Вычисление порядков точек в главном дереве самоподобного дендрита

Юдин Иван Николаевич

ИМ СО РАН, Новосибирск

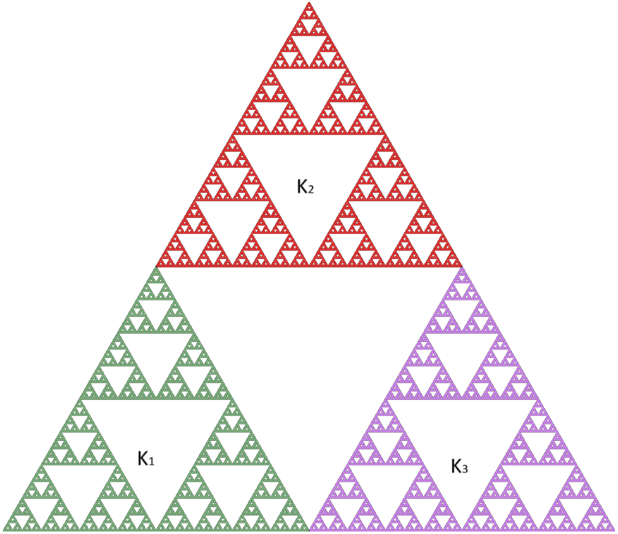
"Динамика в Сибири", 3 марта, 2026 г.

Аттрактор

Определение

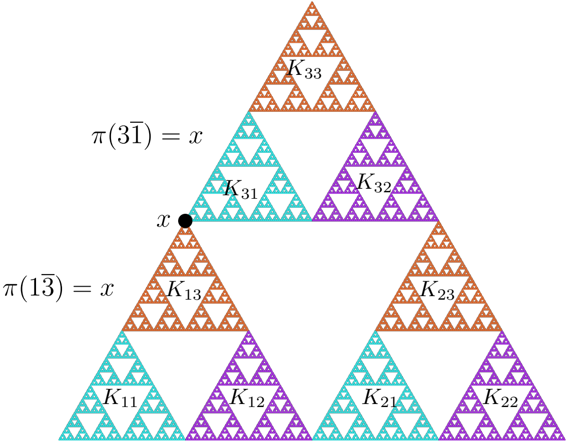
Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ *– система инъективных сжимающих отображений в полном метрическом пространстве* (X, d)*. Непустое компактное множество* $K \subset X$ *называется аттрактором системы* $\mathcal{S}$*, если* $K = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(K)$*.*

Система $\mathcal{S}$ задает *оператор Хатчинсона* $T(A) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(A)$.



Индексное пространство

Для системы $\mathcal{S} = \{S_1, S_2 \ldots, S_n\}$, множество $I = \{1, 2, ..., n\}$ — *множество индексов*, а $I^* = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I^k$ — множество *мультииндексов* $\boldsymbol{j} = j_1 j_2 ... j_k$.
Для $\boldsymbol{j} \in I^*$, $S_{\boldsymbol{j}} = S_{j_1} \circ S_{j_2} \circ \ldots \circ S_{j_k}$ и обозначаем $S_{\boldsymbol{j}}(K) = K_{\boldsymbol{j}}$.
Множество $I^\infty = \{\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \alpha_2 \ldots, \alpha_i \in I\}$ называется *индексным пространством* системы $\mathcal{S}$; отображение $\pi : I^\infty \to K$ $\pi(\boldsymbol{\alpha}) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ называется *индексным отображением*. Если $\pi(\boldsymbol{\alpha}) = x$, то $\boldsymbol{\alpha}$ называется *адресом* точки x.



Определение

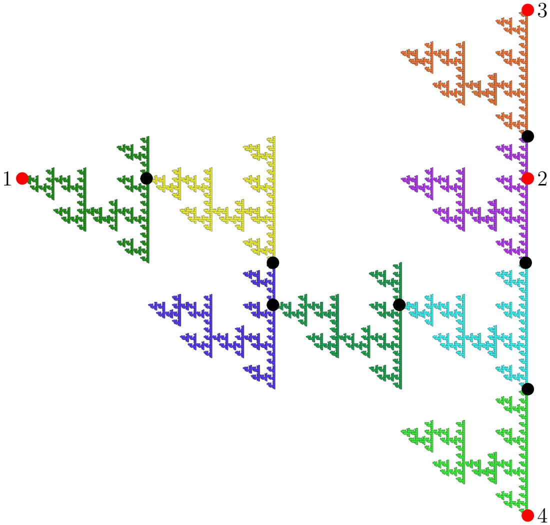
Критическим множеством называется множество точек $C = \bigcup_{i,j \in \mathcal{S}} S_i(K) \cap S_j(K)$

Определение

Самоподобной границей K *называется множество* $\partial K = \bigcup_{\boldsymbol{i} \in I^*} S_{\boldsymbol{i}}^{-1}(C)$

Определение

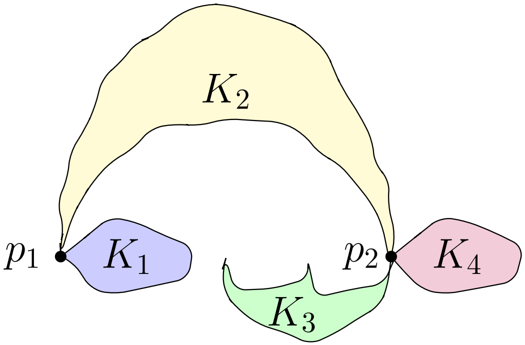
Локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых называется дендритом.



