Seifert fibration of billiard book bifurcations

Ведюшкина В.В.

3 марта 2026

1. Класс многообразий Зейферта: слои-окружности, достаточно хорошо примыкающие друг к другу.

2. Класс граф-многообразий Вальдхаузена.

3. Класс невырожденных изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем.

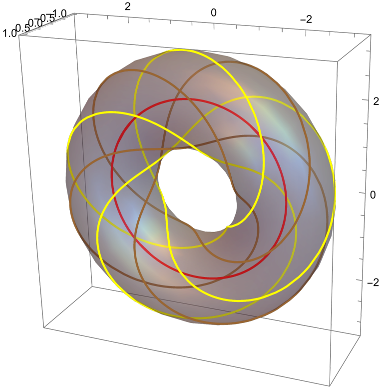
4. Класс многообразий склеенных из кусков двух типов – прямое произведение “штанов” на окружность и полноторий.

5. Три последних класса совпадают (теорема А.В. Браилова, С.В. Матвеева, А.Т. Фоменко, Х. Цишанга).

Расслоение Зейферта

1. Многообразие Зейферта – это трехмерное многообразие, которое можно представить в виде объединения попарно непересекающихся простых замкнутых кривых (слоёв).

2. Каждый слой имеет окрестность, целиком состоящую из слоёв, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию.



Граф-многообразия Вальдхаузена

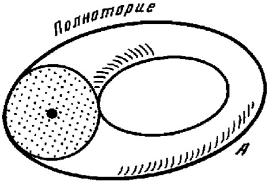
Класс всех ориентируемых компактных замкнутых 3-многообразий W таких, что

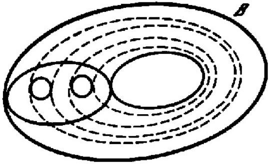
- W содержит некоторое множество непересекающихся 2-торов
- после выбрасывания этих торов из W получается открытое 3-многообразие, каждая связная компонента которого является расслоением Зейферта со слоем окружность над некоторым двумерным многообразием (возможно с границей и не обязательно ориентируемым).

Теорема (А.В. Браилов, С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко, Х. Цишанг)

Три следующих класса многообразий в действительности совпадают:

- *3-многообразия, склеенные из блоков двух типов, $Q^3 = aA^3 + bB^3$, где a и b – целые неотрицательные числа.*
- *граф-многообразия Вальдхаузена,*
- *изоэнергетические 3-поверхности интегрируемой гамильтоновой системы, интегрируемой при помощи боттовского интеграла.*





Слоение Лиувилля

- Пусть интегрируемая система $\dot{x}^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$ задана на симплектическом многообразии (M^4, ω) и обладает двумя интегралами H (гамильтониан) и F (дополнительный интеграл), которые почти всюду функционально независимы.
- Многообразие M^4 расслоено на изоэнергетические поверхности $Q^3 = \{x \in M^4 | H(c) = const\}$.
- Каждая неособая изоэнергетическая поверхность $Q^3 = \{x \in M^4 | H(c) = const\}$ в свою очередь расслоена на поверхности уровня функции F. Эти поверхности являются либо неособыми (F, H функционально независимы) либо критическими.
- В компактном случае неособый слой есть несвязное объединение нескольких торов Лиувилля.

Особые слои

Пусть выполнены следующие условия.

1. Изоэнергетическая поверхность Q^3 компактна и невырождена, т.е. $dH|_{Q^3} \neq 0$
2. Дополнительный интеграл F является функцией Ботта на Q^3 (т.е. его ограничение на двумерную трансверсаль к критической окружности является функцией Морса)
3. система нерезонансна на Q^3 (почти все торы нерезонансны, т.е. их обмотка иррациональна).

Окрестность особого слоя в изоэнергетической трехмерной поверхности является многообразием Зейферта, каждый слой которого лежит на некотором торе Лиувилля (или особом слое данного слоения). Если расслоение Зейферта имеет особые слои, то они могут иметь только тип $(2, 1)$.

