РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ, 2013

28 – 31 августа, 2013 года

Тезисы Международной конференции

Новосибирск, 2013

УДК 514, 515.1, 517.938, 517.958

ББК 22.15

Д 548

ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ, 2013: Тезисы Международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2013. — 106 с.

ISBN 978-5-86134-141-7

Настоящее издание содержит тезисы Международной конференции по геометрии и топологии, прошедшей с 28 по 31 августа 2013 года в городе Новосибирске. Представлены доклады, относящиеся к следующим актуальным направлениям современной математики: дифференциальная геометрия, геометрия и топология трехмерных многообразий, анализ на многообразиях, приложения геометрии и топологии.

Сборник представляет интерес для научных работников и аспирантов, которые специализируются в указанных областях науки.

Конференция проводится при участии Лаборатории Геометрических методов математической физики МГУ им. М. В. Ломоносова, Российского фонда фундаментальных исследований, Фонда некоммерческих программ "Династия".

Редакторы: Ю. Г. Решетняк, А. Ю. Веснин

Ответственный редактор: Н. В. Абросимов

GEOMETRY DAYS IN NOVOSIBIRSK, 2013: Abstracts of the International Conference. Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2013. — 106 p.

Editors Yu. G. Reshetnyak, A. Yu. Vesnin, N. V. Abrosimov

$Д \frac{1602050000 - 4}{Я82(03) - 2013}$

ISBN 978-5-86134-141-7

Содержание

Contents

КЛАССИФИКАЦИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ РОДА 1 МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ

АЛЁНА АНДРЕЕВНА АКИМОВА

Теория виртуальных узлов была разработана Луисом Кауфманом в 1996 г., см. [1].

Определение. *Диаграмма виртуального узла — это плоский четырехвалентный граф, каждая вершина которого снабжена структурой либо классического перекрестка типа проход-переход, либо виртуального перекрестка (обычно обозначается кружком).*

Диаграмма виртуального узла минимальна, если суммарное число её классических и виртуальных перекрестков не превосходит числа классических и виртуальных перекрестков любой диаграммы любого узла, эквивалентного данному.

Мы решаем задачу табулирования виртуальных узлов рода 1, минимальные диаграммы которых имеют не более 5 классических перекрестков. Начинаем с построения узлов в $T \times I$ с помощью трёхступенчатого перебора (сначала — регулярных графов степени 4, потом — отвечающих им проекций на торе, затем — диаграмм на торе). То, что полученные узлы различны, доказываем с помощью аналога (для узлов в $T \times I$) полинома Кауффмана [2,3]. На последнем этапе мы преобразуем диаграммы узлов на T в диаграммы виртуальных узлов на плоскости.

Автор выражает благодарность профессору С.В. Матвееву за постановку задачи и помощь в её решении.

Определение. *Виртуальный узел — класс эквивалентности четырехвалентных плоских диаграмм (регулярных четырехвалентных графов с дополнительной структурой в перекрестках), у которых, помимо обычных перекрестков типа (проход-переход), разрешены также перекрестки нового типа, называемые виртуальными.*

Виртуальный узел также можно определить как произвольную простую замкнутую кривую в $S \times I$, где S — замкнутая ориентируемая поверхность, I — отрезок. При этом два узла $K \subset S \times I$, $K' \subset S' \times I$ эквивалентны, если от одного к другому можно перейти гомеоморфизмами и преобразованиями стабилизации и дестабилизации.

Определение. *Две виртуальные диаграммы называются эквивалентными, если существует последовательность обобщенных движений Райдемайстера, переводящая первую диаграмму во вторую.*

Список обобщенных движений Райдемайстера следующий: классические движения Райдемайстера, относящиеся только к классическим перекресткам, виртуальные версии движений Райдемайстера $\Omega_1', \Omega_2', \Omega_3'$ и полувиртуальная версия третьего движения Райдемайстера Ω_3'', см. рис. 1.

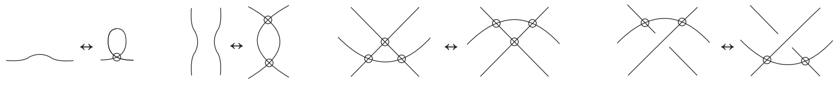


Рис. 1. Виртуальные версии движений Райдемайстера $\Omega_1', \Omega_2', \Omega_3'$ и полувиртуальная версия третьего движения Райдемайстера Ω_3''

Определение. *Будем называть узел $K \subset T \times I$ составным, если K относится к одному из следующих двух типов:*

(1) *K — связная сумма узла в $T \times I$ и нетривиального узла в S^3.*

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00748, грантом НШ-1414.2012.1 по государственной поддержке ведущих научных школ, а также грантом 12-Т-1-1003/2 ОМН РАН..

(2) *K — нетривиальная круговая связная сумма узлов в $T \times I$, см. [4].*

Узел в $T \times I$ —- примарный, если он не является составным.

Мы будем включать в таблицу только примарные узлы.

Теорема. *Существуют ровно 90 различных примарных виртуальных узлов рода 1 с не более чем 5 классическими перекрестками. (См. рис. 2).*

Доказательство этой теоремы состоит в переборе диаграмм на торе в порядке возрастания числа перекрестков и одновременном отбрасывании дубликатов. Различность полученных узлов в $T \times I$ доказывается с помощью вычисления их обобщенных полиномов Кауффмана. Затем мы преобразуем диаграммы узлов на T в диаграммы виртуальных узлов на плоскости.

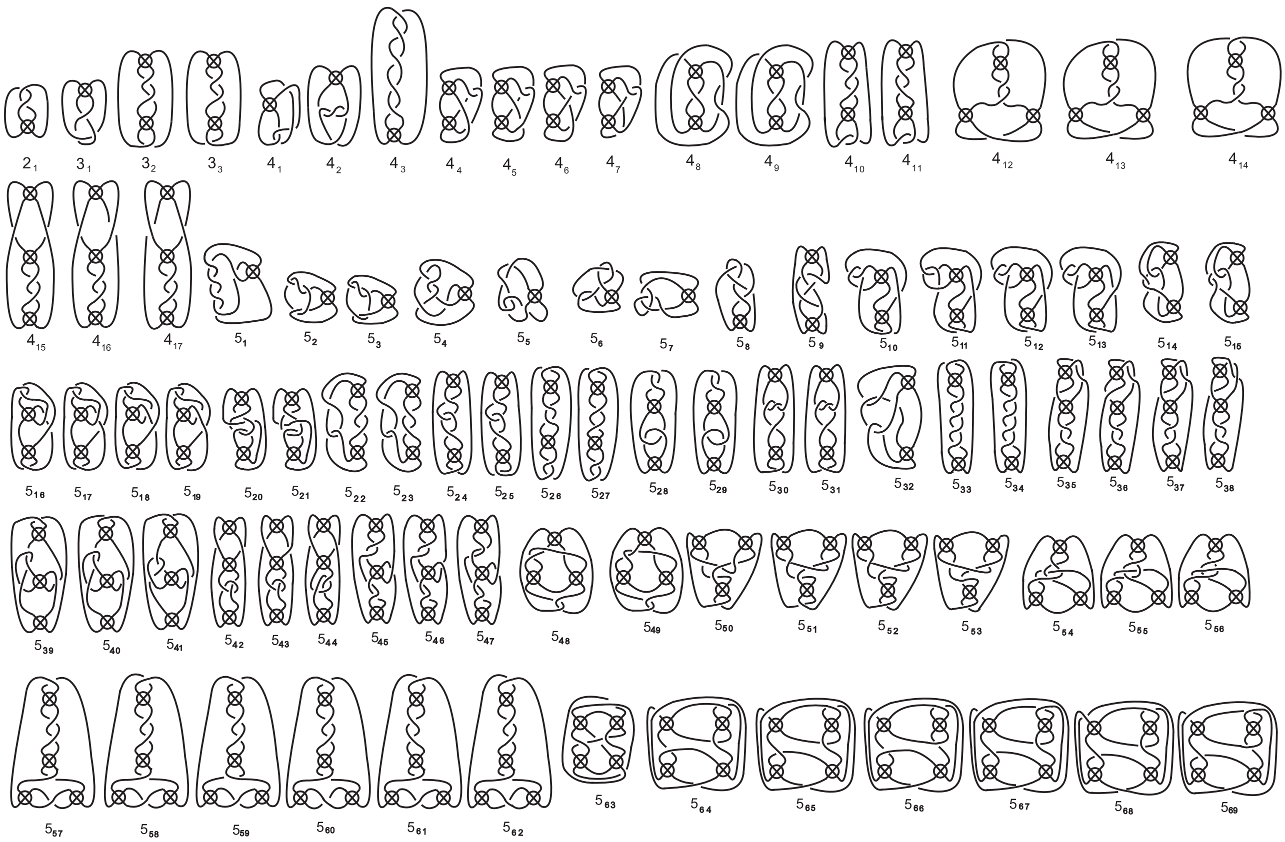


Рис. 2. Виртуальные узлы рода 1, имеющие не более пяти классических перекрестков

Список литературы

[1] Kauffman L.H., "Virtual knot theory", *Eur. J. Comb*, 20, No. 7, 663–691 (1999).

[2] Прасолов В.В., Сосинский А.Б., *Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия*, М.: МЦНМО, (1997).

[3] Акимова А.А., Матвеев С.В., "Классификация узлов малой сложности в утолщённом торе", *Вестник НГУ*, 12, No. 3 (2012).

[4] Matveev, S.V., "Prime decompositions of knots in $T \times I$", *Topology and its Applications* , 159, No. 7 (2012).

ЮУрГУ, г. Челябинск, 454000, Россия
E-mail address: akimova_susu@mail.ru

ТОПОЛОГИЯ G-ПРОСТРАНСТВ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПО БУЗЕМАНУ

ПАВЕЛ ДМИТРИЕВИЧ АНДРЕЕВ

Класс G-пространств вводится в книге Г. Буземана [1]. Под G-пространством Буземана мы понимаем конечно компактное геодезическое пространство, в котором выполняются свойства локальной продолжаемости отрезков и единственности продолжения отрезков.

Пусть задано G-пространство X с метрикой d. Для любой точки $p \in X$ определена величина $\rho(p)$, равная максимальному радиусу открытого шара с центром p, в котором выполнено свойство продолжения отрезков. Величина $\rho(p)$ является положительным числом или равняется $+\infty$. В последнем случае $\rho(x) = +\infty$ для любой точки $x \in X$. Такое G-пространство, в котором $\rho(x) = +\infty$ для всех точек называется прямым пространством. Подробный обзор исследований по геометрии G-пространств и современного состояния теории приведён в [2].

Также в книге [1] даётся определение пространств неположительной кривизны. Геодезическое пространство X называется пространством неположительной кривизны по Буземану, если каждая его точка обладает окрестностью, в которой длина средней линии любого треугольника не превосходит половины длины соответствующего основания.

Основной результат, представленный в докладе, содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть X — прямое пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Тогда X гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$ при некотором натуральном n.*

Теорема 1 подтверждает истинность в классе G-пространств неположительной кривизны по Буземану гипотезы Буземана, согласно которой всякое G-пространство имеет конечную топологическую размерность n и при этом является n-мерным топологическим многообразием.

Доказательство теоремы 1 основывается на применении конструкции касательного конуса, обобщающей касательные пространства в геометрии римановых многообразий.

Пусть (X, d) — прямое пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Зафиксируем точку $p \in X$. Для произвольного $t > 1$ определим на множестве X следующую метрику d_t. Для точки $x \in X$ будем обозначать x_t точку на отрезке $[p_1 x]$, для которой $d(p, x_t) = d(p, x)/t$. Метрика d_t определяется равенством

$$d_t(y, z) = t \cdot d(y_t, z_t).$$

Лемма 1. *Для любых $y, z \in X$ существует предел*

$$d^*(x, y) = \lim_{t \to +\infty} d_t(x, y).$$

При этом функция d^* является метрикой на X.