Свойство одноточечного пересечения

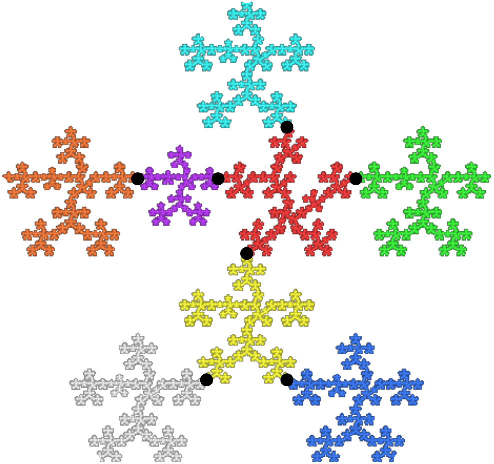
Определение

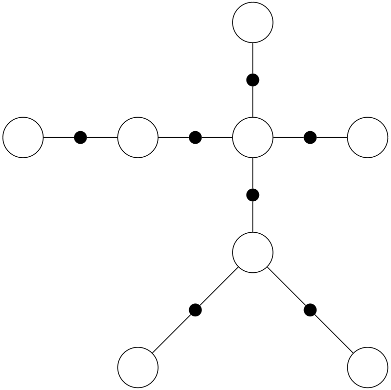
Пусть $\mathcal{K} = \{K_i, i \in I = \{1, \ldots, n\}\}$ *– конечная система континуумов в* X*. Мы говорим, что система* $\mathcal{K}$ *обладает* свойством одноточечного пересечения, *если для любых* $i \neq j \in I$, $K_i \cap K_j = \#P_{ij} \leq 1$.



Двудольный граф пересечений

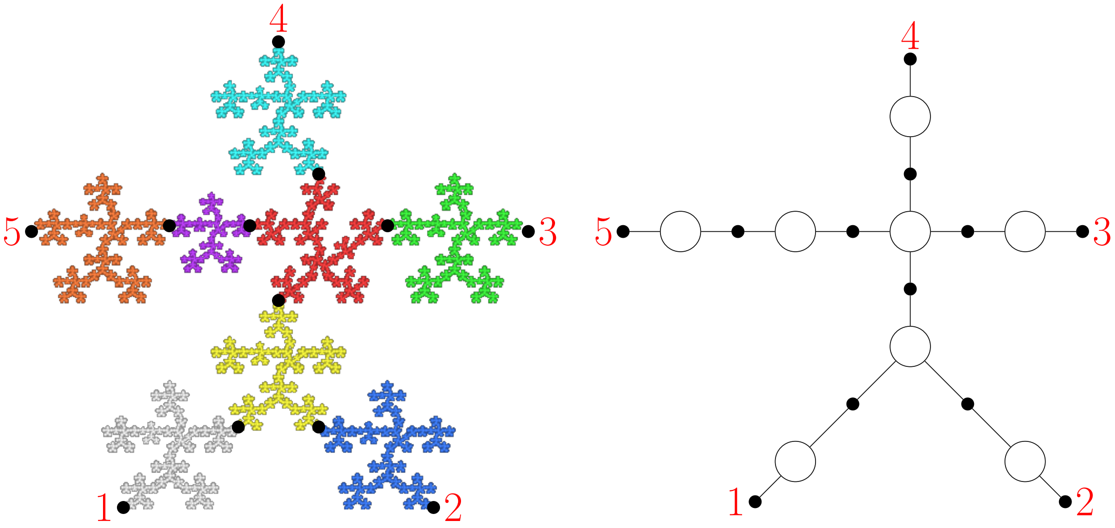
Для систем с одноточечным пересечением определим *граф пересечений* $\Gamma(\mathcal{K})$ как двудольный граф $(\mathcal{K}, R; E)$ с долями $\mathcal{K}$ и R, в котором ребро $\{K_i, r\} \in E$ тогда и только тогда, когда $r \in K_i$.