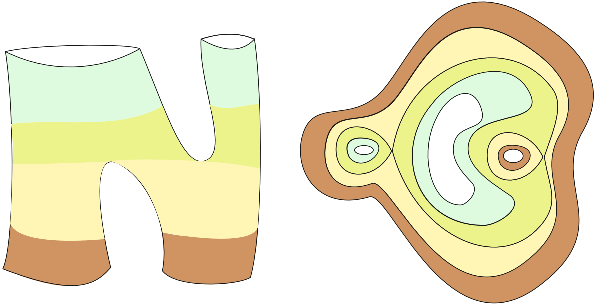
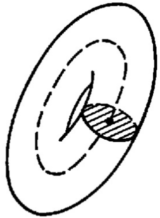
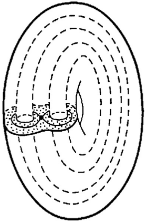
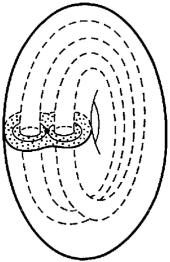


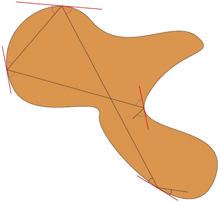
Рис.: Двумерная перестройка линии уровня функции Морса — 2-атом.

Окрестность особого слоя в изоэнергетической трехмерной поверхности является многообразием Зейферта, каждый слой которого лежит на некотором торе Лиувилля (или особом слое данного слоения). Если расслоение Зейферта имеет особые слои, то они могут иметь только тип $(2, 1)$.

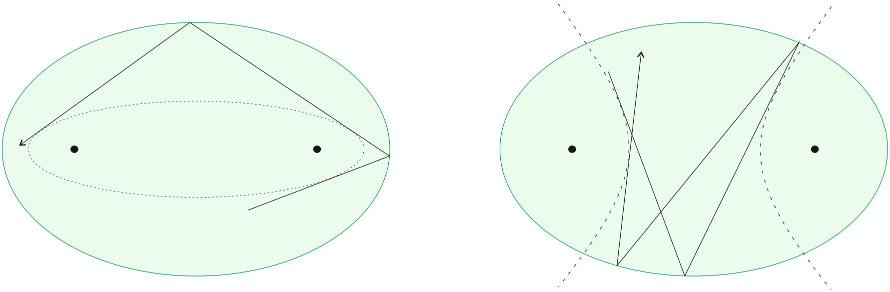
Биллиард в области

- Плоская область ограничена гладкой кривой.
- Закон биллиарда: угол падения равен углу отражения.



$M^4 := \{(x, v)| \quad x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2 \ , |v| > 0\}/\sim$
$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2|$ и $v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P$.
T_xP – касательная плоскость к границе области Ω в точке x
$|v|$ – евклидова длина вектора v

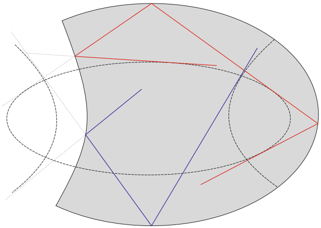
Дж.Биркгоф: биллиард в области, ограниченной эллипсом, интегрируем.



Семейство софокусных квадрик на плоскости $\mathbb{R}^2$ в координатах (x, y) зададим уравнением

$$x^2(b-\lambda)+y^2(a-\lambda)=(a-\lambda)(b-\lambda),$$

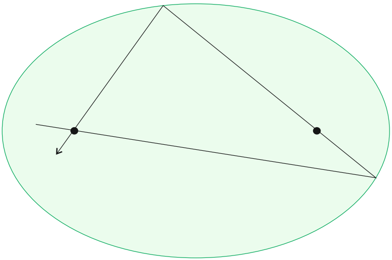
где $a>b>0$ – это параметры софокусного семейства.