Метрическое пространство (X, d^*) называется касательным конусом к пространству X в точке p и обозначается $K_p X$. Метрические свойства конуса $K_p X$ описываются следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть (X, d) — прямое пространство неположительной кривизны в смысле Буземана, $p \in X$ — фиксированная точка. Тогда пространство $K_p X = (X, d^*)$ также является прямым пространством неположительной кривизны в смысле Буземана, причём*

- *для любых $y, z \in X$ выполнено неравенство $d^*(y, z) \leq d(y, z)$;*
- *отображение $\mathrm{Id} : X \to X$ является гомеоморфизмом пространства (X, d) на (X, d^*);*

- *семейство прямых в смысле метрики d^*, проходящих через точку p совпадает с аналогичным семейством прямых в смысле метрики d, причём вдоль каждой такой прямой выполняется равенство $d = d^*$;*
- *на пространстве (X, d^*) действует группа H положительных гомотетий с центром p.*

Важен частный случай касательного конуса K_pX, когда пространство X само допускает действие группы положительных гомотетий с центром $q \neq p$. Такое пространство будем называть пространством конического типа с вершиной q. Эквивалентное условие: пространство (X, d) является пространством конического типа с вершиной $q \in X$ тогда и только тогда, когда тождественное отображение $\mathrm{Id} : X \to K_qX$ является изометрией. Свойства касательного конуса к пространству конического типа перечисляются в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть X — прямое пространство неположительной кривизны в смысле Буземана, являющееся пространством конического типа с вершиной q. Тогда для произвольной точки $p \neq q$ и касательного конуса K_pX существует прямое пространство неположительной кривизны конического типа (Y, d_Y) и гомеоморфизм $\Psi : K_pX \to Y \times \mathbb{R}^1$, причём выполняются следующие утверждения.*

- *Через каждую точку в K_pX проходит прямая, параллельная pq.*
- *Пространство Y изометрично множеству прямых в K_pX, параллельных pq, с метрикой Хаусдорфа.*
- *На K_pX действует группа $\Gamma = H \cdot T$, где H — группа положительных гомотетий, и T — группа параллельных переносов, изоморфная $\mathbb{R}^1$.*
- *Группа H действует положительными гомотетиями на сомножителе Y, а T — параллельными переносами на $\mathbb{R}^1$.*
- *Множество вершин конуса K_pX содержит прямую pq.*

Доказательство теоремы 1 возникает как результат последовательного применения теорем 2 и 3 к пространствам цепочки

$$X \to K_{p_1}X \to K_{p_2}K_{p_1}X \to \dots,$$

которая в итоге обрывается в силу конечной компактности исходного пространства.

Список литературы

[1] Г. Буземан, *Геометрия геодезических*, М. Физматлит, (1962).

[2] V. N. Berestovskiĭ, D. M. Halverson, D. Repovš, “Locally G-homogeneous Busemann G-spaces”, *Diff. Geom. Appl.*, 29, 299–318 (2011).

Северный (Арктический) Федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Архангельск, 163002, Россия

E-mail address: pdandreev@mail.ru

О ТЕОРЕМЕ АЛЕКСАНДРОВА СУЩЕСТВОВАНИЯ МНОГОГРАННИКА

ДЕНИС ВЛАДИМИРОВИЧ АРХАРОВ, АЛЕКСЕЙ МИХАЙЛОВИЧ ГУРИН, ЛЕОНИД ВИКТОРОВИЧ ПЕТРОВ, АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ ПОПОВ, АЛЕКСАНДР СЕМЁНОВИЧ ЧЁРНЫЙ

Знаменитая теорема А.Д. Александрова, о существовании выпуклого многогранника в трехмерном евклидовом пространстве с заданной метрикой Александрова [1], сопровождается ясным определением и примерами. Тем не менее, кажется противоречивым сделанное в формулировке теоремы замечание о возможных "переламываниях" отдельных многоугольников развертки при построении из развертки соответствующего многогранника. Сделав же обратную операцию, "разворачивание" совокупности истинных граней, составляющих поверхность многогранника, в развертку, получим развертку Александрова, которая составлена из многоугольников — истинных граней многогранкка.

Исследования Есауловой (рукопись 1946 года, краткий реферат рукописи можно найти в [2]) класса выпуклых многогранников с правильными гранями показали, что многие развертки Александрова, составленные из правильных многоугольников, при сворачивании их в тот или иной многогранник дают многогранники, некоторые грани которых отличны от правильных многоугольников. Таким образом, развертки выпуклых многогранников с правильными гранями Джонсона суть подмножество всех возможных разверток Александрова, составленных из правильных многоугольников. Например, если развертка Александрова составлена из правильных граней и имеет ровно шесть вершин, то это одна из девяти неизоморфных между собой разверток. Но только три из девяти возможных разверток Александрова с шестью вершинами и правильными гранями реализуются выпуклыми многогранниками, где каждая истинная грань многогранника суть правильный многоугольник.

Исследования В.А. Залгаллера [2] простых выпуклых многогранников с правильными гранями дали примеры, когда вместо переламывания многоугольников развертки, необходимо "выпрямление" двух соседних многоугольников в одну истинную грань с условным ребром между ними. Также им предложены примеры многогранников, у которых каждая истинная грань отлична от правильного многоугольника, а многоугольники развертки все правильные. В данном сообщении предлагается новая

Теорема. *Существуют развертки Александрова, составленные из правильных многоугольников, реализация которых тем или иным выпуклым многогранником возможна лишь при переламывании каждого правильного многоугольника развертки в неправильный, так что каждая истинная грань многогранника отлична от правильного многоугольника и не может быть разбита условными ребрами на правильные многоугольники.*

Для доказательства теоремы приводится пример развертки Александрова, составленной из шести правильных треугольников и двух квадратов, и приводятся координаты вершин многогранника с указанной разверткой.

Аналогично теореме Есауловой о конечности числа выпуклых многогранников с правильными гранями, которые остаются после выделения из множества всех многогранников двух бесконечных рядов многогранников, доказывается теорема о конечности разверток Александрова, составленных из правильных многоугольников и еще нескольких бесконечных рядов разверток. Каждая развертка Александрова реализуется по теореме существования Александрова выпуклым многогранником.

Список литературы

[1] А.Д. Александров, “Выпуклые многогранники”, М.-Л., (1950). Перевод: A.D. Alexandrov, “Convex Polyhedra”. Springer. Monographs in Mathematics. (2005). Второе издание: А.Д. Александров, “Выпуклые многогранники”, избранные труды, том 2, Новосибирск, Наука, (2007).

[2] А.М. Гурин, В.А. Залгаллер, “К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных”, *Труды Санкт-Петербургского математического общества*, **14**, 215–292 (2008).

Харьковский национальный университет им.Каразина, Харьков, 61000, Украина
E-mail address: alexgu@ya.ru

КОРОНЫ ПЯТИУГОЛЬНИКОВ

ОЛЬГА ГЕОРГИЕВНА БАГИНА

Рассматривается задача замощения плоскости конгруэнтными выпуклыми пятиугольниками. Будем называть пятиугольник мозаичным, если существует замощение плоскости пятиугольниками, конгруэнтными данному, такое, что никакие два пятиугольника не имеют общих внутренних точек. Замощенную таким образом плоскость называют мозаикой, а сам пятиугольник — плиткой этой мозаики.

Известно 14 типов мозаичных пятиугольников [1–3], но не известно полон ли этот список.

Мозаика называется **нормальной** (мозаикой «ребро к ребру»), если пересечение любых двух смежных ее плиток является ребром или вершиной каждой из них.

В работах [1], [2], [4] была получена полная классификация выпуклых пятиугольников, замощающих плоскость нормально.

Короной для плитки P называется некоторое множество $K(P)$ плиток, конгруэнтных P, удовлетворяющее условиям:

1) плитки $K(P)$ замощают часть V плоскости;

2) плитка Р содержится внутри V;

3) $K(P)$ минимально с этими двумя условиями.

Если плитки короны образуют нормальное замощение V, то корона называется нормальной.

Пусть X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 — последовательные вершины пятиугольника P , его углы — соответственно x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.

Назовем **степенью** вершины плитки P число сходящихся в ней пятиугольников. Степень вершины не может быть меньше трех. Пусть $(\alpha_0, \ldots, \alpha_4)$ — набор степеней всех вершин плитки P, упорядоченных по возрастанию. В [1], [2] было доказано,что в любой нормальной пятиугольной мозаике найдется хотя бы один пятиугольник, для которого набор степеней вершин может быть одним из следующих: $(3, 3, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 3, 3, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 5)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$.

Здесь мы рассмотрим задачу вычисления пятиугольников, имеющих нормальные короны. При этом не требуется существования мозаик из этих пятиугольников.

Назовем число плиток, входящих в корону плитки P, **весом** короны $K = K(P)$. Обозначим вес короны символом $v(K)$ или просто v. Понятно, что $v \geq 6$. В зависимости от веса короны плитки P поставленная задача разбивается на следующие случаи.

1. Если $v \leq 8$, то набор степеней вершин плитки P один из следующих: $(3, 3, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 3, 3, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 5)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$. Этот случай полностью рассмотрен в [1], [2].

Тогда, если пятиугольник P имеет нормальную корону, то либо P замощает плоскость нормально, либо P имеет один из 22 наборов углов:

1. $x_0 = 180° - x_4, x_1 = 90° + x_4/2, x_2 = 180° - x_4, x_3 = 90° + x_4/2$;
2. $x_0 = 90°, x_1 = 135°, x_2 = x_4 = 112,5°, x_3 = 90°$;
3. $x_0 = x_1 = x_3 = 120°$, $x_2 = x_4 = 90°$;
4. $x_0 = 140°$, $x_1 = 80°$, $x_2 \approx 117,88°$, $x_3 = 120°$, $x_4 \approx 82,12°$;
5. $x_0 = 120°$, $x_1 \approx 84,74°$, $x_2 = 120°$, $x_3 = 120°$, $x_4 \approx 95,26°$;
6. $x_0 \approx 141,33°$, $x_1 \approx 77,34°$, $x_2 \approx 102,66°$, $x_3 \approx 154,67°$, $x_4 \approx 64°$;
7. $x_0 \approx 141,33°$, $x_1 \approx 77,34°$, $x_2 \approx 122°$, $x_3 \approx 116°$, $x_4 \approx 83,33°$;
8. $x_0 = 150°$, $x_1 = 90°$, $x_2 = 105°$, $x_3 = 120°$, $x_4 = 75°$.
9. $x_0 \approx 93,1°, x_1 = 120°, x_2 \approx 133,5°, x_3 \approx 73,5°, x_4 \approx 120°$;

10. $x_0 \approx 94,6^\circ, x_1 \approx 113,6^\circ, x_2 \approx 132,7^\circ, x_3 \approx 75,9^\circ, x_4 \approx 123,2^\circ$;
11. $x_0 \approx 88,71^\circ, x_1 \approx 135,65^\circ, x_2 \approx 74,78^\circ, x_3 \approx 135,65^\circ, x_4 \approx 105,22^\circ$;
12. $x_0 \approx 81,2^\circ, x_1 \approx 139,4^\circ, x_2 \approx 69,7^\circ, x_3 \approx 139,4^\circ, x_4 \approx 110,3^\circ$;
13. $x_0 = x_1 = x_3 = 120^\circ, x_2 \approx 94,34^\circ, x_4 \approx 85,66^\circ$;
14. $x_0 \approx 108,28^\circ, x_1 \approx 125,86^\circ, x_2 \approx 78,05^\circ, x_3 \approx 140,98^\circ, x_4 \approx 86,83^\circ$;
15. $x_0 \approx 129,13^\circ, x_1 = 90^\circ, x_2 \approx 101,74^\circ, x_3 = 135^\circ, x_4 \approx 84,13^\circ$;
16. $x_0 \approx 126,42^\circ, x_1 \approx 77,86^\circ, x_2 \approx 107,15^\circ, x_3 \approx 141,07^\circ, x_4 \approx 87,49^\circ$;
17. $x_0 \approx 83,3^\circ, x_1 = 120^\circ, x_2 \approx 78,3^\circ, x_3 \approx 138,4^\circ, x_4 = 120^\circ$;
18. $x_0 \approx 124,23^\circ, x_1 \approx 82,82^\circ, x_2 \approx 111,54^\circ, x_3 \approx 124,23^\circ, x_4 \approx 97,18^\circ$;
19. $x_0 \approx 75,96^\circ, x_1 \approx 142,02^\circ, x_2 \approx 66,05^\circ, x_3 \approx 142,02^\circ, x_4 \approx 113,95^\circ$;
20. $x_0 \approx 85,88^\circ, x_1 \approx 137,06^\circ, x_2 \approx 68,53^\circ, x_3 \approx 145,74^\circ, x_4 \approx 102,79^\circ$;
21. $x_0 \approx 128,22^\circ, x_1 = x_4 \approx 85,48^\circ, x_2 \approx 103,56^\circ, x_3 \approx 137,26^\circ$;
22. $x_0 = 360^\circ - 2x_3, x_1 = x_3, x_2 = 180^\circ - x_4,\ P \notin T_1 \cup T_2$.

2. Пусть $v = 9$. Тогда набор степеней вершин плитки P один из следующих: $(3,3,3,3,6)$, $(3,3,3,4,5)$, $(3,3,4,4,4)$.

Если пятиугольник P имеет нормальную корону, и набор степеней его вершин — $(3,3,3,3,6)$, то либо P замощает плоскость нормально, либо P имеет один из двух наборов углов:

1. $x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 150^\circ, x_3 = 45^\circ, x_4 = 105^\circ$;
2. $x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 160^\circ, x_3 = 40^\circ, x_4 = 100^\circ$.