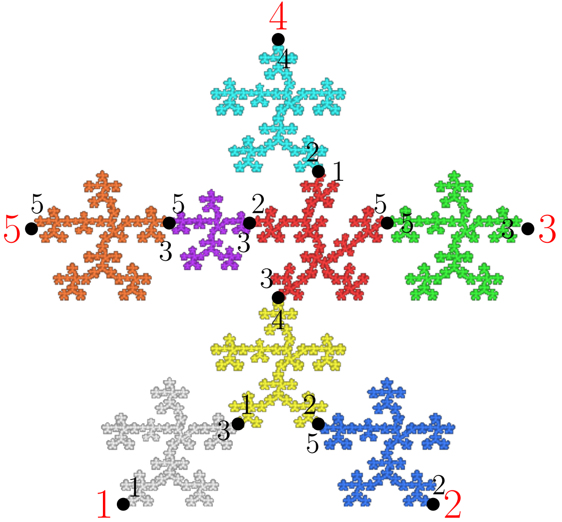
Двудольный граф пересечений

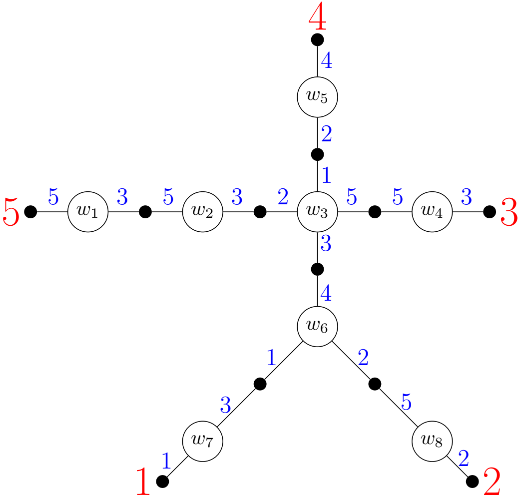
Для систем с одноточечным пересечением определим *граф пересечений* $\Gamma(\mathcal{K})$ как двудольный граф $(\mathcal{K}, R; E)$ с долями $\mathcal{K}$ и R, в котором ребро $\{K_i, r\} \in E$ тогда и только тогда, когда $r \in K_i$.



Двудольный граф пересечений

Для систем с одноточечным пересечением определим *граф пересечений* $\Gamma(\mathcal{K})$ как двудольный граф $(\mathcal{K}, R; E)$ с долями $\mathcal{K}$ и R, в котором ребро $\{K_i, r\} \in E$ тогда и только тогда, когда $r \in K_i$.



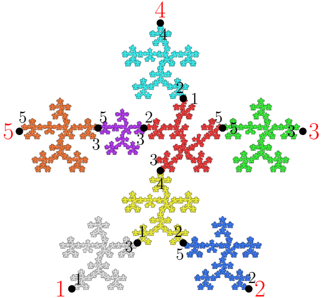


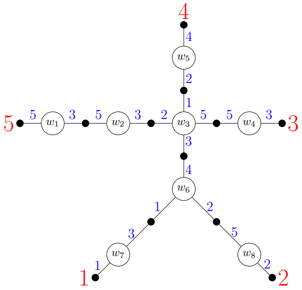
P-росток

Определение

Пусть $\Gamma = (B, W, E)$ — ациклический двудольный граф с долями (B, W). Пусть $P \subset B$ и $\varphi : E \to P$ сюрьекция такая, что для любого $w \in W$, сужение φ на множество $E(w) \subset E$ инъективно. Тогда пара (Γ, φ), называется P-ростком.

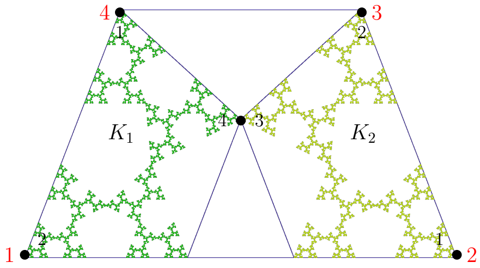
Критическим множеством ростка (Γ, φ) является множество $C = \{b \in B : \mathrm{Ord}(b, \Gamma) > 1\}$. Для вершины $b \in B$, обозначим $\widetilde{\varphi}(b)$ множество $\varphi(E(b))$ всех $p \in P$, соответствующих ребрам, инцидентным b. *Границей ростка* (Γ, φ) является множество $\partial\Gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}^n(C)$.

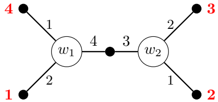


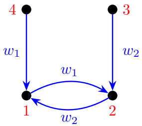


Определение

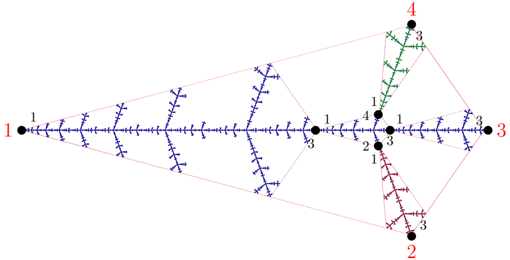
Индексной диаграммой P- ростка (Γ, φ) является орграф $\mathcal{G}_P = (P, \mathcal{E}, \hat{\varphi})$ с множеством черных отмеченных вершин P. Каждое ребро $e = (w_k, p_i) \in E_P$ с отметкой $\varphi(e) = p_j \in P$ задает ориентированное ребро $\vec{e} = (p_i, p_j) \in \mathcal{E}$ с отметкой $\hat{\varphi}(\vec{e}) = w_k$.

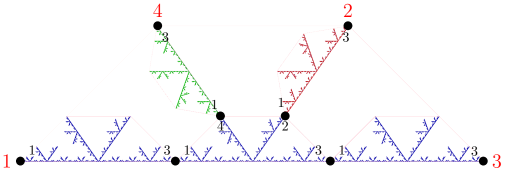


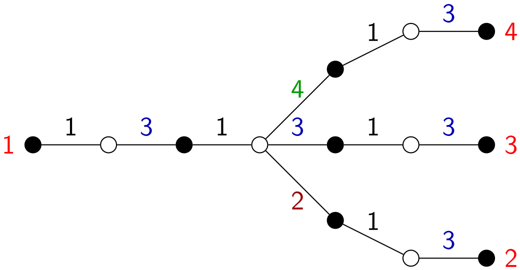




$$4 \xrightarrow{w_1} 1 \xrightarrow{w_1} 2 \xrightarrow{w_2} 1 \xrightarrow{w_1} 2 \longrightarrow \ldots$$