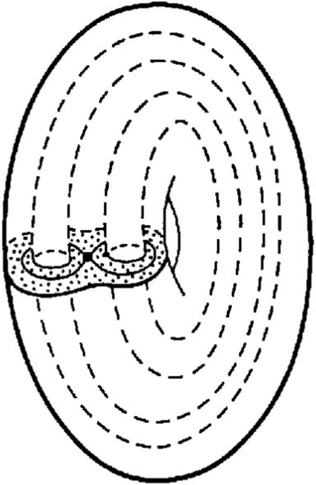


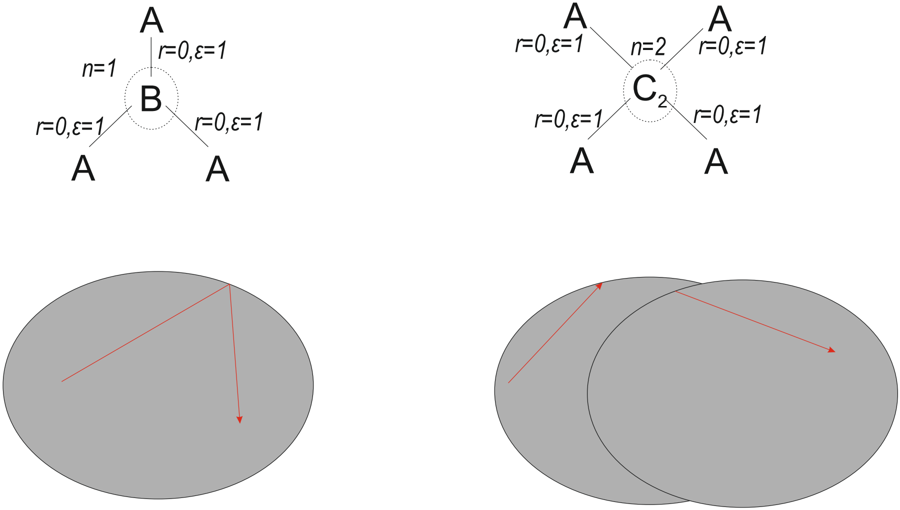
$$H=v_1^2+v_2^2$$

$$\Lambda=\frac{-(x_1v_2-x_2v_1)^2+v_1^2b+v_2^2a}{v_1^2+v_2^2}$$

Бифуркация *B* на особом слое.





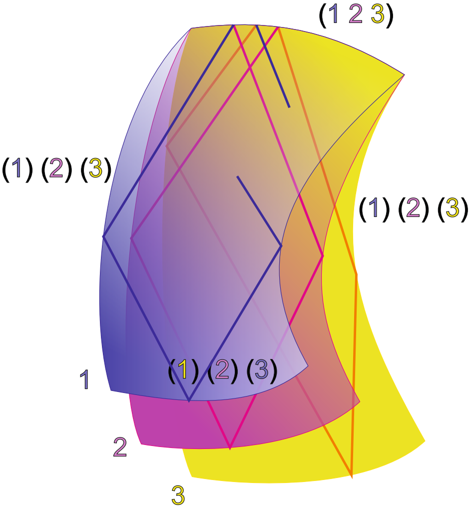


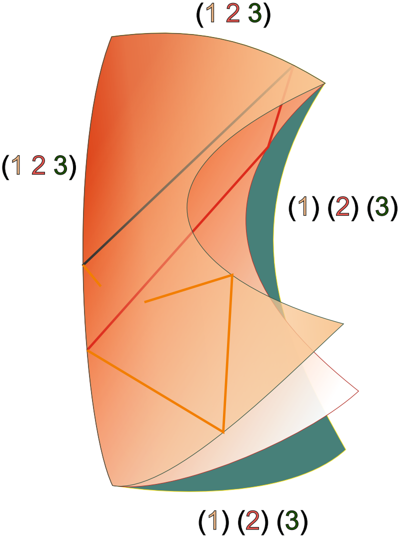
A
$r=0, \varepsilon=1$
$n=1$
B
$r=0, \varepsilon=1$
$r=0, \varepsilon=1$
A
A
A
A
$r=0, \varepsilon=1$
$n=2$
$r=0, \varepsilon=1$
C_2
$r=0, \varepsilon=1$
$r=0, \varepsilon=1$
A
A

Биллиардная книжка.

- Зафиксируем конечный набор плоских областей Ω_i, ограниченных дугами софокусных квадрик.
- Спроектируем данный набор на плоскость. Получим на плоскости набор кривых – образов границ областей.
- Каждой кривой припишем перестановку $\sigma \in S_n$.
- Если дуги α (с перестановкой σ_1) и β (с перестановкой σ_2) имеют общую точку, то потребуем, чтобы приписанные им перестановки коммутировали $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$
- Разложим перестановки в произведение независимых циклов.
- Склеим граничные дуги биллиардов Ω_i, если их номера i лежат в одном цикле перестановки σ.

Биллиардная книжка.





