V. 2006. Article 12497.
- Zvyagin, V.G., Turbin, M.V.: The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin–Voigt fluids. Journal of Mathematical Sciences 168, 157–308 (2010)
- Звягин В.Г., Турбин М.В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред // М.: КРАСАНД. 2012.
- Turbin M., Ustiuzhaninova A. Existence of weak solution to initial-boundary value problem for finite order Kelvin–Voigt fluid motion model // Bol. Soc. Mat. Mex. 29, 54 (2023)

$$\rho\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}+\rho\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{v}_{\mathrm{i}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}}-\nu\Delta \mathrm{v}-\varkappa\frac{\partial\Delta \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}-2\varkappa\mathrm{Div}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{v}_{\mathrm{i}}\frac{\partial\mathcal{E}(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}}+\nabla \mathrm{p}=\rho \mathrm{f}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{t}}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{v}_{\mathrm{i}}\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}}=0; \quad \mathrm{div}\,\mathrm{v}=0. \tag{9}$$

Эквивалентная система

$$\frac{\partial(\rho \mathrm{v})}{\partial \mathrm{t}}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}}(\rho \mathrm{v}_{\mathrm{i}}\mathrm{v})-\nu\Delta \mathrm{v}-\varkappa\frac{\partial\Delta \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}-2\varkappa\mathrm{Div}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{v}_{\mathrm{i}}\frac{\partial\mathcal{E}(\mathrm{v})}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}}+\nabla \mathrm{p}=\rho \mathrm{f}; \tag{10}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{t}}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{v}_{\mathrm{i}}\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}}=0; \quad \mathrm{div}\,\mathrm{v}=0. \tag{11}$$

Начальные и граничные условия:

$$\mathrm{v}|_{\mathrm{t}=0}(\mathrm{x})=\mathrm{a}(\mathrm{x}), \quad \rho|_{\mathrm{t}=0}(\mathrm{x})=\rho_0(\mathrm{x}), \quad \mathrm{v}|_{\partial\Omega}=0. \tag{12}$$

$0\leqslant\rho_0(\mathrm{x})\leqslant \mathrm{M}$ при $\mathrm{x}\in\Omega$, где константа $\mathrm{M}>0$. То есть в начальный момент в жидкости возможны участки вакуума.

Функциональные пространства

$C_0^\infty(\Omega)^n$ — множество C^∞ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и компактным носителем, содержащимся в Ω.

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\},$$
$$V^0 = \text{ пополнение } \mathcal{V} \text{ по норме } L_2(\Omega)^n;$$
$$V^1 = \text{ пополнение } \mathcal{V} \text{ по норме } H^1(\Omega)^n;$$
$$V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1.$$

$\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ — проектор Лере. Рассмотрим в $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$. Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0.

Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A. Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad N \in \mathbb{Z},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эта норма в $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$, эквивалентна норме: $\|v\|_{V^\alpha} = \|A^{\alpha/2} v\|_{V^0}$.

Функциональные пространства

$$W_1 = \left\{u : u \in L_\infty(0,T;V^1), u' \in L_2(0,T;V^{-1})\right\},$$
$$W_2 = \left\{u : u \in C([0,T],V^3), u' \in L_2(0,T;V^3)\right\},$$
$$E_1 = \left\{\varrho : \varrho \in L_\infty(Q_T), \varrho' \in L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))\right\}.$$

Определение слабого решения

Будем предполагать, что $a \in V^1, \rho_0 \in L_\infty(Q_T), f \in L_2(0,T; L_2(\Omega)^n)$.

Определение 1

Пара функций $v \in W_1, \rho \in L_\infty(Q_T)$ называется слабым решением начально-краевой задачи (10)–(12), если для любой пробной функции $\chi \in C^1([0,T], V^3)$ такой, что $\chi(T) \equiv 0$, эти функции удовлетворяют тождеству

$$-\int_0^T \int_\Omega \rho v \chi' \, dx\, dt - \int_\Omega \rho_0 a \chi(0)\, dx + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \rho v_i v_j \frac{\partial \chi_j}{\partial x_i}\, dx\, dt$$

$$+\nu \int_0^T \int_\Omega \nabla v : \nabla \chi dx\, dt - \varkappa \int_0^T \int_\Omega \nabla v : \nabla \chi' dx\, dt - \varkappa \int_\Omega \nabla a : \nabla \chi(0) dx -$$

$$-\varkappa \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt -$$

$$-\varkappa \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega \rho f \chi\, dx\, dt, \quad (13)$$