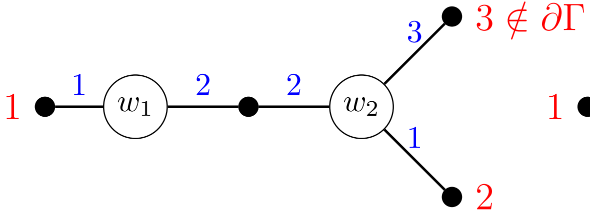

1
4
3
2

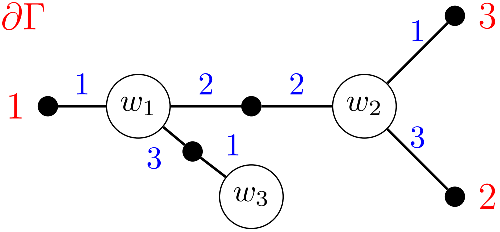

4
2
1
3


1
4
3
2

Корректно определенные и регулярные P-ростки

Росток (Γ, φ) называется *корректно определенным* если $\partial\Gamma = P$.
Если для любых $b \in B \setminus P$ и для любых $w \in W$, их степень в Γ больше 1, тогда (Γ, φ) называется *регулярным* ростком.
Два ростка $(\Gamma(B, W, E), \varphi : E \to P)$, $(\Gamma'(B', W', E'), \varphi' : E' \to P')$ являются изоморфными, если существует биекция $x \to x'$ между соответствующими множествами (см. выше), которая сохраняет отношение инцидентности и такая, что для любого $e \in E$, $(\varphi(e))' = \varphi'(e')$.

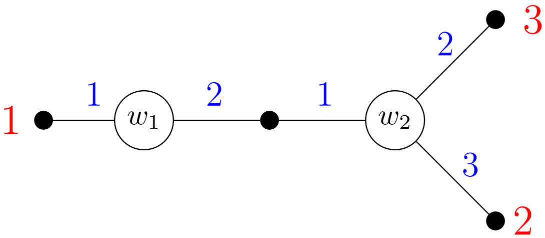


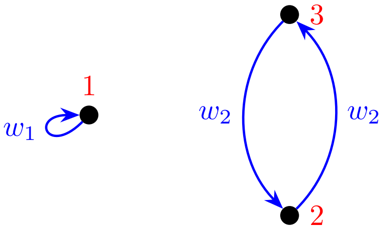


Допустимый росток

Определение

P-росток Γ является допустимым, если не существует двух граничных точек с одинаковым адресом.





Определение

Let $\mathcal{G} = (P, \mathcal{E})$ — орграф. Последовательность вершин или ребер $\omega(p_0, p_k) = (p_0, \vec{e_1}, p_1, \dots \vec{e_k}, p_k)$ называется маршрутом *из p_0 в p_k в $\mathcal{G}$ если для любого $i = 1, ..., k$, $\vec{e_i} = (p_{i-1}, p_i)$. Если $p_0 = p_k$, то ω —* цикл *и его вершины p_i называются* циклическими *.*

Обозначим $\omega(p, ...)$ — маршрут с началом в p, $\omega(..., q)$ — маршрут с концом в q .

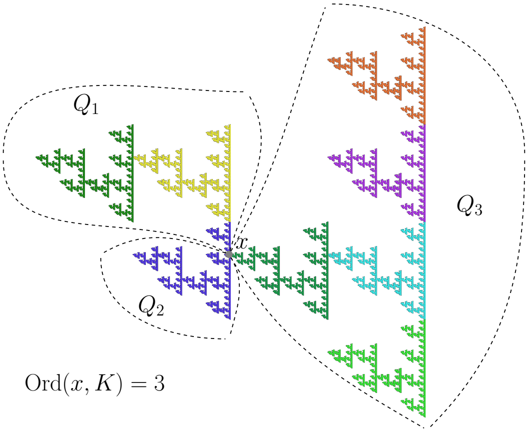
Обозначим $\omega(p, \sigma)$ маршрут, чей бесконечный подмаршрут содержится в σ.

Обозначим через $\Omega(p, q)$ множество всех маршрутов $\omega(p, q)$.
$\Omega(p)$ — множество всех бесконечных маршрутов с начальной вершиной $p \in P$.
$\Omega(p, \sigma)$ — множество всех бесконечных маршрутов $\omega(p, \sigma)$.

Порядок точки

Замечание

Если K является дендритом, то порядок $\mathrm{Ord}(x, K)$ точки $x \in K$ равен числу связных компонент $K \setminus \{x\}$. Точки порядка 1 будем называть концами, точки порядка ≥ 2 — разбивающими точками, а точки порядка ≥ 3 — точками ветвления.



Множество маршрутов = множество адресов

$K(\mathcal{S})$ — самоподобный дендрит с конечной границей P, $\Gamma(\mathcal{S})$ его росток, и $\mathcal{G}_P$ — индексная диаграмма.
Пусть $\omega(p_0, p_k) = (p_0, \vec{e_1}, \ldots \vec{e_k}, p_k)$ — маршрут в $\mathcal{G}_P$ и $\hat{\varphi}(\vec{e_j}) = w_{i_j}$. Тогда $p_0 = S_{\mathbf{i_1 i_2} \ldots i_k}(p_k)$.
$\hat{\varphi}(\omega) = i_1 i_2 \ldots i_k$ — мультииндекс, заданный маршрутом ω.
Бесконечный маршрут $\omega(p_0, \ldots) = (p_0, \vec{e_1}, p_1, \vec{e_2} \ldots)$ в $\mathcal{G}_P$ задает строку $\hat{\varphi}(\omega) = \alpha = i_1 i_2 \ldots$.