Остались не исследованы два случая, когда набор степеней вершин плитки P равен $(3,3,3,4,5)$ или $(3,3,4,4,4)$.

3. Случай, когда $v \geq 10$, требует дальнейшего исследования. Кроме того, не известна верхняя граница для веса v короны, и существует ли эта граница.

Список литературы

[1] О.Г. Багина, “Мозаики из выпуклых пятиугольников”, *Вестник КемГУ*, No. 4(48), 63–73 (2011).
[2] О.Г. Багина, “Выпуклые пятиугольники, замощающие плоскость (типы: 11112, 11122)”, *С*ибирские электронные математические известия, No. 9, 478–530 (2012).
[3] D. Schattschneider, “Tiling the Plane with Congruent Pentagons”, *M*ath. Magazine, No. 51, 29–44 (1978).
[4] O. Bagina, “Tiling the Plane with Congruent Equilateral Convex Pentagons”, *J. Combin. Theory. Ser. A*, No. 2(105), 221–232 (2004).

Кемеровский государственный университет, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: ogbag@mail.ru

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ КЕНМОЦУ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

МИХАИЛ БОРИСОВИЧ БАНАРУ

Шестимерные подмногообразия алгебры Кэли дают исследователю весьма интересные, содержательные и разнообразные примеры почти эрмитовых структур. Такие структуры изучались систематически с 60-х годов прошлого века А. Греем, затем В.Ф. Кириченко и многими другими геометрами. Эта тематика ни в коей мере не утратила своего значения и сейчас. Большое количество современных геометров из США, Китая, Японии, Бельгии, Южной Кореи, Польши и других стран каждый год публикует статьи в хороших журналах с результатами, полученными в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что шестимерная сфера S^6 с канонической приближенно келеровой структурой исследовалась такими известными математиками как Л. Вранкен, Р. Дещч, Ф. Диллен, Т. Кода, К. Машима, Й.-С. Пак, К. Секигава, Ш. Фунабаши, Хайжонг Ли, Х. Хашимото.

На всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. В настоящей работе рассматриваются гиперповерхности 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли, на которых индуцирована структура Кенмоцу. Эта структура обладает многими замечательными свойствами, она играет фундаментальную роль в контактной геометрии. Исследования различных свойств многообразий, оснащенных структурой Кенмоцу, занимают ведущее место в работах таких известных современных геометров как И. Михай, Н. Папагюк и Г. Питиш (Румыния), У.Ч. Де, Г. Паттак, М.М. Трипатхи и М.Х. Шахид (Индия), В.Ф. Кириченко (Россия), К. Мацумото и Т. Икава (Япония). Отметим новую монографию Г. Питиша [1], которая помимо результатов ее автора содержит глубокий обзор основных достижений в геометрии многообразий Кенмоцу от начала 70-х годов прошлого века (когда возникло понятие структуры Кенмоцу) по настоящее время.

Автор рассматривает 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли, через каждую точку которых проходит вполне омбилическая гиперповерхность Кенмоцу. В общепринятой ныне терминологии, про такие эрмитовы многообразия говорят, что они удовлетворяют аксиоме u-гиперповерхностей Кенмоцу. Получен такой результат.

Теорема. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры октав, удовлетворяющее аксиоме u-гиперповерхностей Кенмоцу, является келеровым многообразием.*

Также исследуются локально симметрические типа Риччи 6-мерные эрмитовых подмногообразия алгебры Кэли [2], [3]. Показано, что кроме тривиального случая, когда такие многообразия представляют собою пространство C^3 со стандартной келеровой структурой, структура Кенмоцу не может быть в принципе реализована на вполне омбилической гиперповерхности такого подмногообразия.

Работа является продолжением исследований автора в области эрмитовой геометрии 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли (кроме [3], см. [4]–[10] и др.).

Список литературы

[1] G. Pitis, *Geometry of Kenmotsu manifolds*, Publ. House Transilvania Univ. Brasov, (2007).

[2] В.Ф. Кириченко, “Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли”, *Вестник МГУ. Сер. матем. механ.*, No. 3, 6–13 (1994).

[3] М.Б. Банару, “О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Математический сборник*, 194, No. 8, 13–24 (2003).

[4] М.Б. Банару, В.Ф. Кириченко, “Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли”, *Успехи математических наук*, No. 1, 205–206 (1994).

[5] М.Б. Банару, “Две теоремы о косимплектических гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Известия вузов. Математика*, 476, No. 1, 9–12 (2002).

[6] М.Б. Банару, “Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли”, *Математический сборник*, 193, No. 5, 3–16 (2002).

[7] М.Б. Банару, “О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли”, *Известия вузов. Математика*, 494, No. 7, 59–63 (2003).

[8] М.Б. Банару, “О 6-мерных G2-подмногообразиях алгебры Кэли”, *Математические заметки*, 74, No. 3, 323–328 (2003).

[9] М.Б. Банару, “О типовом числе косимплектических гиперповерхностей 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Сибирский математический журнал*, 44, No. 5, 981–991 (2003).

[10] M.B. Banaru, “A note on six-dimensional G_1-submanifolds of octave algebra”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 6, No. 3, 383–388 (2002).

Смоленский государственный университет, Смоленск, 214000, Россия

E-mail address: `mihail.banaru@yahoo.com`

ГРУППОВОЕ РАССЛОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

НИКОЛАЙ ФЁДОРОВИЧ БЕЛЬМЕЦЕВ[1], ЮРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ЧИРКУНОВ[1,2]

Актуальной задачей при исследовании моделей механики сплошных сред является получение набора нетривиальных точных решений и создание базы данных таких решений, дающих возможность эффективно проводить проверку результатов численных экспериментов, связанных с различными прикладными задачами.

В рамках теории упругости немалый интерес представляет исследование моделей, описывающих неоднородные и анизотропные упругие материалы [1]. Применение моделей нелинейной теории упругости здесь сопряжено с существенными вычислительными трудностями, а использование классической линейной теории не позволяет эффективно описывать анизотропные материалы, такие как композитные материалы, слоистые горные породы и другие. Однако, среди моделей линейной теории упругости, содержащих большее число независимых модулей упругости, имеется модель трансверсально-изотропного упругого тела, описанная в работе Б.Д. Аннина [2], которая позволяет описывать слоистые материалы.

Для уравнений, описывающих стационарное состояние трансверсально-изотропного упругого тела с заведомым выполнением условий Гассмана, выполнено групповое расслоение [3, 4, 5], проведено исследование групповых свойств систем уравнений первого порядка: автоморфной и разрешающей, полученных в результате данного расслоения. Для автоморфной системы решением является многомерный аналог формулы Колосова–Мусхелишвили [4], связывающий вектор перемещений трансверсально-изотропной упругой модели с решением разрешающей системы уравнений, для которой построена оптимальная система подгрупп основной допускаемой группы Ли (фактор-группы по нормальному делителю, связанному с линейностью системы) и получен ряд точных решений. Это исследование позволило получить набор точных решений уравнений статической трансверсально-изотропной упругости.

Список литературы

[1] Б.Д. Аннин, Н.И. Остросаблин, "Анизотропия упругих свойств материалов", *Прикладная механика и техническая физика*, 49, No. 6, 131–151 (2009).

[2] Б.Д. Аннин, "Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов", *Сибирский журнал индустриальной математики*, 12, No. 3(39), 5–14 (2009).

[3] Л.В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М.: Наука, (1978).

[4] Ю.А. Чиркунов, *Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений*, Новосибирск: НГУЭУ, (2007).

[5] Ю.А. Чиркунов, С.В. Хабиров, *Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды*, Новосибирск: НГТУ, (2012).

[1] Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, 630073, РФ
[2] Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, 630090, РФ
E-mail address: weqsmachine@gmail.com

MG-DEFORMATIONS OF SURFACES IN RIEMANNIAN SPACE

ANDREY IVANOVICH BODRENKO

Let R^3 be three-dimensional Riemannian space given in coordinates (y^1, y^2, y^3) by metric form $ds^2 = \tilde{a}_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Let F be two-dimensional simply connected oriented surface in R^3 with boundary ∂F. Let D be domain in Euclidean plane E^2 with boundary ∂D.

Let surface F in R^3 is given by immersion $f : D \to R^3$:

$$y^\sigma = f^\sigma(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in D, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Metric tensor of space R^3 generates Riemannian metric on surface F given by formula $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ where

$$g_{ij} = \tilde{a}_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Let b_{ij} be tensor components of second fundamental form of surface F, $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ are Christoffel symbols calculated in metric $\tilde{a}_{\alpha\beta}$, $g = det||g_{ij}||$, $b = det||b_{ij}||$. Denote by

$$d\sigma(x) = \sqrt{g}\ dx^1 \wedge dx^2$$

area element of surface F.

Let (x^1, x^2) be Cartesian coordinates in E^2. Without loss of generality we will assume that $\overline{D} = D \cup \partial D$ is unit disk in E^2 with center in the origin of coordinates. We identify points immersion F with corresponding sets of coordinates in R^3.

Let $F \in C^{m,\nu}$, $\partial F \in C^{m+1,\nu}$, $\nu \in (0; 1)$, $m \geq 4$.

Consider deformation $\{F_t\}$ of surface F defined by the equations:

$$y^\sigma_t = y^\sigma + z^\sigma(t), \quad z^\sigma(0) \equiv 0, \quad t \in [0; t_0], \quad t_0 > 0, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

Let surface F does not have real asymptotic directions. Denote by k_1 and k_2 principal curvatures of surface F. Assume $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ on F. Denote $K = k_1 k_2$. We determine $\Delta(f) \equiv f(t) - f(0)$.

Definition 1. *Deformation $\{F_t\}$ is called continuous deformation preserving product of principal curvatures $K = k_1 k_2$ (or M-deformation) if the following conditions hold: $\Delta(K) = 0$, and $z^\sigma(t)$ are continuous by t.*

Deformation $\{F_t\}$ generates the following set of curves in R^3:

$$u^{\alpha_0}(\tau) = (y^{\alpha_0} + z^{\alpha_0}(\tau)), \quad \alpha_0 = 1, 2, 3,$$

where $z^{\alpha_0}(0) \equiv 0$, $\tau \in [0; t]$, $t \in [0; t_0]$, $t_0 > 0$.

Definition 2. *Deformation $\{F_t\}$ is called G-deformation if each normal vector of surface F is transported in parallel along path of deformation $\{F_t\}$ for every point of surface.*

Let the following vector field, which is tangent to F along ∂F, is given:

$$v^\alpha = l^i y^\alpha_{,i}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

where covariant derivative in metric of surface F is denoted by symbol $_{,i}$.

Consider the following boundary-value condition:

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} z^\alpha v^\beta = \tilde{\gamma}(s, t), \quad s \in \partial D, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{1}$$

where functions v^α and $\tilde{\gamma}$ are of class $C^{m-2,\nu}$.

Let functions $\tilde{a}_{\alpha\beta} = \tilde{a}_{\alpha\beta}(y^1, y^2, y^3)$ are determined on Euclidean space E^3, and $\tilde{a}_{\alpha\beta} \in C^{m,\nu}$ in E^3. Introduce the following norms:

$$\|\partial \tilde{a}_{\alpha\beta}\|_{m,\nu} = \max_\gamma \|\partial_\gamma \tilde{a}_{\alpha\beta}\|_{(E^3)m,\nu}, \quad \|\partial^2 \tilde{a}_{\alpha\beta}\|_{m,\nu} = \max_{\gamma,\sigma} \|\partial^2_{\gamma\sigma} \tilde{a}_{\alpha\beta}\|_{(E^3)m,\nu}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \sigma = 1, 2, 3.$$

Assume:

$$\tilde{\lambda}_k = \tilde{a}_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{,k} v^{\beta}, \qquad \lambda_k = \frac{\tilde{\lambda}_k}{(\tilde{\lambda}_1)^2 + (\tilde{\lambda}_2)^2}, \quad k = 1, 2,$$
$$\lambda(s) = \lambda_1(s) + i\lambda_2(s), \quad s \in \partial D.$$

Let N be index of given boundary-value condition (1):

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg \lambda(s).$$

Theorem. *Let $F \in C^{m,\nu}, \nu \in (0;1), m \geq 4$, $\partial F \in C^{m+1,\nu}$, $\tilde{a}_{\alpha\beta} \in C^{m,\nu}$. Let there exists some constant $M_0 = const > 0$ such that $\|\tilde{a}_{\alpha\beta}\|_{m,\nu} < M_0$, $\|\partial \tilde{a}_{\alpha\beta}\|_{m,\nu} < M_0$, $\|\partial^2 \tilde{a}_{\alpha\beta}\|_{m,\nu} < M_0$. Let $v^{\beta}, \tilde{\gamma} \in C^{m-2,\nu}(\partial D)$ and function $\tilde{\gamma}$ is continuously differentiable by t. Let, at point $(x^1_{(0)}, x^2_{(0)})$ of domain D, the following condition holds: $z^{\sigma}(t) \equiv 0\, \forall t$, $\sigma = 1, 2, 3$.*

Then the following statements hold.