Определение слабого решения

Определение 1

для любой пробной функции $\omega \in \mathrm{C}^1([0,\mathrm{T}],\mathrm{W}_2^1(\Omega))$ такой, что $\omega(\mathrm{T}) \equiv 0$, эти функции удовлетворяют тождеству

$$\int_0^{\mathrm{T}}\int_\Omega \rho\omega' \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} + \int_\Omega \rho_0\omega(0)\,\mathrm{dx} + \int_0^{\mathrm{T}}\int_\Omega \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \rho \mathrm{v_i}\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{x_i}}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} = 0, \qquad (14)$$

а также удовлетворяют начальным условиям:

$$\mathrm{v}(0) = \mathrm{a}, \quad \rho(0) = \rho_0. \qquad (15)$$

Теорема существования слабого решения

Основным результатом доклада является следующая теорема

Теорема 1

Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи (10)–(12).

Пусть $\varepsilon > 0$.

$$\rho\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \rho\sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}_i \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x_i} - \nu\Delta \mathrm{v} - \varkappa\frac{\partial \Delta \mathrm{v}}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial \Delta^3 \mathrm{v}}{\partial t} - \\ -2\varkappa \mathrm{Div}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}_i \frac{\partial \mathcal{E}(\mathrm{v})}{\partial x_i} + \nabla p = \rho f; \tag{16}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v}_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \mathrm{div}\, \mathrm{v} = 0; \tag{17}$$

$$\mathrm{v}|_{t=0}(x) = b(x), \quad \rho|_{t=0}(x) = \rho_0(x), \quad \mathrm{v}|_{\partial\Omega} = \Delta \mathrm{v}|_{\partial\Omega} = \Delta^2 \mathrm{v}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{18}$$

Будем предполагать, что $b \in V^3, f \in L_2(0, T, L_2(\Omega)^n)$, $\rho_0 \in L_\infty(\Omega), 0 \leqslant \rho_0(x) \leqslant M, \quad x \in \Omega$.

Определение решения аппроксимационной задачи

Определение 2

Пара $(\mathrm{v},\rho)\in W_2\times E_1$ — решение задачи (16)–(18) если $\forall\varphi\in V^3$ при п.в. $t\in(0,T)$ они удовлетворяют равенству

$$\int_\Omega \rho \mathrm{v}'\varphi dx+\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \rho \mathrm{v}_i\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}\varphi_j dx+\nu\int_\Omega \nabla \mathrm{v}:\nabla\varphi dx+\varkappa\int_\Omega \nabla \mathrm{v}':\nabla\varphi dx+$$

$$+\varepsilon\int_\Omega \nabla\left(\Delta \mathrm{v}'\right):\nabla\Delta\varphi dx-\varkappa\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{n}\mathrm{v}_k\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx- \qquad (19)$$

$$-\varkappa\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{n}\mathrm{v}_k\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx=\int_\Omega \rho f\varphi dx,$$

$\forall\psi\in W_2^1(\Omega)$ при п.в. $t\in(0,T)$ удовлетворяют равенству

$$\langle\rho',\psi\rangle-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \rho \mathrm{v}_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx=0, \qquad (20)$$

и удовлетворяют начальным условиям $\mathrm{v}(0)=b$ и $\rho(0)=\rho_0$.

Для доказательства разрешимости аппроксимационной задачи мы будем пользоваться следующим вариантом теоремы Лере–Шаудера:

Теорема Лере–Шаудера

Пусть G — открытое ограниченное подмножество банахова пространства X, $0 \in G$ и $\Xi : [0,1] \times \overline{G} \to X$ — однопараметрическое семейство отображений, которое удовлетворяет свойствам:

- Отображение $\Xi : [0,1] \times \overline{G} \to X$ компактно по совокупности переменных.
- $\Xi(\tau, x) \neq x$ для всех $\tau \in [0,1]$ и $x \in \partial G$.
- $\Xi(0, \cdot) \equiv 0$.

Тогда отображение $\Xi(1, \cdot)$ имеет неподвижную точку $x_1 \in G$, то есть $x_1 = \Xi(1, x_1)$.