Лемма

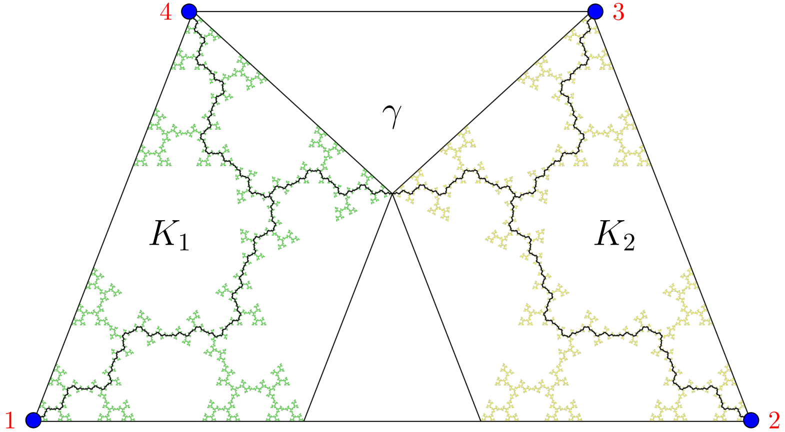
Строка $\hat{\varphi}(\omega) = i_1 i_2 \ldots$, является адресом точки p_0 в K и $\pi^{-1}(p_0) = \hat{\varphi}(\Omega(p_0))$.

Лемма

Пусть $x \in K$.
$\mathrm{Ord}(x, K) \geq \#\pi^{-1}(x)$, *если множество адресов* $\pi^{-1}(x)$ *конечно;*
$\mathrm{Ord}(x, K)$ *бесконечен, если множество адресов* $\pi^{-1}(x)$ *бесконечно.*

Определение

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ *– система сжимающих отображений и аттрактор* K *является дендритом. Тогда минимальный связный подконтинуум* γ*, который содержит все граничные точки аттрактора* K*, называется* главным деревом



Основные утверждения, связанные с $\hat{\gamma}$

Предложение

Пусть аттрактор K системы $\mathcal{S}$ является самоподобным дендритом с конечной границей ∂K и $\Gamma(\mathcal{S})$ — его P-росток.
1) Для любого $x \in K \setminus G_{\mathcal{S}}(\partial K)$, $\mathrm{Ord}(x, K) \leq \#P$.
2) Для любого $x \in K \setminus G_{\mathcal{S}}(\partial K)$, существует $\mathrm{i} \in I^*$ такой, что $\mathrm{Ord}(x, K) = \mathrm{Ord}(x, S_{\mathrm{i}}(\hat{\gamma}))$.
3) $CP(K) \subset G_{\mathcal{S}}(\hat{\gamma})$.
4) Каждая точка ветвления $x \in K \setminus G_{\mathcal{S}}(\partial K)$ имеет единственный предпериодический адрес K
5) $\hat{\gamma} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(\hat{\gamma})$.

Определение

Пусть $\mathcal{G}$ — конечный орграф и p, p_1 — некоторые вершины в $\mathcal{G}$.
Скажем, что $p \prec p_1$ если p является предшественником p_1 и p_1 не является предшественником p.
Для цикла σ в $\mathcal{G}$, который не содержит вершину p, будем писать $p \prec \sigma$, если существует вершина p_1 в σ такая, что $p \prec p_1$ и $p_1 \not\prec p$. Пусть $p \preceq \sigma$, если $p \prec \sigma$ или $p \in \sigma$.
Для двух непересекающихся циклов σ_1, σ_2, скажем, что $\sigma_1 \prec \sigma_2$, если существует p_1 in σ_1 и p_2 в σ_2 такие, что $p_1 \prec p_2$.
Если вершина p_1 в σ_1 является предшественником p_2 в σ_2 и p_2 является предшественником p_1, тогда p_1 или σ_1 и p_2 или σ_2 связаны.
Если $\sigma_1 \not\prec \sigma_2$ и $\sigma_2 \not\prec \sigma_1$, циклы σ_1 и σ_2 независимы.

Предложение

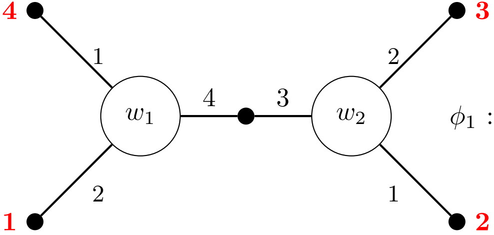
Пусть $\mathcal{G}_P = (P, \mathcal{E}, \hat{\varphi})$ *— индексная диаграмма ростка* $\Gamma(\mathcal{S})$ *и* $p \in P$*.*