1. If $N > 0$ then there exist $t_0 > 0$ and $\varepsilon(t_0) > 0$ such that for any admissible function $\tilde{\gamma}$ satisfying the condition $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$ for all $t \in [0, t_0)$ there exists MG-deformation of class $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$ which is continuous in t, and depends continuously in $(2N-1)$ arbitrary real continuous functions $c_i(t)$, $i = 1, \ldots, (2N-1)$, satisfying to the conditions $c_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, (2N-1)$.

2. If $N \leq 0$ then there exist $t_0 > 0$ and $\varepsilon(t_0) > 0$ such that for any admissible function $\tilde{\gamma}$ satisfying the condition $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$, for all $t \in [0, t_0)$ there exists nor more than one MG-deformation of class $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$ continuous by t.

References

[1] A.I. Bodrenko *Minkowski problem in Riemannian space. Deformations of surfaces*, Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Akademic Publishing, ISBN 978-3-659-18088-0, in Russian, (2013).

Volgograd State University, Volgograd, 400074, Russian Federation
E-mail address: bodrenko@bodrenko.com

GENERALIZATION OF BONNET THEOREM ON DARBOUX SURFACES

IRINA IVANOVNA BODRENKO

Let E^{n+1} be $(n+1)$-dimensional $(n \geq 2)$ Euclidean space with Cartesian coordinates $(x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$. In E^{n+1}, consider hypersurface F^n given in neighborhood of each its point $x \in F^n$ by the following equations

$$x^\alpha = f^\alpha(u^1, \dots, u^n), \quad (u^1, \dots, u^n) \in D, \quad \alpha = \overline{1, n+1},$$

where D is some domain of parametric space $(u^1, \dots, u^n)$, $f^\alpha \in C^3(D)$.

Let $I = g_{ij} du^i du^j$ and $II = b_{ij} du^i du^j$ are the first and the second fundamental forms of hypersurface $F^n \subset E^{n+1}$ respectively. Let Gaussian curvature K of hypersurface $F^n \subset E^{n+1}$ be nonzero. Therefore on F^n we determine symmetric thrice covariant tensor of the third valency $\Theta_{(n)}$ by the formula:

$$\Theta_{(n)ijm} = \nabla_m b_{ij} - \frac{b_{ij}\nabla_m K + b_{jm}\nabla_i K + b_{mi}\nabla_j K}{(n+2)K}, \qquad i, j, m = \overline{1, n},$$

where ∇_i is operation of covariant differentiation relative to tensor g_{ij}.

For surfaces in Euclidean space E^3 tensor $\Theta_{(2)}$ coincides with well known Darboux tensor Θ (see [1], ch. 15).

Definition 1. *We call tensor $\Theta_{(n)}$, with $n > 2$, generalized Darboux tensor of hypersurface $F^n \subset E^{n+1}$.*

We determine as $D_{(n)}$ the set of hypersurfaces F^n $(n \geq 2)$ with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in Euclidean space E^{n+1} on which the following identity holds

$$\Theta_{(n)ijm} \equiv 0, \quad i, j, m = \overline{1, n}.$$

The condition $\Theta \equiv 0$ is characteristic property of Darboux surfaces in E^3 which are two-dimensional non-developable surfaces of the second order. Therefore the set $D_{(2)}$ becomes exhausted by Darboux surfaces in E^3.

Definition 2. *We call hypersurface $F^n \subset E^{n+1}$ from the set $D_{(n)}$, with $n > 2$, generalized Darboux surface in E^{n+1}.*

The following theorem [2] generalizing well known Bonnet theorem [1] for the case $n > 2$, holds.

Theorem. *Hypersurface F^n with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in Euclidean space E^{n+1} belongs to the set $D_{(n)}$ if and only if F^n is join of closures of its domains where in each domain there exists coordinate net of curvature lines $(u^1, \dots, u^n)$ such that principal curvatures $k_1, k_2, \dots, k_n$ satisfy the conditions*

$$\begin{gathered} k_2 k_3 \dots k_n = \psi_{(1)}(u^1) k_1^{n+1}, \\ k_1 k_3 \dots k_n = \psi_{(2)}(u^2) k_2^{n+1}, \\ \dots, \\ k_1 k_2 \dots k_{n-1} = \psi_{(n)}(u^n) k_n^{n+1}, \end{gathered} \tag{1}$$

where $\psi_{(i)}(u^i) \neq 0$ are some functions, $i = \overline{1, n}$.

Note. *For the case $n = 2$ the formulas (1) take the form:*

$$k_1 = \psi_{(2)}(u^2) k_2^3, \quad k_2 = \psi_{(1)}(u^1) k_1^3, \tag{2}$$

where $\psi_{(1)}(u^1) \neq 0$, $\psi_{(2)}(u^2) \neq 0$ are some functions.

According to the Bonnet theorem ([1], ch.15, § 72, subsec. 3) formulas (2) binding principal curvatures k_1, k_2 of surface $F^2 \subset E^3$ along each curvature line are defining Darboux surfaces in E^3 and only them.

From the theorem we will derive the following statement.

Corollary. *If hypersurface F^n with nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ in Euclidean space E^{n+1} belongs to the set $D_{(n)}$ then F^n is join of closures of its domains where in each domain there exists coordinate net of curvature lines $(u^1, \dots, u^n)$ such that for Gaussian curvature $K = K(u^1, \dots, u^n) \neq 0$ the following equation holds*

$$|K(u^1, \dots, u^n)| = \frac{1}{\sqrt{\psi_{(1)}(u^1)\psi_{(2)}(u^2)\dots\psi_{(n)}(u^n)}},$$

where $\psi_{(i)}(u^i) \neq 0$ *are some functions,* $i = \overline{1, n}$.

References

[1] V.F. Kagan *Foundations of theory of surfaces in tensor presentation. P. 2*, M.-L.: OGIZ, in Russian, (1948).
[2] I.I. Bodrenko *Generalized Darboux surfaces in spaces of constant curvature*, Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Akademic Publishing,ISBN 978-3-659-38863-7, in Russian, (2013).

Volgograd State University, Volgograd, 400074, Russian Federation
E-mail address: irina@bodrenko.org

О ГЕОМЕТРИИ ПОЧТИ ПАРАКОНТАКТНЫХ КЭЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

АЛИЯ ВЛАДИМИРОВНА БУКУШЕВА

Пусть $(X, \varphi, g, \eta, \vec{\xi})$ — почти параконтактное метрическое пространство (ППКМП) [1]. По определению, почти параконтактная метрическая структура является парасасакиевой, если она нормальна, т.е. $N_\varphi - 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ — кручение Нейенхейса, образованное тензором φ, и, выполняется равенство $\Omega = d\eta$, где $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi\vec{Y})$ — фундаментальная форма структуры. Мы определяем пространство с почти параконтактной эрмитовой структурой, отказываясь от обязательного выполнения условия $\Omega = d\eta$, а условие $N_\varphi - 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ заменяя более слабым $N_\varphi - 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$. ППКМП назовем почти параконтактным кэлеровым пространством (ППККП), если оно почти параконтактное эрмитово, и его фундаментальная форма замкнута. Парасасакиевы пространства и ППККП объединяет то обстоятельство, что и в том и в другом случае $\breve{N}_\varphi = P(N_\varphi) = 0$, где $P : TX \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$. С одной стороны, класс ППККП шире класса парасасакиевых пространств, а с другой стороны, ППККП сохраняют многие важные свойства парасасакиевых пространств. Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Почти параконтактная эрмитова структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:* $\omega(\varphi\vec{u}, \varphi\vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$.

Теорема 2. *ППКМП является ППККП тогда и только тогда, когда выполняются равенства* $L_{\vec{\xi}} g = 0$, $\nabla^1 \varphi = 0$.

Здесь ∇^1 — продолжение внутренней связности, определяемое для почти параконтактных пространств по аналогии с [2].

Список литературы

[1] D. V. Alekseevsky, C. Medori and A. Tomassini, “Maximally homogeneous para-CR manifolds”, *Ann. Global Anal. Geom.*, 30, No. 1, 1–27 (2006).

[2] А. В. Букушева, С.В. Галаев., “Связности над распределением и геодезические пульверизации”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, No. 4, 10–18 (2013).

Саратовский государственный университет имени Н.Г, Чернышевского, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: bukusheva@list.ru

ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕГАКАРТ

БОРИС СЕРГЕЕВИЧ БЫЧКОВ

Накрытие римановой поверхностью проективной прямой с тремя точками ветвления — это классический объект, изучающийся в рамках теории детских рисунков. Оказывается, пространство накрытий римановой поверхностью проективной прямой с четырьмя точками ветвления, являющееся стратом размерности 1 в пространстве рациональных функций на кривой, соответствует некоторому детскому рисунку. Следуя [1], будет рассказано об этом соответствии и приведены вычисления комбинаторного строения этих детских рисунков, отвечающим стратам размерности 1 в пространствах рациональных функций степеней меньших 6 на кривых рода 0, 1 и 2.

Список литературы

[1] Б. С. Бычков, *Вычисление мегакарт*, *Сиб. электрон. матем. изв.*, 10, 170–179, (2013).

НИУ ВШЭ, Москва, 101000, Россия
E-mail address: boris.bychkov@gmail.com

Автор поддержан РФФИ (гранты 12-01-31233, 13-01-00383).

О ЛОКАЛЬНОМ ВИДЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

ИЛЬЯ ВЛАДИМИРОВИЧ ВЬЮГИН

Мы исследуем вид разложений решений третьего, пятого и шестого уравнений Пенлеве в окрестностях их особых точек в виде сходящихся или асимптотических рядов, используя метод изомонодромных деформаций.

Под изомонодромной деформацией понимается семейство систем линейных дифференциальных уравнений, зависящих от нескольких параметров $t_1, \dots, t_m$, но имеющих одинаковые данные монодромии. Изомонодромное семейство можно задать пфаффовой системой

$$dy = \omega y,$$

где ω — матричная 1-форма, зависящая от переменных z и $t_1, \dots, t_m$, причем при фиксированных параметрах $t_i = \mathrm{const}$ пфаффова система превращается в деформируемую линейную систему. Уравнение изомонодромных деформаций принимает вид

$$d\omega = \omega \wedge \omega$$

условия интегрируемости по Фробениусу пфаффовой системы. К уравнениям такого типа могут быть сведены все уравнения Пенлеве.

В докладе планируется показать, что изомонодромные семейства линейных систем, приводящие к уравнениям Пенлеве III, V и VI, можно заменить семейсвом связностей в векторных расслоениях, которые при выборе подходящих координатных описаний могут быть заданы явно. С помощью этого явного задания может быть получен вид локальных разложений решений указанных уравнений в окрестностях их особых точек. У уравнения Пенлеве VI все разложения являются сходящимися, а у III и V уравнений в окрестности бесконечно удаленной особой точки могут быть получены асимптотические разложения. Используются методы работ [1] и [2].

Список литературы

[1] M. Jimbo, “Monodromy Problem and the Boundary Condition for Some Painlevé Equations”, *Journal* Publ. RIMS Kyoto Univ., N 18 , 1137-1161 (1982).

[2] I.V. Vyugin, “Expansions for Solutions of the Schlesinger Equation at a Singular Point”, Painleve Equations and Related Topics, De Gruyter Mouton, 151-158 (2012).

ИППИ РАН и НИУ ВШЭ, Москва, 127994, Россия
E-mail address: vyugin@gmail.com

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-33058-мол_а_вед.

О ГЕОМЕТРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ

СЕРГЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ГАЛАЕВ

В последнее десятилетие одним из активно исследуемых объектов геометрии контактных пространств являются так называемые контактные гамильтоновы векторные поля — контактные аналоги гамильтоновых систем симплектического многообразия (см. [1–3]). Мы рассматриваем более общую ситуацию, исследуя почти контактные структуры $(X, D, \eta, \vec{\xi})$, для которых векторные расслоения (D, π, X) оснащены симплектической структурой (называемой нами допустимой симплектической структурой), отличной от структуры, порождаемой формой η. В этом случае оказывается справедливой

Теорема 1. *Пусть Ω — допустимая симплектическая структура, f — гладкая функция на многообразии X. Тогда существует единственное векторное поле $\vec{u}$, такое, что*

1) $\vec{i}_{\vec{u}}\eta = f$,

2) $\vec{i}_{\vec{\Omega}}\eta = (\vec{\xi} f)\eta - df$.