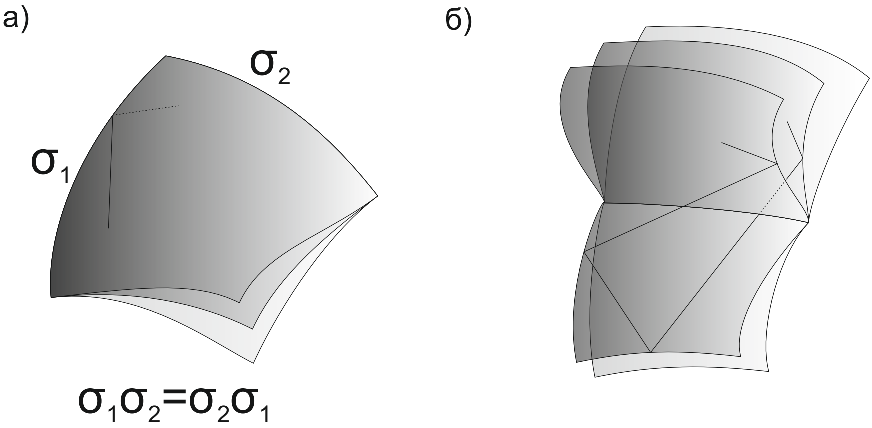
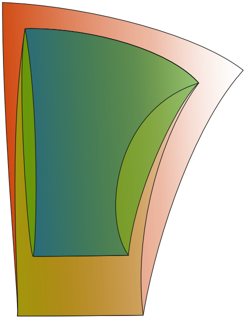
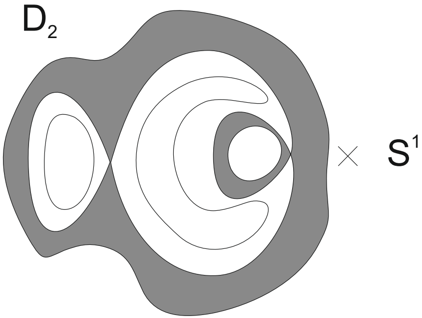


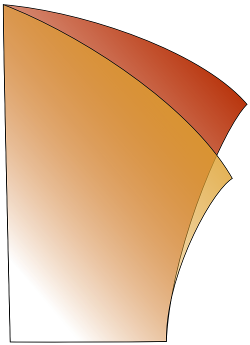
Рис.: Локальная структура окрестности вершины склейки биллиардной книжки.

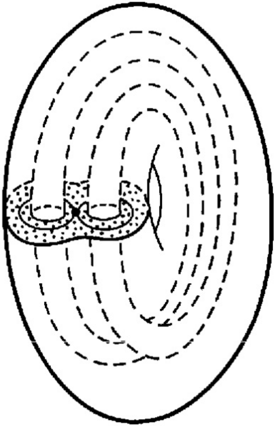
Теорема (И.Харчева, В.)

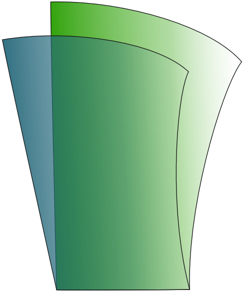
Для любого ориентируемого седлового 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов A_0', такая что слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла $\Lambda = b$ в изоэнергетической поверхности Q^3 этой книжки послойно гомеоморфно данному атому.

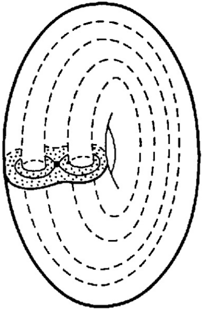


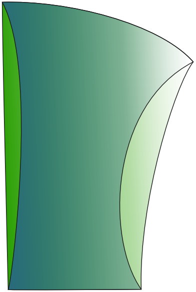












Изоэнергетические поверхности интегрируемых биллиардных книжек

1. Какие классы многообразий Вальдхаузена могут быть реализованы как изоэнергетические поверхности интегрируемых биллиардных книжек?

2. Верно ли что это многообразие всегда является многообразием Зейферта?

3. В инварианте Ф-Ц возможен произвольный набор r меток. Т.е. расслоение Зейферта (согласованное со слоением Лиувилля) на части изоэнергетической поверхности может иметь произвольный набор особенностей.

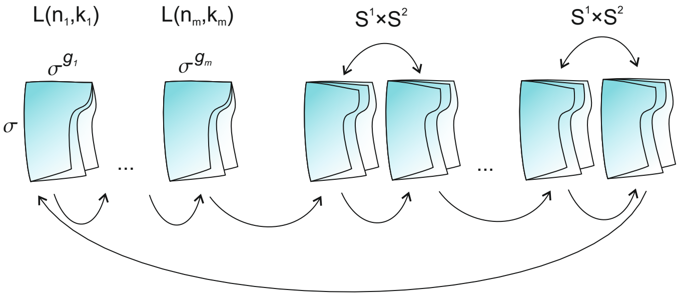
4. Поверхность Q^3 биллиардной книжки состоит не более чем из трёх частей, на каждой из которых слоение Лиувилля задаёт свой тип расслоения Зейферта.

Многообразия постоянной энергии Q^3 для топологических биллиардов (многообразий).