1) *Если все циклы* σ_k *in* $\mathcal{G}_P$ *для которых* $p \prec \sigma_k$*, независимы, то все бесконечные маршруты* $\omega(p, \ldots)$ *в* $\mathcal{G}_P$ *являются препериодическими и множество* $\Omega(p)$ *конечно для любого* $p \in P$*. Существует равномерная оценка* M *для* $\#\Omega(p), p \in P$*.*
2) *Если существуют циклы* σ_1 *и* σ_2 *в* $\mathcal{G}_P$ *такие, что* $p \preceq \sigma_1$ *и* $\sigma_1 \prec \sigma_2$*, тогда* $\Omega(p)$ *бесконечно .*
3) *Если* $p \preceq \sigma_0$*,* $p \preceq \sigma_1$ *и* σ_0, σ_1 *связаны, тогда* $\Omega(p)$ *несчетно.*
4) *Если* $p \notin \sigma$ *и* p *связаны с* σ*, тогда* $\Omega(p)$ *несчетно.*

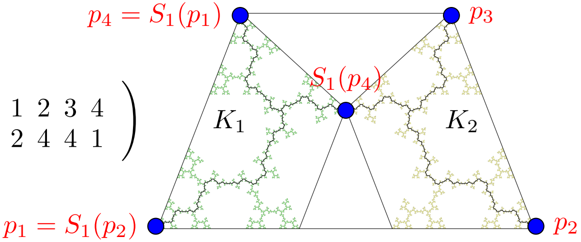
Полугруппа G_ϕ

Для белой вершины $w_i \in W$, определим частичную перестановку $\phi_i \in \mathcal{PT}_P$ с областью определения $\mathrm{dom}(\phi_i) = P$ следующим образом:
$\phi_i(p_1) = \varphi(e)$, если $e = (b, w_i) \in E$, где $p_1 w_1 \dots b w_i$ — последовательность вершин, соответствующая пути, который соединяет вершины $p_1 =$ и w_i. Пусть G_ϕ – полугруппа, порожденная $\{\phi_i : w_i \in W\}$.
И пусть для $i_1 i_2 \dots i_p = \mathrm{i} \in I^*$, $\phi_{\mathrm{i}} = \phi_{i_p} \circ \dots \circ \phi_{i_2} \circ \phi_{i_1}$
Для адреса $\alpha = j_1 ... j_k ....$ определим

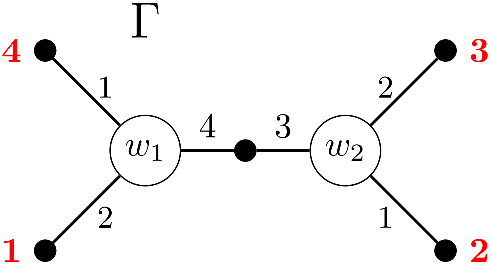
$$N_\phi(\alpha) = \lim_{k\to\infty} \#(\phi_{j_k} \cdot ... \cdot \phi_{j_1}(P))$$

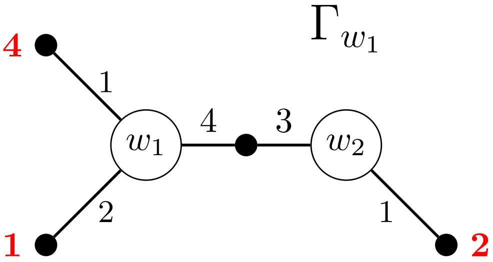


$$\phi_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

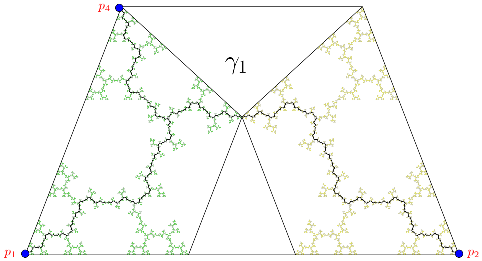


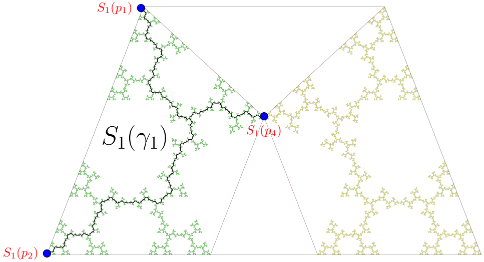
Для белой вершины w_i мы определим граф Γ_i, который является минимальным связным подграфом ростка Γ, который содержит $\phi_i(P)$.





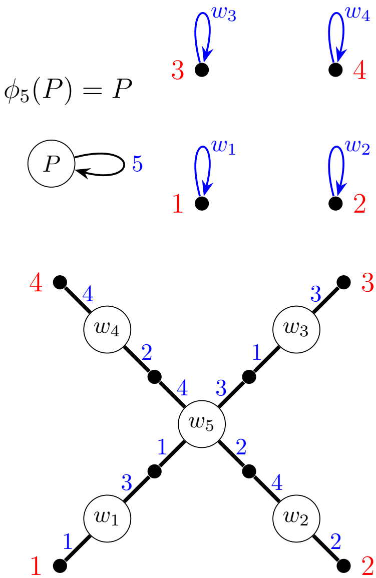
Каждому преобразованию ϕ_i, примененному к P, можно поставить в соответствие отображение $\phi_i^* : \mathcal{T}(\gamma) \to \mathcal{T}(\gamma)$, определенное следующим образом: $\phi_i^*(\hat{\gamma}(P')) = \hat{\gamma}(\phi_i(P'))$ для любого $P' \subset P$.
Из определения ϕ_i следует, что $i \in I$, $S_i(\phi_i(P')) = \hat{\gamma}(P') \cap S_i(P')$. Следовательно, $S_i(\phi_i^*(\gamma)) = \gamma \cap K_i$.