Динамические системы с одной неинтегрируемой линейной связью интерпретируются как неголономные гамильтоновы системы, заданные на векторном расслоении, допускающем естественное вложение в кокасательное расслоение пространства конфигураций и существующие согласно теореме 1. Методы интегрирования неголономной гамильтоновой системы основаны на использовании теоремы Нётер, продолженной на неголономный случай:

Теорема 2. *Существует, и притом единственное, векторное поле $\vec{z} \in \Gamma T\tilde{D}^*$ такое, что $q_*\vec{z} = \vec{y}$, $L_{\vec{z}}\lambda = 0$.*

Теорема 3. *Пусть $\vec{v}$ — допустимая гамильтонова система на D^*, соответствующая замкнутой форме μ. Тогда, если $\mu(\vec{z}) = 0$, где $\vec{z} \in \Gamma T\tilde{D}^*$ такое, что $q_*\vec{z} = \vec{y}$, $L_{\vec{z}}\lambda = 0$, то $\lambda(\vec{z})$ — первый интеграл $\vec{v}$.*

Расшифровка используемых здесь обозначений и основы внутренней геометрии почти контактных метрических пространств содержатся [4].

Список литературы

[1] G. Pitis, “Hamiltonian Fields and Energy in Contact Manifolds”, *International Journal of Geom. Methods in Modern Physics*, 5, No. 1, 63–77 (2008).

[2] B. Khesin, S. Tabachnikov, “Contact complete integrability”, *Regul. Chaotic Dyn.*, 15, No. 4-5, 504–520 (2010).

[3] C. Boyer, “Completely integrable contact Hamiltonian systems and toric contact structures on $S^2 \times S^3$”, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, No. 7, paper 058, 22 pages, (2011).

[4] А. В. Букушева, С.В. Галаев., “Связности над распределением и геодезические пульверизации”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, No. 4, 10–18 (2013).

Саратовский государственный университет имени Н.Г, Чернышевского, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: sgalaev@mail.ru

СПЛЕТАЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ЕЛЕНА ИВАНОВНА ГАНЖА

Для линейного гиперболического уравнения на плоскости вида

$$Lu = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \tag{1}$$

хорошо известно классическое преобразование Лапласа [1, 2]. А именно, совершая дифференциальную подстановку $u_1 = (D_y + a)u$, мы приходим к преобразованному уравнению $L_1 u_1 = 0$ того же вида (1). Операторы L и L_1 связаны сплетающим соотношением

$$M_1 L = L_1 M, \tag{2}$$

где $M = (D_y + a)$, $M_1 = (D_y + a_1)$, а $a_1(x,y)$ — коэффициент при D_x в операторе L_1.

Пусть L — линейный дифференциальный оператор произвольного порядка в $\mathbb{R}^n$ с коэффициентами из некоторого конструктивного дифференциально замкнутого поля функций $\mathbf{F}$. Если X_1, X_2 — произвольные операторы из кольца линейных дифференциальных операторов $\mathbf{F}[D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}]$, то оператор L можно представить в виде

$$L = X_1 X_2 - H, \tag{3}$$

где $H = X_1 X_2 - L$ — дифференциальный оператор из $\mathbf{F}[D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}]$ (в общем случае произвольного порядка). Рассмотрим оператор

$$L_1 = X_2 X_1 + \omega X_1 - H, \tag{4}$$

где коэффициент

$$\omega = -[X_2, H]H^{-1} \tag{5}$$

есть (псевдо)дифференциальный оператор (элемент тела Оре $\mathbf{F}(D_{x_1}, \ldots, D_{x_n})$, см. [5, 6]). Легко проверить, что сплетающее соотношение (2) автоматически выполняется с операторами $M = X_2$ и $M_1 = X_2 + \omega$. Формулы (2), (3), (4) справедливы в теле Оре $\mathbf{F}[D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}]$, но нет простого способа преобразовать решения исходного уравнения $Lu = 0$ в решения преобразованного уравнения $L_1 v = 0$, если L_1 — псевдодифференциальный оператор. Поэтому мы в следующем ниже определении накладываем строгое ограничение: ω должен быть дифференциальным оператором.

Определение. *Мы будем говорить, что дифференциальные операторы L и L_1, определяемые выше формулами (3) и (4) при условии $\omega = -[X_2, H]H^{-1} \in \mathbf{F}[D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}]$, связаны* сплетающим преобразованием Лапласа.

В [4] нами были доказаны общие свойства сплетающих преобразований Лапласа и описан алгоритм, позволяющий строить бесконечно много примеров таких преобразований. Пользуясь этим алгоритмом, легко построить следующий пример операторов второго порядка в $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)\}$, связанных сплетающим преобразованием Лапласа.

Пример.

$$L = X_1 X_2 - H = x^2 D_x D_y + xy D_z D_x - x^3 D_z^2 + D_x + 2x D_y + 2y D_z + 2/x,$$

$$L_1 = X_2 X_1 + \psi X_1 - H = x^2 D_x D_y + xy D_z D_x - x^3 D_z^2 + D_x + x D_y - 1/x.$$

Сплетающее соотношение (2) для них имеет вид $(D_x - 1/x)L = L_1(D_x + 2/x)$.

Теорема 1. *Для дифференциального оператора L второго порядка в $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$ не существует сплетающих преобразований Лапласа с оператором M первого порядка.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта КГПУ “Формирующиеся научные коллективы *Физика нано- и микроструктур*”.

Теорема 2. *Пусть L — линейный дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ порядка $k \geq 1$, и имеет место сплетающее соотношение $N_1 L = L_1 N$, в котором $\mathrm{Sym}\, L = \mathrm{Sym}\, L_1$, и операторы N, N_1 — первого порядка. Тогда L и $\alpha^{-1} L_1 \alpha$ связаны сплетающим преобразованием Лапласа с $M = X_2 = \alpha^{-1} N$, где α — коэффициент при D_{x_i} в операторе N (для произвольно выбранного i).*

Как вытекает из Теорем 1 и 2, для оператора общего положения в $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$ не существует дифференциальных преобразований первого порядка, задаваемых сплетающими соотношениями вида (2).

Тем не менее многие известные примеры дифференциальных преобразований линейных дифференциальных операторов можно представить в виде сплетающих преобразований Лапласа. Такие представления нами найдены для многих случаев в работе [4].

В заключение отметим, что в недавней работе [10] было показано, что для уравнения (1) сплетающие соотношения (2) с операторами M, M_1 высокого порядка задают преобразование, которое можно представить как композицию сплетающих преобразований Лапласа первого порядка. Другой важной областью возможного применения сплетающих преобразований Лапласа являются преобразования систем линейных уравнений с частными производными [7]. Еще одной важной проблемой является представление известного преобразования Мутара [8] в виде сплетающего преобразования Лапласа.

Список литературы

[1] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, t. 2, Gautier-Villard, Paris, (1887-1896).

[2] Капцов О.В. *Методы интегрирования уравнений с частными производными*, М.: ФИЗМАТЛИТ, (2009).

[3] E.I. Ganzha, "On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol", *Programming and Computer Software*, 38, 150–155 (2012).

[4] E.I. Ganzha, "Intertwining Laplace Transformations of Linear Partial Differential Equations", Submitted to Lecture Notes in Computer Science (Proc. AADIOS-2012) (2013).

[5] O. Ore, "Linear equations in non-commutative fields", *Ann. Math*, 32, 463–477 (1931).

[6] O. Ore, "Theory of non-commutative polynomials", *Ann. Math*, 34, 480–508 (1933).

[7] S.P. Tsarev, "Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations", In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC'2005. pp. 325–331. ACM Press (2005). `http://arxiv.org/abs/cs/0501030`.

[8] I.A. Taimanov, S.P. Tsarev, "The Moutard transformation: an algebraic formalism via pseudodifferential operators and applications", `http://arxiv.org/abs/0906.5141` (2009).

[9] L. Petrén, "Extension de la méthode de Laplace aux équations $\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n} A_{0i} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$", *Lund Univ. Arsskrift*, 7, 1–166 (1911).

[10] E. Shemyakova, "Factorization of Darboux Transformations of Arbitrary Order for Two-dimensional Schrödinger operator", `http://arxiv.org/abs/1304.7063` (2013).

Красноярский Государственный Педагогический Университет, Красноярск, 660060, Россия

E-mail address: `eiganzha@mail.ru`

SEMIGROUP PROPERTY OF FOLIATIONS OF VECTOR SPACES

VICTOR MATVEEVICH GICHEV

Most of the results of this talk were obtained with E.A. Meshcheryakov and I.A. Zubareva. Let V be a finite dimensional real vector space and $\mathfrak{F}$ be a collection of its pairwise disjoint closed subsets which covers V (a partition of V). We say that $\mathfrak{F}$ has the semigroup property, which will be abbreviated to SP in what follows, if the family of the convex hulls of the sets in $\mathfrak{F}$ is a semigroup with respect to the Minkowski addition: $U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$. The definition of SP can be extended onto the case of an open convex cone C in V. We assume additionally that C contains no straight line. In some special settings, we characterize the partitions with SP. The description involves the reflection groups in all cases which we have considered. The term "reflection group" means "a discrete linear group that acts properly and is generated by reflections in hyperplanes" in what follows.

Any compact group $G \subset \mathrm{GL}(V)$ defines the partition $\mathfrak{F}_G$ of V by its orbits. The group G is called polar if there is a linear subspace $A \subseteq V$ such that every its orbit meets A and is orthogonal to A at any point of the intersection. The Weyl group W may be defined as the restriction onto A of the group $\{g \in G : gA = A\}$. It is proved in [1] that SP for $\mathfrak{F}_G$ holds if and only if G is polar and its Weyl group is a reflection group.

The polar representations of connected compact groups are known to be orbit equivalent to the isotropy representations of Riemannian symmetric spaces which are called s-representations. Their principal orbits are isoparametric submanifolds. A connected compact submanifold in the Euclidean space is called isoparametric if its normal bundle is flat and the principal curvatures for any parallel local normal vector field are constant. Homogeneous isoparametric submanifolds are principal orbits of s-representations. By a result of G. Thorbergsson, any isoparametric submanifold of codimension greater than 2 is homogeneous. However, there are non-homogeneous ones and the classification is not finished. There is a characterization of these manifolds, including non-homogeneous ones, in terms of singular Riemannian foliations admitting sections. Thorbergsson asked if it is true that a singular Riemannian foliation of a Euclidean space admits sections if and only if it satisfies SP? We give the affirmative answer to this question. Also, we prove that SP and the condition that the foliation is subject to the partition $\mathfrak{S}$ of V by concentric spheres, which we abbreviate to CF, implies that the principal leaves are isoparametric. Without CF this this is not true. A similar assertion holds for partitions by finite sets: if such a partition $\mathfrak{F}$ is subject to $\mathfrak{S}$, then it satisfies SP if and only if $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_G$ for a finite reflection group G (this is proved in [2]). However, there are many partitions $\mathfrak{F}$ of V by finite sets such that $\mathfrak{F}$ satisfies SP but $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_G$ for any finite group G.

The same problems as above can be posed for partitions of C. At this stage we are able to prove only the following assertion: if Γ is a discrete subgroup of $\mathrm{Aut}(C)$ which acts properly on C and has no limit point on the boundary, then SP for $\mathfrak{F}_\Gamma$ holds if and only if Γ is a reflection group.

References

[1] V.M. Gichev, "Polar representations of compact groups and convex hulls of their orbits", *Differential Geometry and Applications*, 28, 608-614 (2010).

[2] V.M. Gichev, E.A. Meshcheryakov, and I.A. Zubareva, "Semigroups of polygons whose vertices define a centered partition of $\mathbb{R}^n$", *Siberian Advances in Mathematics*, 23, No. 1, 20-31 (2013).

Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics, Omsk, 644099, Russia
E-mail address: gichev@ofim.oscsbras.ru

ON CYCLES IN SOME EVEN-DIMENSIONAL NON-LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

VLADIMIR PETROVICH GOLUBYATNIKOV

We study geometric properties of phase portraits of non-linear dissipative dynamical systems considered as models of gene networks functioning. Some biological interpretations are given in [1]. The main aim of our studies is detection of cycles in phase portraits of these systems, and investigation of corresponding stability questions. In our previous publications ([2, 3, 4], etc.), we considered gene network models represented by odd-dimensional dynamical systems.

In contrast with this case, phase portraits of even-dimensional dynamical systems of this type have quite different geometric structure. For example, in typical situations, they have at least two stable stationary point, and one unstable.