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 1

На первом этапе доказательства для фиксированной функции $u \in L_\infty(0,T;V^2)$, $\|u\|_{L_\infty(0,T;V^2)} \leqslant R$, (значение R указано ниже) устанавливается существование единственного решения $\rho \in E_1$ задачи

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \rho u_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0.$$

DiPerna R.J., Lions P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 98, 511–547 (1989)

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 2

После этого для той же функции u и найденной по ней функции ρ доказывается существование единственного решения $w \in W_2$ следующей линейной задачи:

$$\tau \int_\Omega \rho w' \varphi dx + \tau \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \rho u_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \varphi_j dx + \tau\nu \int_\Omega \nabla w : \nabla \varphi dx +$$

$$+ \varkappa \int_\Omega \nabla w' : \nabla \varphi dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla\left(\Delta w'\right) : \nabla \Delta \varphi dx -$$

$$- \tau\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} u_k \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \tau\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} u_k \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx =$$

$$= \tau \int_\Omega \rho f \varphi dx, \quad w(0) = \tau b, \quad \tau \in [0,1].$$

Доказательство проводится на основе абстрактного утверждения из теории операторных дифференциальных уравнений с Вольтерровыми операторами.

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 3

Таким образом, каждой функции $u \in L_\infty(0,T;V^2)$ поставлена соответствие функция $w \in W_2$, то есть определено однопараметрическое семейство отображений

$$\Psi : [0,1] \times B_R \to W_2,$$

где B_R — замкнутый шар с центром в нуле из $L_\infty(0,T;V^2)$. Доказывается непрерывность Ψ по совокупности переменных. В силу компактности вложения $V^3 \subset V^2$ вложение $W_2 \subset L_\infty(0,T;V^2)$ компактно. Следовательно, отображение $\Psi : [0,1] \times B_R \to L_\infty(0,T;V^2)$ компактно как суперпозиция непрерывного и компактного отображений.

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 4

Для неподвижных точек Ψ, то есть функций h таких, что $h = \Psi(\tau, h)$ при некотором $\tau \in [0, 1]$, устанавливаются оценки (здесь константы C_1, C_2, C_3 не зависят от h, τ и $1/\varepsilon$):

$$\|h\|_{W_1} = \|h\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|h'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_1, \tag{21}$$

$$\|h\|_{W_2} = \|h\|_{C([0,T],V^3)} + \|h'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_2 + \frac{C_3}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Выбор R, которой была ограничена функция $u \in L_\infty(0, T; V^2)$. В силу непрерывности вложения $W_2 \subset L_\infty(0, T; V^2)$ имеет место неравенство $\|u\|_{L_\infty(0,T;V^2)} \leqslant C_4\|u\|_{W_2}$.
Определим $R = C_4(C_2 + C_3/\varepsilon) + 1$. В силу неравенства (22) на границе шара B_R нет неподвижных точек $\Psi(\tau, \cdot)$.

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 5

Далее, $\Psi(0,\cdot)\equiv 0$, поскольку задача

$$(\mu_2 \mathrm{A}+\varepsilon \mathrm{A}^2)\mathrm{w}'=0,$$
$$\mathrm{w}|_{t=0}=0,$$

имеет единственное решение $\mathrm{w}\equiv 0$.
Поскольку $\Psi(0,\cdot)\equiv 0$, то по теореме Лере-Шаудера существует функция $\mathrm{v}\in \mathrm{L}_\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{V}^2)$, для которой $\Psi(1,\mathrm{v})=\mathrm{v}$. Таким образом, по построению существует решение $(\mathrm{v},\rho)\in \mathrm{W}_2\times \mathrm{E}_1$ аппроксимационной задачи (16)–(18).

Предельный переход

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует пара функций $\mathrm{v}_\varepsilon, \rho_\varepsilon$ — решение аппроксимационной задачи.
Устремим теперь $\varepsilon \to 0$. Выберем последовательность $\mathrm{b}_\varepsilon \in V^3$ так чтобы $\mathrm{b}_\varepsilon \to \mathrm{a}$ по норме V^1.
В силу априорных оценок решений

$$
\begin{gathered}
\mathrm{v}_\varepsilon \rightharpoonup \mathrm{v} \quad \text{слабо в} \quad L_p(0,T;V^1),\ p \in [1,\infty),\\
\mathrm{v}'_\varepsilon \rightharpoonup \mathrm{v}' \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^{-1}),\\
\mathrm{v}_\varepsilon \to \mathrm{v} \quad \text{сильно в} \quad C([0,T],L_4(\Omega)^n),\\
\varepsilon\pi\Delta^3\mathrm{v}'_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,T;V^{-3}),
\end{gathered}
$$