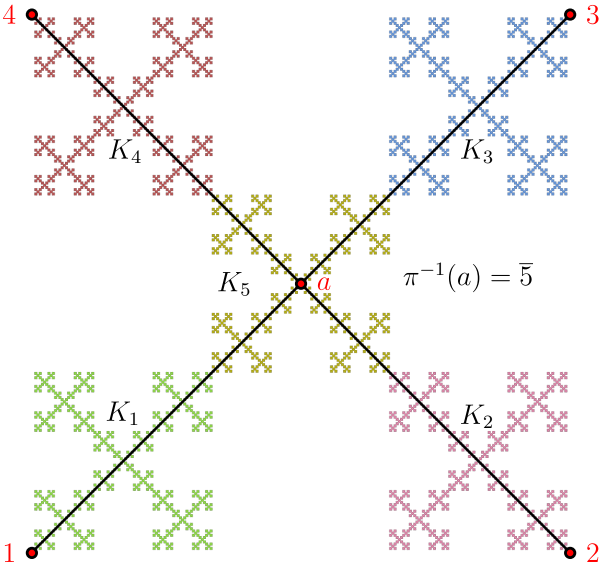




Как найти адреса точек ветвления?

$\phi_5(P) = P$





$\pi^{-1}(a) = \overline{5}$

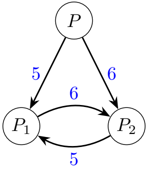
Граф переходов

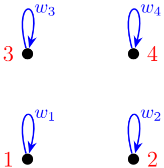
Граф G_T —граф переходов P-ростка Γ.

Его вершинами являются :
1) множества $P_i = \phi_{\boldsymbol{j}}(P)$ такие, что $\#P_i \geq 3$;
2) точки $b \in B$, $\deg(b, \Gamma) \geq 3$;
3) точки $p \in P$, $\deg(p, \Gamma) \geq 2$
Пусть Γ_{P_i} — это минимальный связный подграф Γ, который содержит P_i.
В G_T есть ребро $P \xrightarrow{j} P_i$, если $P_i = \phi_j(P)$.
Есть ребро $P_i \xrightarrow{j} P_k$, если $P_k = \phi_j(P_i)$.
Есть ребро $P_i \to b$, если $b \in B \setminus P_i$, $\deg(b, \Gamma_{P_i}) \geq 3$.
Есть ребро $P_i \to p$, если $p \in P_i$, $\deg(p, \Gamma_{P_i}) \geq 2$.

$$\phi_5(P) = \{1,2,3\} = P_1,\ \phi_6(P) = \{1,3,4\} = P_2$$

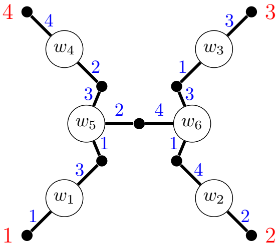
$$\phi_6(P_1) = P_2,\ \phi_5(P_2) = P_1$$