Following [1], we consider now the simplest even-dimensional dynamical system of one special type:

$$\dot{x}_1 = L(x_4) - x_1;\ \dot{x}_2 = L(x_1) - x_2;\ \dot{x}_3 = L(x_2) - x_3;\ \dot{x}_4 = L(x_3) - x_4, \tag{1}$$

all the variables are assumed to be positive. The function $L(x)$ describes "threshold" regulation in the gene network model and is defined as $L(x) = A$ for $0 \le x \le 1$; $L(x) = 0$ for $1 < x$. Here, the role of stationary point plays the point $E = (1; 1; 1; 1)$, where the right-hand sides of the system (1) have discontinuity. However, we shall not consider its trajectories which contain this point E.

As in the odd-dimensional cases, see [3, 4], we make some constructions in 4-dimensional invariant cube $P = [0, A] \times [0, A] \times [0, A] \times [0, A] \subset \mathbb{R}^4_+$ in the phase portrait of the system (1).

For geometric description of its phase portrait, consider the partition of P by 4 hyperplanes containing the point $E \in P$ and parallel to the coordinate hyperplanes. So, we get a collection of 16 small blocks, which can be enumerated by binary indices:

$$\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\} = \{\mathbf{X} \in P \mid x_1 \gtreqless_{\varepsilon_1} 1,\ x_2 \gtreqless_{\varepsilon_2} 1,\ x_3 \gtreqless_{\varepsilon_2} 1,\ x_4 \gtreqless_{\varepsilon_5} 1\}, \tag{2}$$

here $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_4, x_4)$, ε_1, ε_2, ε_3, $\varepsilon_4 \in \{0, 1\}$, and the relations in (2) are defined as follows: the symbol $\gtreqless_0$ means $\le$, and the symbol $\gtreqless_1$ means $\ge$. Consider the diagram

$$\begin{aligned} \ldots \to \{1110\} \to \{1100\} \to \{1101\} \to \{1001\} \to \{1011\} \to \\ \to \{0011\} \to \{0111\} \to \{0110\} \to \{1110\} \to \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Let us denote by P_8 the union of all eight blocks in the cube P listed here. This union is non-convex polyhedron which is star-shaped with respect to the point E. It is not an invariant domain of the system (1). The following lemma is valid for all dynamical systems of the type (1) in any dimension.

Lemma. *The trajectories of a threshold n-dimensional dynamical system analogous to* (1) *are rectilinear inside interior of each block* $\{\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n\}$.

The shifts along these trajectories can be represented as dilatations with appropriate center depending on the block.

Theorem. *Let $A > 2$, then the dynamical system* (1) *has exactly one piece-wise linear cycle $\mathcal{C}_8$. This cycle passes through all the blocks of the diagram* (3) *and is contained in the interior of piece-wise linear invariant surface $M^2 \subset P_8$ which is composed by* 8 *triangles with common vertex E.*

It should be noted that the classical theorems on central manifolds of dynamical systems state that these manifolds (i.e., 2-dimensional invariant surfaces in our case) are either small,

The work was supported by RFBR, grant 12-01-00074.

or are bounded by corresponding cycles, and, in general, can not be extended beyond these limits, see for example [5].

This theorem generates the following **inverse problem**:

Can one find the parameter A of the system (1)*, if the period of the cycle $\mathcal{C}_8$ is known*?

Similar results are valid for symmetric higher-dimensional analogues of the system (1). For example, if $A > \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$, then 5-dimensional dynamical system of this type has two piecewise linear cycles contained in two piecewise linear invariant surfaces. One of these cycles is stable, the invariant surfaces are composed by ten triangles each, and have just one common point E. As in the 4-dimensional case, they are constructed with the help of the dilatation shifts.

Much more complicated is the problem of detection and classification of all cycles, stable and unstable, for asymmetric dynamical systems of this type.

The phase portrait of the dynamical system (1) has two stable stationary points $Z_1 = (0; A; 0; A)$ and $Z_2 = (A; 0; A; 0)$ contained in the blocks $\{0101\}$ and $\{1010\}$, respectively. Considerations of the dilatation shifts in these blocks show that $\{0101\}$ is contained in the attraction basin U_1 of the point Z_1, and $\{1010\}$ is contained in the attraction basin U_2 of the point Z_2. These attraction basins U_1 and U_2 are separated by 3-dimensional invariant surface M^3, such that $M^2 \subset M^3$. The diagonal Δ of the cube P which joins the origin with the points E and $(A; A; A; A)$ is contained in M^3 as well. For all odd-dimensional and even-dimensional symmetric analogues of the dynamical system (1), this diagonal is an invariant one-dimensional manifold.

Similar stable stationary points $Z_1 = (0; A; \dots; 0; A)$, $Z_2 = (A; 0; \dots; A; 0)$ do exist in phase portrait of any even-dimensional symmetric threshold dynamical system. Asymmetric systems of this type have also two stable stationary points in the blocks $\{0101\dots01\}$ and $\{1010\dots10\}$ which are contained in the attraction basins of these points. For all even dimensions, each trajectory of such a system, which starts in one of these two blocks, remains there while $t \to \infty$.

References

[1] V.A.Likhoshvai, V.P.Golubyatnikov, G.V.Demidenko, S.I.Fadeev, A.A.Evdokimov, *Theory of Gene Networks, in: Computational Systems Biology, chapter 5* (Russian), Novosibirsk, SB RAS, 395–480 (2008).

[2] A.A. Akinshin, V.P. Golubyatnikov, "On cycles in symmetric dynamical systems" (Russian), *Bulletin of Novosibirsk State University*, 12, No. 2, 3-12 (2012).

[3] V.P. Golubyatnikov, I.V. Golubyatnikov, "On periodic trajectories in odd-dimensional gene networks models", *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*, 28, No. 4, 397-412 (2011).

[4] A.A. Akinshin, V.P. Golubyatnikov, I.V.Golubyatnikov, "On some multidimensional models of gene networks functioning" (Russian), *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, 16, No. 1, 3-9 (2013).

[5] J. Guckenheimer, P. Holmes *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Applied Mathematical Sciences, v. 42, Berlin, Springer, (1997).

Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: glbtn@math.nsc.ru

EXTENDED SYMMETRY LIE ALGEBRA AND THE ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE TRANSVERSAL CORRELATION FUNCTION FOR ISOTROPIC TURBULENCE

VLADIMIR NIKOLAEVICH GREBENEV, ALEXANDER NIKOLAEVICH GRISHKOV, AND MARTIN OBERLACK

The behavior of the correlation functions B_{LL} and B_{NN} presents significant interests for the theory of turbulence since this leads to various types of the so-called integral invariants. Loitsyansky and Birkhoff integrals are most famous integral invariants. In this paper, we establish the asymptotic behavior of the transversal correlation function $B_{NN}(|\vec{r}|, t)$ as $|\vec{r}| \to \infty$ for the geometry of the correlation space K^3 determined by the two-point velocity correlation tensor in the case of homogeneous isotropic turbulence. The question about the asymptotic expansion of $B_{NN}(|\vec{r}|, t)$ for large values of the correlation distances in the physical space $\mathbb{R}^3$ with the standard Euclidian metric is still open.

We consider the extended symmetry of the functional of length determined in an affine space K^3 of the correlation vectors for homogeneous isotropic turbulence. The two-point velocity correlation tensor field (parametrized by the time variable t) of the velocity fluctuations is used to equip this space by a family of the pseudo-Riemannian metrics $dl^2(t)$ [1]. First, we observe the results obtained in [1, 2] about a geometry of the correlation space K^3 and expose the Lie algebra associated with the equivalence transformation of the above-mentioned functional for the quadratic form $dl^2_{D^2}(t)$ generated by $dl^2(t)$ which is similar to the Lie algebra constructed in [2]. Then, using the properties of this Lie algebra, we show that there exists a non-trivial central extension wherein the central charge is defined by the same bilinear skew-symmetric form c as for the Witt algebra which measures the number of internal degrees of freedom of the system. For the applications in turbulence, as the main result, we derive the asymptotic expansion of the transversal correlation function for large correlation distances in the frame of $dl^2_{D^2}(t)$.

References

[1] V.N. Grebenev, M. Oberlack, "Geometric realization of the two-point correlation tensor for isotropic turbulence", *J. Nonl. Math. Phys.*, 18, No. 1, 109-120 (2011).

[2] V.N. Grebenev, M. Oberlack, A.N. Grishkov, "Infinite dimensional Lie algebra associated with conformal transformations of the two-point correlation tensor from isotropic turbulence", *Z. Angew. Math. Phys.*, 64, 599-620 (2013)

Institute of Computational Technologies SD RAS, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: vngrebenev@gmail.com

Institute of Mathematics and Statistics, University of Sao Paulo, Sao Paulo, 66281, Brazil
E-mail address: grishkov@ime.usp.br

Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 64287, Germany
E-mail address: oberlack@fdy.tu-darmstadt.de

RFBR (grant No 12-01-00648), grant No 12.740.11.1430 of the Government of Russian Federation.

СЕКВЕНЦИАЛЬНО СХОДЯЩИЕСЯ ОТОБРАЖЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

АЛЕКСАНДР ЕФИМОВИЧ ГУТМАН

В 2009–2013 гг. появился ряд работ [1–28], посвященных обобщению известных ранее теорем о неподвижной точке на случай отображений $S\colon X \to X$, действующих в метрических и более общих пространствах X (с частичными метриками, обобщенными метриками, коническими метриками, tvs-метриками) и удовлетворяющих условиям сжатия, в которых вместо расстояния $d(x, y)$ рассматривается выражение вида $d(Tx, Ty)$, где $T\colon X \to X$ — так называемое «секвенциально сходящееся» отображение (см. [1]). Как показано ниже, основные результаты работ [1–28] являются прямыми следствиями одной общей теоремы, осуществляющей трансляцию известных фактов посредством отображения T.

Пусть X и Y — секвенциальные топологические пространства. Пространство X называется *однозначным*, если $(\forall\, \alpha \in \mathcal{S}_X)(\forall\, x, y \in X)(\alpha \to x \;\&\; \alpha \to y \;\Rightarrow\; x = y)$, где $\mathcal{S}_X$ — множество всех последовательностей в X. Положим $\mathcal{C}_X = \{\alpha \in \mathcal{S}_X : (\exists\, x \in X)(\alpha \to x)\}$. Отображение $T\colon X \to Y$ *секвенциально сходится*, если $(\forall\, \alpha \in \mathcal{S}_X)(T \circ \alpha \in \mathcal{C}_Y \;\Rightarrow\; \alpha \in \mathcal{C}_X)$, и *субсеквенциально сходится*, если $(\forall\, \alpha \in \mathcal{S}_X)\big(T \circ \alpha \in \mathcal{C}_Y \;\Rightarrow\; (\exists\, \beta \preccurlyeq \alpha)(\beta \in \mathcal{C}_X)\big)$, где запись $\beta \preccurlyeq \alpha$ означает, что β является подпоследовательностью α.

Теорема 1. *Пусть X — регулярное однозначное секвенциальное пространство, Y — пространство Фреше. Отображение $T\colon X \to Y$ секвенциально сходится тогда и только тогда, когда T инъективно и обратное отображение $T^{-1}\colon \operatorname{im} T \to X$ допускает продолжение до непрерывного отображения $\overline{T^{-1}}\colon \operatorname{cl}\operatorname{im} T \to X$.*

Теорема 2. *Пусть X — T_1-отделимое пространство, а Y — однозначное секвенциальное пространство. Следующие свойства отображения $T\colon X \to Y$ попарно равносильны:*
(1) T непрерывно и секвенциально сходится;
(2) T непрерывно, инъективно и субсеквенциально сходится;
(3) T является гомеоморфизмом X на замкнутое подпространство $\operatorname{im} T \subset Y$.

Сформулированные факты позволяют получить простые доказательства для большинства из приведенных в [1–28] теорем о неподвижных точках T-сжимающих отображений и им подобных. В качестве примера рассмотрим следующий результат, установленный в [1].

Теорема [1, 2.6]. *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $S, T\colon X \to X$ — непрерывные отображения, причем T инъективно и субсеквенциально сходится, а S является T-сжимающим, т. е. $(\exists\, C\colon 0 < C < 1)\,(\forall\, x, y \in X)\ d(TSx, TSy) \leqslant C\, d(Tx, Ty)$. Тогда S имеет единственную неподвижную точку. Если, кроме того, T секвенциально сходится, то для любой точки $x_0 \in X$ последовательность итераций $S^n x_0$ сходится к неподвижной точке отображения S.*

Доказательство. Согласно теореме 2 отображение T является гомеоморфизмом X на замкнутое (и поэтому полное) подпространство $\operatorname{im} T \subset X$. Следовательно, функция $d_T\colon X^2 \to \mathbb{R}$, определенная формулой $d_T(x, y) = d(Tx, Ty)$, представляет собой метрику на X, относительно которой отображение S является сжимающим, причем пространство (X, d_T) полно и сходимость по d_T совпадает со сходимостью по d. Для завершения доказательства остается сослаться на принцип Банаха о сжимающем отображении.