В силу свойств уравнения неразрывности

$$
\begin{gathered}
\rho_\varepsilon \to \rho \quad \text{сильно в} \quad C([0,T];L_\gamma(\Omega)),\ \gamma \in [1,\infty),\\
\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho \quad * -\text{слабо в} \quad L_\infty(Q_T).
\end{gathered}
$$

Предельный переход

Положим в интегральном тождестве (20) пробную функцию $\psi = \mathrm{v}\varphi$ (где φ — пробная функция из (19)). Прибавим полученное соотношение к равенству (19).

$$\int_\Omega \rho \mathrm{v}'\varphi d\mathrm{x} + \langle \rho', \mathrm{v}\varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{\mathrm{i,j}=1}^{\mathrm{n}} \rho \mathrm{v_i v_j} \frac{\partial \varphi_\mathrm{j}}{\partial \mathrm{x_i}}\, d\mathrm{x} + \nu \int_\Omega \nabla \mathrm{v} : \nabla \varphi d\mathrm{x} +$$

$$+ \varkappa \int_\Omega \nabla \mathrm{v}' : \nabla \varphi d\mathrm{x} + \varepsilon \int_\Omega \nabla \left(\Delta \mathrm{v}'\right) : \nabla \Delta \varphi d\mathrm{x} -$$

$$- \varkappa \int_\Omega \sum_{\mathrm{i,j,k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_k} \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \mathrm{x_j}} \frac{\partial^2 \varphi_\mathrm{j}}{\partial \mathrm{x_i} \partial \mathrm{x_k}}\, d\mathrm{x} - \varkappa \int_\Omega \sum_{\mathrm{i,j,k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_k} \frac{\partial \mathrm{v_j}}{\partial \mathrm{x_i}} \frac{\partial^2 \varphi_\mathrm{j}}{\partial \mathrm{x_i} \partial \mathrm{x_k}}\, d\mathrm{x} = \int_\Omega \rho \mathrm{f} \varphi d\mathrm{x}.$$

Последнее равенство имеет место для любой пробной функции $\varphi \in \mathrm{V}^3$. Положим $\varphi = \chi(\mathrm{t}), \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}]$, где $\chi \in \mathrm{C}^1([0,\mathrm{T}], \mathrm{V}^3)$, $\chi(\mathrm{T}) \equiv 0$. Проинтегрируем полученное равенство по t от 0 до T.

Предельный переход

$$-\int_0^T\int_\Omega \rho v\chi'\,dx\,dt-\int_\Omega \rho_0 b\chi(0)\,dx-\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n \rho v_i v_j\frac{\partial\chi_j}{\partial x_i}\,dx\,dt+$$
$$+\nu\int_0^T\int_\Omega \nabla v:\nabla\chi\,dx\,dt-\varkappa\int_0^T\int_\Omega \nabla v:\nabla\chi'\,dx\,dt-\varkappa\int_\Omega \nabla b:\nabla\chi(0)\,dx+$$
$$+\varepsilon\int_0^T\int_\Omega \nabla(\Delta v'):\nabla\Delta\chi\,dx\,dt-\varkappa\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\chi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx\,dt-$$
$$-\varkappa\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\chi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx\,dt=\int_0^T\int_\Omega \rho f\chi\,dx\,dt. \quad (23)$$

Аналогично, полагая в (20) функцию $\psi=\omega(t), t\in[0,T]$ (где $\omega\in C^1([0,T],W_2^1(\Omega))$ и $\omega(T)\equiv 0$) и интегрируя полученное равенство по $[0,T]$, получим

$$\int_0^T\int_\Omega \rho\omega'\,dx\,dt+\int_\Omega \rho_0\omega(0)\,dx+\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^n \rho v_i\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\,dx\,dt=0. \quad (24)$$

Предельный переход

Переходя в равенствах (23) и (24) и начальных условиях $v_\varepsilon(0) = b, \rho_\varepsilon(0) = \rho_o$ к пределу при $\varepsilon \to 0$ на основании указанных сходимостей, получаем, что предельная пара функций $v \in W_1, \rho \in L_\infty(Q_T)$ удовлетворяет равенствам (13),(14) и начальным условиям (15). Теорема 1 доказана.

В. Г. Звягин, М. В. Турбин, “Разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для неоднородной несжимаемой модели Фойгта с полной производной по времени”, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 525 (2025), 40–46

Спасибо за внимание!