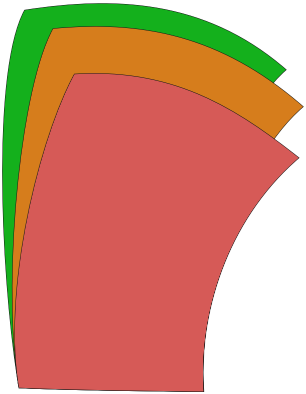
- Диск без конических точек $\Rightarrow Q^3 \simeq S^3$;
- сфера без конических точек $\Rightarrow Q^3 \simeq \mathbb{R}P^3$;
- кольцо $\Rightarrow Q^3 \simeq S^1 \times S^2$.
- диск Ω с одной конической точкой $\Rightarrow Q^3 \simeq \mathbb{R}P^3$;
- диск Ω с двумя коническими точками и границей-окружностью $\Rightarrow Q^3 \simeq \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$;
- сфера с двумя коническими точками $\Rightarrow Q^3 \simeq L(4, 1)$.
- сфера с тремя коническими точками – сферическое многообразие Зейферта, три особых слоя которого имеют тип (2,1).

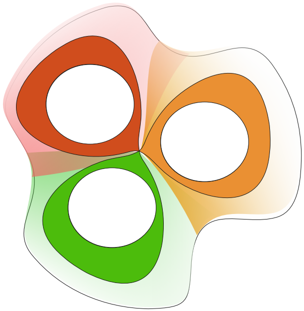
Теорема

Рассмотрим многообразие M, которое является связной суммой линзовых пространств $L(n_1, k_1)$, ... $L(n_m, k_m)$ и l прямых произведений $S^1 \times S^2$. Тогда алгоритмически строится биллиард, изоэнергетическая поверхность которого гомеоморфна многообразию M.

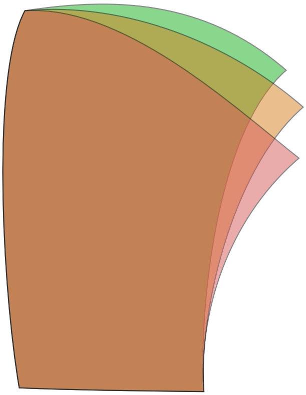


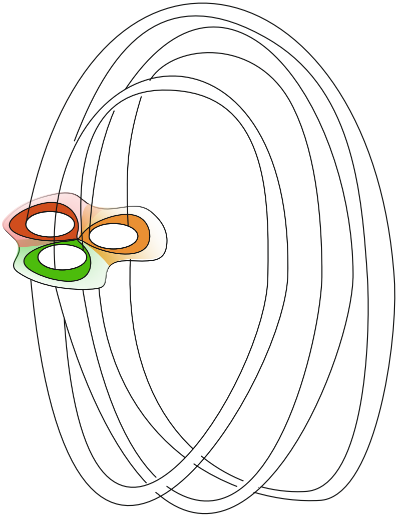
Биллиардные книжки позволяют реализовывать более сложные, “мультиседловые” бифуркации.





Критическое решение в соответствующем расслоении Зейферта вообще говоря, может обладать произвольным типом (p, q).





Теорема

Пусть дан вырожденный 3-атом некоторой интегрируемой гамильтоновой системы, который является расслоением Зейферта с базой некоторого ориентируемого 2-атома S, критический граф K которого содержит вершины произвольной четной степени, а на ребрах отмечены точки, отвечающие особым слоям расслоения Зейферта, имеющие произвольный тип. Тогда для такой трехмерной бифуркации алгоритмически строится биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов A_0', такая что её слоение Лиувилля на фокальном слое описывается заданным 3-атомом. Слои искомого слоения Зейеферта проектируются в дуги софокусных эллипсов.

Теорема

Пусть $\mathbb{B}(A_1)$ – связная биллиардная книжка, склеенная из выпуклых областей A_1, каждая из которых ограничена одной дугой эллипса и одной дугой гиперболы. Корешкам книжки приписаны коммутирующие перестановки ρ (эллиптической границе) и σ (гиперболической).
Рассмотрим перестановку $\omega = \sigma \circ \rho$ и разложим её в произведение независимых циклов. Перенумеруем листы биллиардной книжки так, чтобы

$$\omega = (1 \, .. \, k)(k+1 \, .. \, 2k) \, .. \, (n-k+1 \, .. \, n).$$

Тогда число $m = \frac{n}{k}$ (число независимых циклов в разложении перестановки ω) равно числу критических окружностей 3-атома, описывающего бифуркацию на фокальном уровне $\Lambda = b$. Сам атом имеет следующий вид в зависимости от перестановок σ и ρ.