Заметим также, что в формулировке теоремы [1, 2.6] оказываются излишними требование непрерывности S и дополнительное предположение о секвенциальной сходимости T.

Список литературы

[1] A. Beiranvand, S. Moradi, M. Omid, H. Pazandeh, “Two fixed-point theorems for special mappings”, arXiv:0903.1504v1 [math.FA], 6 p. (2009).

[2] J.R. Morales, E. Rojas, “Cone metric spaces and fixed point theorems of T-contrative mappings”, *Revista Notas de Matemática*, 4(2), No. 269, 66–78 (2008).

[3] J.R. Morales, E. Rojas, “Some results on T-Zamfirescu operators”, *Revista Notas de Matemática*, 5(1), No. 274, 64–71 (2009).

[4] S. Moradi, A. Beiranvand, “A fixed-point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type depended an another function”, arXiv:0903.1569v1 [math.FA], 9 p. (2009).

[5] S. Moradi, “Fixed-point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type depended an another function”, arXiv:0903.1574v1 [math.FA], 6 p. (2009).

[6] S. Moradi, “Kannan fixed-point theorem on complete metric spaces and on generalized metric spaces depended an another function”, arXiv:0903.1577v1 [math.FA], 6 p. (2009).

[7] J.R. Morales, E. Rojas, “Fixed point theorems for a class of mappings depending of another function and defined on cone metric spaces”, arXiv:0906.2160v1 [math.FA], 11 p. (2009).

[8] J.R. Morales, E. Rojas, “T-Zamfirescu and T-weak contraction mappings on cone metric spaces”, arXiv:0909.1255v1 [math.FA], 9 p. (2009).

[9] J.R. Morales, E. Rojas, “On the existence of fixed points of contraction mappings depending of two functions on cone metric spaces”, arXiv:0910.4921v1 [math.FA], 9 p. (2009).

[10] J.R. Morales, E. Rojas, “Cone metric spaces and fixed point theorems of T-Kannan contractive mappings”, *Int. Journal of Math. Analysis*, 4, No. 4, 175–184 (2010).

[11] R. Sumitra, V. Rhymend Uthariaraj, R. Hemavathy, “Common fixed point theorem for T-Hardy-Rogers contraction mapping in a cone metric space”, *Int. Math. Forum*, 5, No. 30, 1495–1506 (2010).

[12] S. Moradi, M. Omid, “A fixed-point theorem for integral type inequality depending on another function”, *Int. Journal of Math. Analysis*, 4, No. 30, 1491–1499 (2010).

[13] S. Bhatt, A. Singh, R.C. Dimri, “Fixed point theorems for certain contractive mappings in cone metric spaces”, *Int. Journal of Math. Archive*, 2(4), 444–451 (2011).

[14] K.P.R. Sastry, Ch. Srinivasarao, K. Sujatha, G. Praveena, Ch. Srinivasarao, “Cone metric spaces and fixed point theorems of generalized contractive mappings”, *Int. J. Comp. Sci. Math.*, 3, No. 2, 133–139 (2011).

[15] S. Moradi, D. Alimohammadi, “New extensions of Kannan fixed-point theorem on complete metric and generalized metric spaces”, *Int. J. Math. Anal.*, 5, No. 47, 2313–2320 (2011).

[16] M. Sharma, R. Shrivastava, Z.K. Ansari, “On T-Ćirić type generalized contraction on cone metric space”, *J. Cont. Appl. Math.*, 1, No. 1, 103–110 (2011).

[17] R. Shrivastava, Z.K. Ansari, M. Sharma, “On generalization of some common fixed point theroems for T-contraction in cone metric space”, *Int. J. Phys. and Math. Sci.*, 2, No. 1, 83–87 (2011).

[18] M. Öztürk, M. Başarır, “On some common fixed point theorems for f-contraction mappings in cone metric spaces”, *Int. J. Math. Anal.*, 5, No. 3, 119–127 (2011).

[19] S.K. Malhotra, S. Shukla, R. Sen, “T-Reich mapping in topological vector space-valued cone metric spaces”, *Mathematica Aeterna*, 1, No. 6, 353–359 (2011).

[20] M. Abbas, H. Aydi, S. Radenović, “Fixed point of T-Hardy-Rogers contractive mappings in partially ordered partial metric spaces”, *Int. J. Math. and Math. Sci.*, Article ID 313675, 11 p. (2012)

[21] V. Parvaneh, “Fixed and periodic point results for T-quasi-contractions in a partially ordered metric space”, *J. Basic Appl. Sci. Res.*, 2(3), 2354–2362 (2012).

[22] V. Parvaneh, H. Hosseinzadeh, “Some common fixed point results for generalized weak C-contractions in ordered metric spaces”, *J. Appl. Sci.*, 12(9), 848–855 (2012).

[23] Tran Van An, Kieu Phuong Chi, Erdal Karapınar, Tran Duc Thanh, “An extension of generalized (ψ, ϕ)-weak contractions”, *Int. J. Math. and Math. Sci.*, Article ID 431872, 11 p. (2012).

[24] Erdal Karapınar, Kieu Phuong Chi, Tran Duc Thanh, “A generalization of Ćirić quasicontractions”, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 518734, 9 p. (2012).

[25] Kieu Phuong Chi, Erdal Karapınar, Tran Duc Thanh, “A generalization of the Meir-Keeler type contraction”, *Arab J. Math. Sci.*, 18, 141–148 (2012).

[26] J.R. Morales, E. Rojas, “Some generalizations of Jungck’s fixed point theorem”, *Int. J. Math. and Math. Sci.*, Article ID 213876, 19 p. (2012).

[27] А. Разани, В. Парванех, “Некоторые теоремы о неподвижных точках для слабо T-сжимающих по Чаттерья и по Каннану отображений”, *Изв. вузов. Матем.*, No. 3, 47–55 (2013).

[28] A.K. Dubey, Rita Shukla, Dubey Ravi Prakash, “Cone metric spaces and fixed point theorems of generalized T-Zamfirescu mappings”, *Int. J. Appl. Math. Res.*, 2, No. 1, 151–156 (2013).

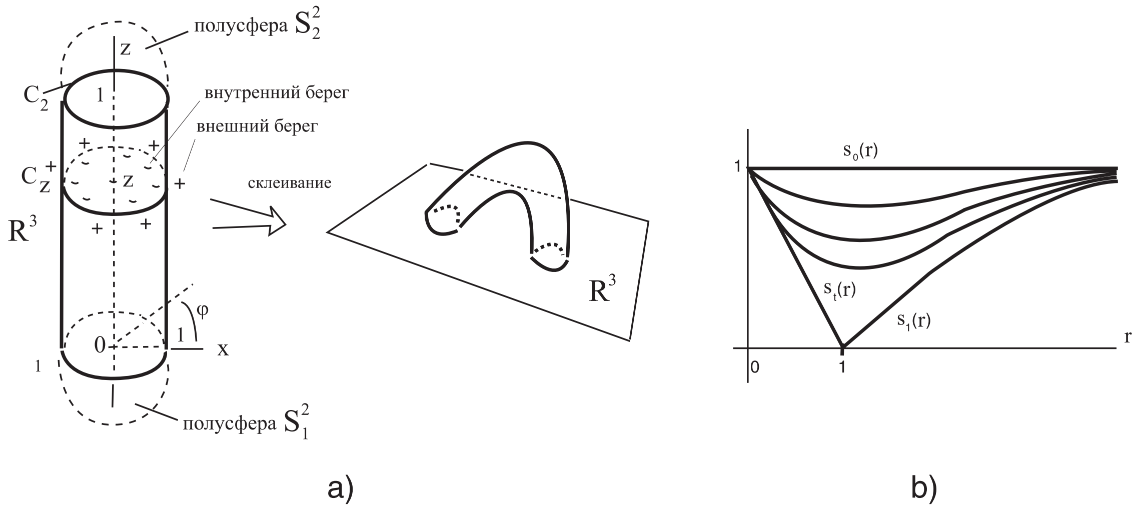
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630055, Россия
E-mail address: gutman@math.nsc.ru

МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ РУЧКИ В 3-МЕРНОМ РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

АЛЕКСАНДР КОНСТАНТИНОВИЧ ГУЦ

Математически образование ручек в 3-мерном многообразии достаточно подробно описано в рамках дифференциальной топологии. Но эти описания плохо удовлетворяют потребностям практической геометрии и особенно потребностям тех, кто работает в области общей теории относительности, являющейся теорией пространства-времени. Необходимо иметь достаточно простую *модель* образования ручки в 3-мерном пространстве, как с точки зрения топологии, так и с точки зрения геометрии.

Изменение топологии. Рассмотрим 3-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^3$. Используем цилиндрическую систему координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. Переход к неодносвязному 3-многообразию осуществляется за счет разреза по цилиндру $Z = \{(r, \varphi, z) : r = 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le 1\}$ и склеивания точек $(1, \varphi, z)$ отдельно для «внешнего берега» и «внутреннего берега» в точку (для каждого z отдельно) (см. рис.1, a)). Окружности C_1, C_2 и C_z $(0 < z < 1)$, находящиеся на на разных «берегах», стягиваются в точку; при этом полусферы S_1^2 и S_2^2 перестраиваются в сферы, к которым приклеен 3-мерный цилиндр $S^2 \times [0,1]$, получаемый из цилиндра Z при факторизации по отношению эквивалентности $\sim$, описываемому ниже. Как результат, имеем 3-многообразие с приклеенной 3-ручкой. Заметим, что в [1] дана топологически более сложная модель, менее отвечающая поставленной задаче.



+

Рис. 1. a) Метаморфоза цилиндра Z; b) Графики функций $s_t(r)$, $t \in [0,1]$.

Для реализации описанной модели образования ручки рассмотрим параметрическое семейство функций $s_t(r)$, $t \in [0,1]$, $r \in [0, +\infty)$, такое, что для любого $r \in [0, +\infty)$

$$s_0(r) \equiv 1, \quad s_t(0) = 1, \quad \lim_{r \to +\infty} s_t(r) = 1,$$

и при $r \in (0, +\infty)$ семейство функций s_t представляет непрерывную деформацию функции s_0 в функцию s_1, причем все $s_t(x)$ непрерывны вместе с первыми производными. Единственной функцией, производная которой имеет разрыв первого рода в точке $r = 1$, является $s_1(x)$ (см. рис. 1, b)). Наконец, пусть

$$\lim_{r \to 1-0} s_1'(r) = -1, \quad \lim_{r \to 1+0} s_1'(r) = +1.$$

Рассмотрим топологическое подпространство $\Gamma_t = \{(r, \varphi, z), s_t(r), s'_t(r \pm 0)\}$ с индуцированной топологией пятимерного арифметического пространства $\mathbb{R}^5$, где $s'_t(r \pm 0) = \lim\limits_{\rho \to r \pm 0} s'_t(\rho)$.

Две точки $((r, \varphi, z), a, \alpha)$ и $((r', \varphi', z'), b, \beta)$ пространства Γ_t назовем эквивалентными тогда и только тогда, когда, во-первых,

1) $(r, \varphi, z) = (r', \varphi', z')$; $a = b$;
$\lim\limits_{\rho \to r-0} s'_t(\rho) = \lim\limits_{\rho \to r+0} s'_t(\rho)$;

и, во-вторых,

2) $r = 1,\ 0 \le \varphi', \varphi \le 2\pi, z' = z\ (0 \le z, z' \le 1)$; $a = b$; $(\alpha = \beta = \lim\limits_{\rho \to 1-0} s'_t(\rho) = -1)$;

и, в-третьих,

3) $r = 1,\ 0 \le \varphi', \varphi \le 2\pi, z' = z\ (0 \le z, z' \le 1)$; $a = b$; $(\alpha = \beta = \lim\limits_{\rho \to 1+0} s'_t(\rho) = +1)$.

Профакторизуем пространство Γ_t по введенному отношению эквивалентности $\sim$. В результате при при $t = 1$ пространство $\mathbb{R}^3$ превращается в многообразие с ручкой, т.е. в неодносвязное некомпактное 3-многообразию с 3-мерной ручкой, которую физики называют 3-мерной кротовой норой.

Изменение геометрии. Зададим семейство римановых метрик

$$dl_t^2 = A_t^2(r, z)[dr^2 + dz^2] + r^2[B_t(r, z)]^{-2} d\varphi^2,$$

отражающих изменение геометрии по мере изменения топологии, где функции A_t, B_t выбираются так, что, во-первых, при $t < 1$ они C^2-гладкие и, во-вторых, при $t = 1$ имеем:

$$\lim_{r \to 1+0} A_t \neq \lim_{r \to 1-0} A_t, \quad \lim_{r \to 1+0} B_t \neq \lim_{r \to 1-0} B_t \ \text{ при } 0 < z < 1 \tag{1}$$

и

$$A_t(1, z)[B_t(1, z)]^{-1} \to 0 \ \text{ при } \ t \to 1 - 0 \ \ (0 \le z \le 1).$$

Последнее условие — это геометрическое отражение условия стягивания окружностей C_1, C_z, C_2 в точку, при котором их длина должна стремиться к нулю.