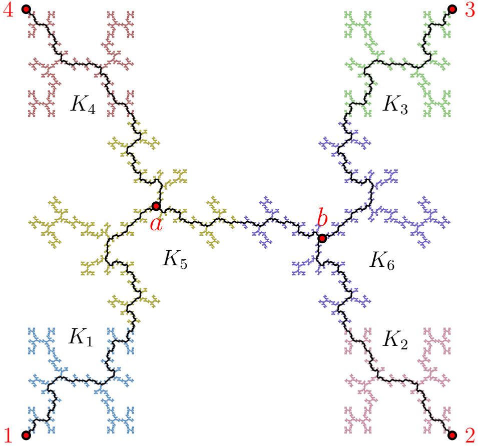




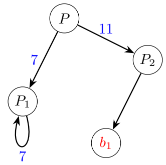
$$\pi^{-1}(a) = \overline{56}$$

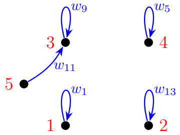
$$\pi^{-1}(b) = \overline{65}$$



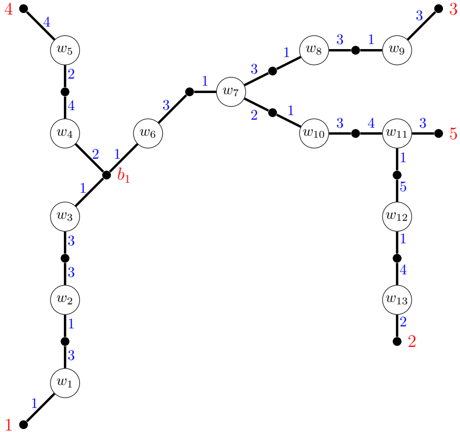


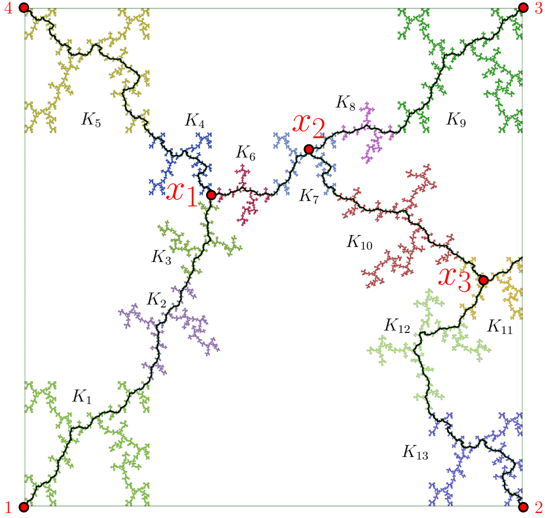
$\phi_7(P) = \{1,2,3\} = P_1,\ \phi_{11}(P) = \{1,3,4\} = P_2, \phi_7(P_1) = P_1$

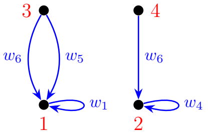


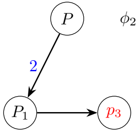


$$\pi^{-1}(x_2) = \overline{7}$$
$$\pi^{-1}(x_1) = \{3\overline{1}, 6\overline{1}, 4\overline{(13)}\}$$
$$x_3 = S_{11}(x_1),\ \pi^{-1}(x_3) = \{(11)3\overline{1}, (11)6\overline{1}, (11)4\overline{(13)}\}$$





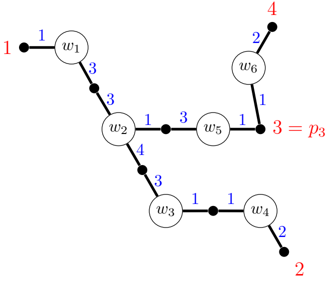


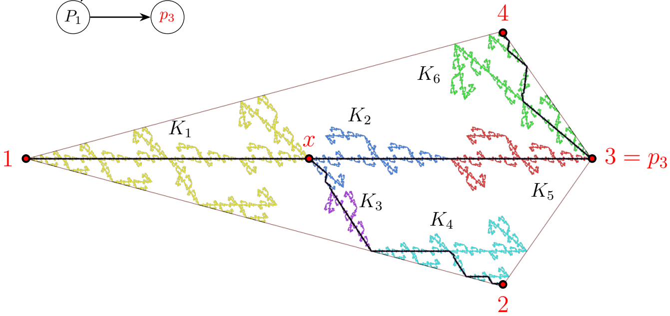


$\phi_2(P) = P_1$

$\pi^{-1}(p_3) = \{5\bar{1}, 6\bar{1}\}$

$x = S_2(p_3),\ \pi^{-1}(x) = \{25\bar{1}, 26\bar{1}, 15\bar{1}, 16\bar{1}\}$





Теорема

Пусть (Γ, φ) *— регулярный* P*-росток, определяющий самоподобный дендрит* K.

1) *Если* x *— граничная точка с единственным адресом* α*, тогда* $\mathrm{Ord}(x, \hat{\gamma}) = N_\phi(\alpha) - 1$
2) *Если* $x \in \hat{\gamma} \setminus \partial K$ *является точкой ветвления главного дерева и имеет единственный адрес* α*, тогда* $\mathrm{Ord}(x, \hat{\gamma}) = N_\phi(\alpha)$
3) *Если* x *— граничная точка или точка ветвления главного дерева, которая имеет* n *адресов,* $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ *таких, что для любого* $i = 1, \ldots n$*,* $N_\phi(\alpha^i) > 1$*, то* $\mathrm{Ord}(x, \hat{\gamma}) = \sum\limits_{i=1}^{n} N_\phi(\alpha^i) - n$.

Порядок граничных точек в аттракторе

Теорема

Пусть (Γ, φ) *— регулярный* P*-росток и* $\mathcal{G}_P = (P, \mathcal{E}, \hat{\varphi})$ *— индексная диаграмма ростка* Γ*, в которой все циклы независимы. Если граничная точка* x *имеет* n *адресов,* $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ *то* $\mathrm{Ord}(x, K) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ord}(x_i, \hat{\gamma})$*, где* x_i *—* k*-ый предшественник* x*, который является неподвижной точкой (имеет периодический адрес).*

Следствие

Если две вершины $p_1, p_2 \in P$ *принадлежат одному циклу, то* $\mathrm{Ord}(p_1, K) = \mathrm{Ord}(p_2, K)$*.*

Теорема

Пусть (Γ, φ) *— регулярный* P*-росток и* $\mathcal{G}_P = (P, \mathcal{E}, \hat{\varphi})$ *— индексная диаграмма ростка* Γ*, в которой все циклы независимы.*

1) *Если точка* $x \in C$*,* $x = \bigcap\limits_{j=1}^{n} K_{i_j}$ *то* $\mathrm{Ord}(x, K) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{Ord}(x_j, K)$*, где* x_j *— предшественник* x*.*
2) *Если точка* $x \in K$*,* $x = \bigcap\limits_{j=1}^{n} K_{\boldsymbol{i}_j}$ *и* $\bigwedge\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{i}_j = \boldsymbol{i}$ *то* $\mathrm{Ord}(x, K) = \mathrm{Ord}(y, K)$*, где* $x = S_{\boldsymbol{i}}(y)$*.*

Спасибо за внимание!