1. *Если k нечетно, то атом на фокальном слое – это атом A^{*m}.*
2. *Если числа k и l четны (где $l = \rho^m(1)$), то атом принадлежит к серии максимально симметричных атомов Y_m.*
3. *Если число k четно, а число l нечётно, то атом принадлежит к серии максимально симметричных атомов X_m.*

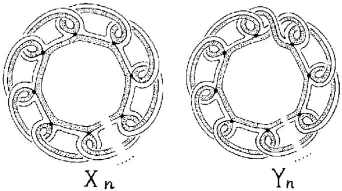


Рис.: Базы расслоения Зейферта максимально симметричных атомов серий X_n и Y_n.

Теорема

Пусть биллиардная книжка, листы которой ограничены дугами софокусных квадрик, такова, что длины циклов перестановки на фокальной прямой не превосходят двух (такие книжки назовём невырожденными). Рассмотрим траекторию, проходящую через фокус семейства квадрик. Тогда такая траектория либо лежит на торе, либо лежит на особом слое одного из трех атомов: X_n, Y_n *и* A^{*n}.

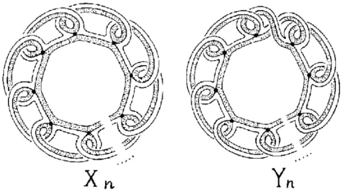


Рис.: Базы расслоения Зейферта максимально симметричных атомов серий X_n и Y_n.

Лиувиллева эквивалентность

Определение

Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4, обладающих, соответственно, интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2.
Рассмотрим изоэнергетические поверхности
$Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$.
Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует сохраняющий ориентацию послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \to Q_2^3$, который сохраняет ориентацию всех критических решений – окружностей.

Пусть $X = (Q^3, v = \mathrm{sgrad} H)$ интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы, ограниченная на изоэнергетическую поверхность $Q^3 = \{H = h = const\}$.
Дополнительный интеграл f на X является функцией Ботта на Q^3, при этом, во-первых, $dH|_Q^3 \neq 0$, а во-вторых, система X нерезонансна на Q^3.
Рассмотрим граф Риба функции f на многообразии Q^3. Ребра этого графа отвечают однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины – особым слоям.

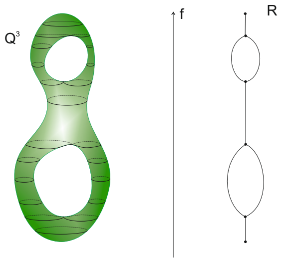


Рис.: Граф Риба R функции f на Q.

На ребре e_i, соединяющем два атома фиксируем диффеоморфизм граничных торов с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}.$$

Метки r и ε на этом ребре определяются следующими соотношениями:

$$r = \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \text{ если } \beta_i \neq 0, \text{ и } r = \infty \text{ иначе.}$$

$$\varepsilon = sign\ \beta_i, \text{ если } \beta_i \neq 0, \text{ и } \varepsilon = sign\ \alpha_i \text{ иначе.}$$

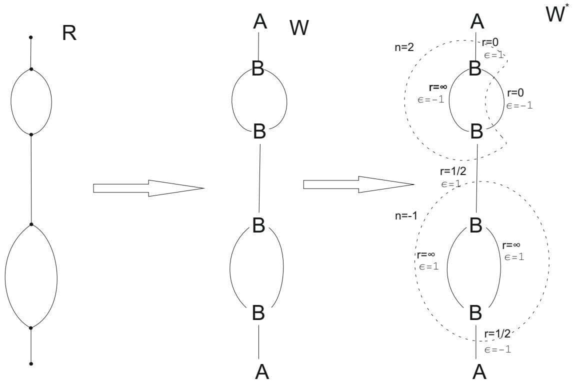
$$\Theta_i = \begin{cases} [\frac{\alpha_i}{\beta_i}], & \text{if } e_i \text{ – исходящее ребро,} \\ [-\frac{\delta_i}{\beta_i}], & \text{if } e_i \text{ – входящее ребро ,} \\ [-\frac{\gamma_i}{\alpha_i}], & \text{if } e_i \text{ – внутреннее ребро .} \end{cases}$$

Для семьи (многообразия Зейферта, база которого склеена из соответствующих 2-атомов) определяется метка $n = \sum \Theta_i$.

Теорема Фоменко–Цишанга.

Теорема

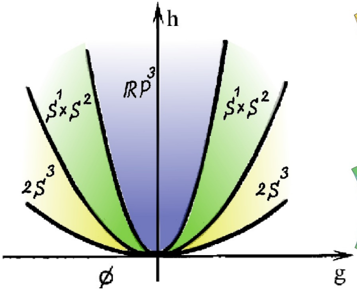
Две интегрируемые системы (Q_1^3, v_1) *и* (Q_2^3, v_2) *лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда когда их меченые молекулы* $W_1^* = (W_1, r_i, \varepsilon_i, n_k)$ *и* $W_2^* = (W_2, r_i, \varepsilon_i, n_k)$ *совпадают.*

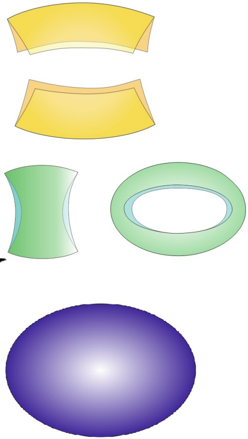


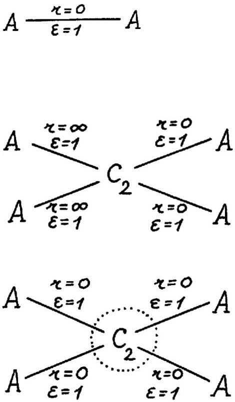
Простые примеры молекул

- Молекула A—A всегда задает 3-многообразие, склеенное из двух полноторий. Каждое из полноторий стандартным образом расслоено на 2-торы, что и задает слоение всего 3-многообразия на торы Лиувилля. Это слоение имеет ровно два особых слоя — окружности, являющиеся осями полноторий.
- Молекула A—A с меткой $r = 0$ задает трехмерную сферу S^3.
- Молекула A—A с меткой $r = \frac{1}{2}$ задает трехмерное проективное пространство RP^3.
- Молекула A—A с меткой $r = \infty$ задает прямое произведение $S^1 \times S^2$.
- Молекула A—A с меткой $r = \frac{q}{p}$, где $q < p$ и $p \geq 3$ задает линзовое пространство $L(p, q)$.

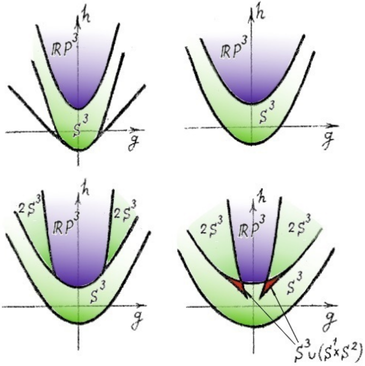
Случай Эйлера.

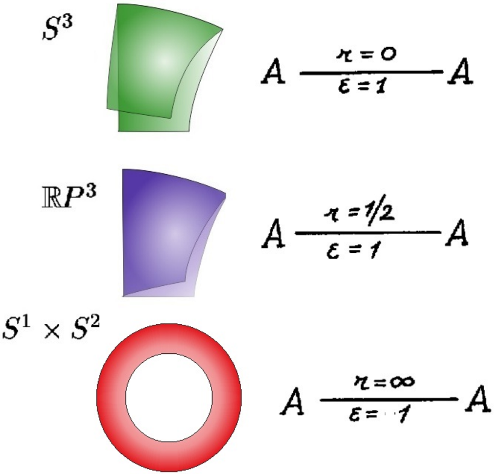




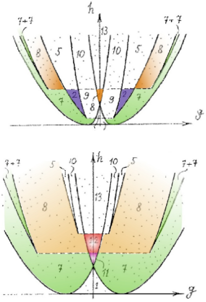


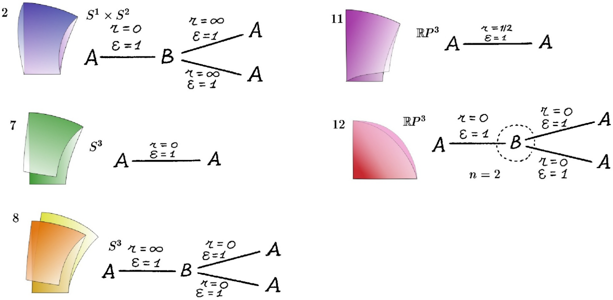
Случай Лагранжа.



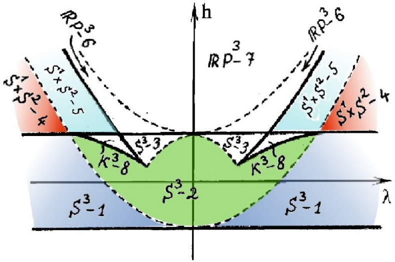


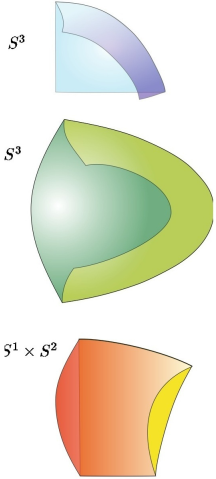
Случай Жуковского.

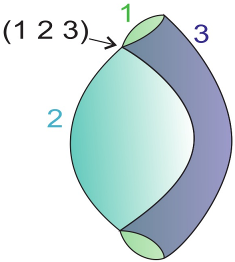




Случай Горячева–Чаплыгина–Сретенского.







Гипотеза А.Т.Фоменко:

А. Реализация бифуркаций Любая бифуркация двумерных торов Лиувилля в трехмерном изоэнергетическом многообразии любой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы может быть промоделирована топологическим интегрируемым биллиардом.

Гипотеза А.Т.Фоменко:

A. Реализация бифуркаций Любая бифуркация двумерных торов Лиувилля в трехмерном изоэнергетическом многообразии любой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы может быть промоделирована топологическим интегрируемым биллиардом.

B. Реализация баз слоений База любого слоения Лиувилля (т.е. одномерный граф, в вершинах которого указаны атомы) может быть реализована как база интегрируемого топологического биллиарда.

C. Реализация слоения Лиувилля Любое слоение Лиувилля невырожденной интегрируемой системы на изоэнергетической 3 поверхности лиувиллево эквивалентно слоению Лиувилля некоторого топологического биллиарда.

C. Реализация слоения Лиувилля Любое слоение Лиувилля невырожденной интегрируемой системы на изоэнергетической 3 поверхности лиувиллево эквивалентно слоению Лиувилля некоторого топологического биллиарда.

D. Изоэнергетические многообразия Любая замкнутая изоэнергетическая 3-поверхность любой невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы (т.е. многообразие Вальдхаузена) может быть реализована как изоэнергетическая поверхность некоторого топологического интегрируемого биллиарда.

Структура изоэнергетической поверхности. Общий вид инварианта ФЦ.

1. Изоэнергетическая поверхность невырожденной биллиардной книжки, листы которой ограничены дугами софокусных квадрик, разбивается на три куска.

2. Первые два из них отвечают траекториям (или их продолжениям), касающихся эллипсов и гипербол соответственно. Они имеют глобальную структуру расслоения Зейферта, слои которого проектируются в дуги софокусных эллипсов или соотв. гипербол.

3. Все метки между седловыми атомами в соответствующем инварианте Фоменко-Цишанга равны бесконечности.

4. Фокальный кусок содержит траектории, лежащие на фокальной прямой. Он может быть пустым. Тогда многообразие Вальдхаузена состоит ровно из двух многообразий Зейферта.

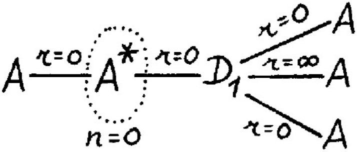
1. Каждая компонента связности фокального куска может принадлежать к одному из трех типов, в зависимости от характера критических траекторий. Все лежащие на фокальной прямой траектории либо лежат между фокусами (т.е. на вырожденном эллипсе), либо лежат вне фокусов (т.е. на вырожденной гиперболе), либо проходят через фокус.

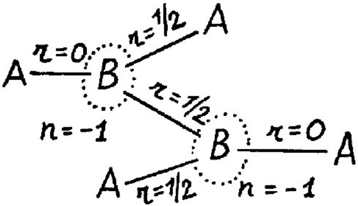
2. Если все особые траектории лежат между фокусами, то бифуркация может принимать вид произвольного 3-атома, а слои расслоения Зейферта проектируются в дуги эллипсов.

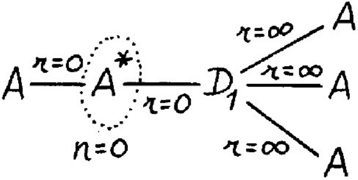
3. Если все особые траектории лежат на вырожденной гиперболе, то бифуркация может принимать вид произвольного 3-атома, а слои расслоения Зейферта проектируются в дуги гипербол.

4. Третий тип - траектории проходят через фокусы. В этом случае данная компонента связности послойно гомеоморфна 3-атому, принадлежащему лишь к одной из трех серий.

Инварианты Фоменко-Цишанга, кодирующие два различных слоения Лиувилля изоэнергетических поверхностей случая Горячева-Чаплыгина, которые не реализуются биллиардными книжками, ограниченными дугами софокусных квадрик.







Спасибо за внимание!

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №25-71-10087.