Более точным, вместо условий (1) было бы условие наличия разрыва конечного скачка у функции B_t по переменной r:

$$\lim_{r \to 1+0} \frac{\partial B_t}{\partial r} \neq \lim_{r \to 1-0} \frac{\partial B_t}{\partial r} \ \text{ при } 0 < z < 1. \tag{2}$$

Это говорит о нарушении гладкости, как компонент тензора кривизны, так и тензора Риччи. Если принять, что риманово многообразие замкнутое (или провести его компактификацию), и использовать формулы типа Черна-Гаусса-Бонне, например формулы Ревентоса [2], то это будет говорить о том, что при $t = 1$ за счет разрыва кривизны меняется одно из чисел Бетти, а точнее, $\beta_1(M^3)$. Иными словами, образуется ручка.

Физическая интерпретация. С точки зрения описания динамики образования ручки в 3-пространстве M^3 (на языке физиков — кротовой норы) в пространстве-времени с метрикой

$$dl_t^2 = A_t^2(r, z)[dr^2 + dz^2] + r^2[B_t(r, z)]^{-2} d\varphi^2 - [B_t(r, z)]^2 dt^2,$$

условие (2) означает появление δ-функции $\delta(r)$ в правой части вакуумных уравнений Эйнштейна, трактуемое как включение источника энергии на границе цилиндра Z в момент времени $t = 1$. Именно этот приток энергии и меняет топологию 3-мерного пространства, делая ее неодносвязной.

Список литературы

[1] А. Гуц, *Физика реальности*, Омск, Изд-во КАН, (2013).

[2] A. Reventos, “On the Gauss-Bonnet formula on the odd-dimensional manifolds ”, *Tohoku Math. J.*, 31, No. 2, 165–178 (1979).

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, 644077, Россия
E-mail address: guts@omsu.ru

О НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУРАХ НА S^6

НАТАЛИЯ АЛЕКСАНДРОВНА ДАУРЦЕВА

Рассмотрим сферу S^6 со стандартной метрикой g_0, индуцированной вложением S^6 в $\mathbb{R}^7$:

$$S^6 = \{x \in \mathbb{R}^7 : \|x\|^2 = 1\}$$

В 1951 Борель и Серр в [2] показали, что только две четномерные сферы S^2 и S^6 допускают почти комплексную структуру. В случае S^2 почти комплексная структура определяется единственным образом и интегрируема, в случае S^6 вопрос о существовании интегрируемой почти комплексной структуры остается открытым.

Рассмотрим пространство $\mathcal{A}^+(S^6)$ всех почти комплексных структур на S^6, сохраняющих ориентацию. Это пространство [5] имеет структуру локально тривиального расслоения, база которого — множество всех g_0-ортогональных, положительно ориентированных почти комплексных структур $\mathcal{AO}^+_{g_0}(S^6) = \{J \in \mathcal{A}^+ : g_0(JX, JY) = g_0(X, Y)\}$, а слой над точкой $J \in \mathcal{AO}^+_{g_0}(S^6)$ — множество почти комплексных структур положительно ассоциированных с формой ω_J: $\mathcal{A}^+_{\omega_J} = \{I \in \mathcal{A}^+(S^6) : \omega_J(IX, IY) = \omega_J(X, Y), \forall X, Y \in TS^6, \omega_J(X, IX) > 0, \forall X \neq 0\}$, где $\omega_J(X, Y) = g_0(JX, Y)$.

В работе [4] доказано, что все почти комплексные структуры, принадлежащие базе данного расслоения $\mathcal{AO}^+_{g_0}(S^6)$ не являются интегрируемыми. В [1] доказано что 6-мерная сфера не допускает комплексную структуру ортогональную относительно любой метрики, лежащей в некоторой окрестности стандартной. А именно, если g — риманова метрика на S^6 с положительным оператором кривизны $\widetilde{R}$, удовлетворяющим условию: $\forall x \in S^6$, $\lambda_{max}/\lambda_{min} < 7/5$, где λ_{max} и λ_{min} наибольшее и наименьшее собственные значения оператора $\widetilde{R}$, соответственно, то всякая почти комплексная структура $I \in \mathcal{AO}^+_g(S^6)$ неинтегрируема. Этот результат расширяет результат работы [4].

Особое место среди g_0-ортогональных почти комплексных структур на 6-мерной сфере занимают структуры Кэли. Все они G_2-инвариантны, являются строго приближенно келеровыми, множество таких структур образует пространство $\mathbb{R}P^7$. В настоящей работе доказана:

Теорема. *Почти комплексные структуры $I \in \mathcal{A}^+_{\omega_J}$, где $J \in \mathcal{AO}^+_{g_0}$ — структура Кэли, неинтегрируемы.*

Другими словами, почти комплексные структуры на S^6, принадлежащие слоям над структурами Кэли, неинтегрируемы. Для доказательства см. [3]

Список литературы

[1] G. Bor, L.Hernández-Lamoneda "The canonical bundle of a hermitian manifold', *Bol. Soc. Mat. Mexicana.*, 5, 187-198 (1999).

[2] A. Borel, J.-P. Serre "Détermination des p-puissances réduites de Steenrod dans groupes classiques. Applications", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 223, 680–682 (1951).

[3] N. Daurtseva "About integrability of almost complex structures on strictly Nearly Kähler 6-manifolds", *Preprint. arXiv:1305.1111*

[4] C. LeBrun "Orthogonal almost complex structures on S^6", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 101, 136-138 (1987).

[5] Н.А. Даурцева "О многообразии почти комплексных структур", *Матем. заметки*, 78, No. 1, 66–71 (2005).

Кемеровский Государственный Университет, Кемерово, ул. Красная 6, 650043, Россия
E-mail address: natali0112@ngs.ru

Работа поддержана РФФИ, грант 12-01-00873-а, а также грантом Президента РФ по поддержке научных школ, проект НШ-544.2012.1.

ENUMERATION OF TWO-COLORED MAP WITH GIVEN NUMBER OF EDGES

MADINA ALEKSANDROVNA DERYAGINA

A *map* is graph G embedded into a compact Riemann surface S in such a way that $S \setminus G$ is a disjoint union of connected components, which are called *faces*, each of them is homeomorphic to an open disk. Enumeration of maps with given properties was started by Tutte in 1960-s [1] and still is developed by many authors. See, for instance [2, 3].

A map is called *two-colored*, if it is possible to paint its faces in two colors in such a way that every edge divides two different colors.

Theorem. *The number $C(n)$ of two-colored maps with given number of edges can be calculated by the formula:*

$$C(n) = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{l|n \\ lm=n}} \Big(s^+(m,0)\, \varphi_{m+1}(l) + Int(\frac{m}{2})\, (s(\frac{m}{2},0) - s^+(\frac{m}{2},0))\, \varphi^{odd}_{\frac{m}{2}+1}(l) +$$

$$+ \sum_{H=1}^{m} Int(\frac{m-H}{2}) \frac{T(m,H)}{(m-1)!}\, \varphi_{\frac{m-H}{2}+1}(l) \Big),$$

where $\varphi_m(l)$ — Jordan function, $\varphi^{odd}_{m+1}(l)$ — odd Jordan function,

$$s(m,0) = (2m+1)!! - \sum_{k=1}^{m} (2k-1)!!\, s(m-k,0), \quad s(0,0) = 1,$$

$$s^+(m,0) = (m+1)! - \sum_{k=1}^{m} k!\, s^+(m-k,0), \quad s^+(0,0) = 1,$$

$$T(m,H) = B(m,H) - \sum_{h=0}^{H} \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{m-i} T(i,h)\, B(m-i, H-h),$$

$$B(i,j) = i!\ \frac{i!}{1^j\, j!\, 2^{\frac{i-j}{2}}\ (\frac{i-j}{2})!}\, Int\left(\frac{i-j}{2}\right), \quad B(0,0) = 1, \quad T(0,0) = 0,$$

$$Int(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in Z \text{ and } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

References

[1] W. T. Tutte, "On the enumeration of planar maps", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74, No. 1, 64-74 (1968).

[2] V. A. Liskovets, "Enumeration of nonisomorphic planar maps", *Selecta Math. Sovietica,*, 4, 303-323 (1985).

[3] A. Mednykh, R. Nedela, "Enumeration of unrooted maps of a given genus", *J. Comb. Theory*, 96, No. 5, 706-729 (2006).

Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail address: madinaz@rambler.ru

This research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 13-01-00513), the State Maintenance Program for Young Russian Scientists and the Leading Scientific Schools of the Russian Federation (grant NSh-921.2012.1) and the Federal Target Grant "Scientific and educational personnel of innovation Russia" for 2009–2013 (contract No. 8206).

ON A TYPICAL LEAF OF A MEASURED FOLIATED 2-COMPLEX OF THIN TYPE

IVAN ALEKSEEVICH DYNNIKOV, ALEXANDRA SERGEEVNA SKRIPCHENKO

Measured foliated 2-complexes arise naturally in the geometric group theory, theory of foliations and dynamical systems. Due to E. Rips, measured foliated 2-complexes that cannot be decomposed into simpler ones are roughly classified into four types: simplicial, toral, surface, and thin. The structure of a foliation of simplicial or toral type is rather trivial, the surface type case has a high codimension and is still much simpler that the last, thin, case, which is extremely complex. It is known that all but finitely many leaves of a foliation of thin type are quasi-isometric to infinite trees having at most two topological ends. It was believed until recently that the union of the two-ended leaves always has zero measure. We have shown that this is not true in general, by constructing explicitly a counterexample, in which the union of two-ended leaves is of full measure. On the other hand, we show that the zero measure assertion holds if the foliation is self-similar, which was the case in all previously tested examples.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, 119991, Россия
E-mail address: dynnikov@mech.math.msu.su

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАУЗЛЕННЫХ ДУГ МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ В УТОЛЩЕННОМ ПРОКОЛОТОМ ТОРЕ

ЯНА КОНСТАНТИНОВНА ИЛЬИНА

Определение 1. *Пусть T_0 — тор с удаленным диском, I — отрезок $[0;1]$, $T_0 \times I$ — утолщенный проколотый тор, a, b — пара фиксированных точек на $\partial T_0 \times I$. Заузленной дугой в $T_0 \times I$ называется кривая без самопересечений с концами в точках a, b.*

Дуги рассматриваются с точностью до гомеоморфизмов пар $(T_0 \times I, L_1) \to (T_0 \times I, L_2)$ (L_1, L_2 — заузленные дуги), относительно которых точки a, b остаются неподвижными.

Хорошо известно, что тор можно представить как единичный квадрат P, противоположные стороны которого отождествлены по параллельным переносам вдоль осей OX и OY соответственно. Удалив из P внутренность диска $D \subset \mathrm{Int}D$, получим квадрат без диска $P \diagdown \mathrm{Int}D = P_0$.

Определение 2. *Проекцией в T_0 называется такой граф в P_0, что валентность каждой его вершины равна 1 или 4, причем выполнены следующие условия:*

(1) *Все вершины валентности 4 лежат в $\mathrm{Int}P_0$, а вершины валентности 1 в ∂P_0.*
(2) *При упомянутых выше параллельных переносах вершины валентности 1 переходят в вершины валентности 1.*
(3) *Путь по ребрам графа, который проходит все вершины по правилу "прямо вперед", определяет полный обход соответствующего графа на торе.*

Диаграмма получается из проекции указанием разрывов в точках самопересечения, то есть вершинах валентности 4. Проекции и диаграммы дуг рассматриваются также с точностью до гомеоморфизмов пар. Число вершин валентности 4 будем называть сложностью проекции или диаграммы.

Определение 3. *Диаграмма заузленной дуги называется минимальной, если ее сложность не превосходит сложности диаграммы любой дуги, эквивалентной данной. Проекция заузленной дуги называется минимальной, если ей соответствует минимальная диаграмма хотя бы одной заузленной дуги.*

Теорема. *В утолщенном проколотом торе существует 101 заузленная дуга сложности ≤ 3, из них 2 дуги сложности 0, 3 дуги сложности 1, 19 дуг сложности 2 и 77 дуг сложности 3.*

Для доказательства различности заузленных дуг в утолщенном проколотом торе использовался обобщенный полином Кауффмана.

Определение 4. *Пусть $L \subset T_0 \times I$ — диаграмма заузленной дуги в $T_0 \times I$. Как и в [1], разрешение каждого ее состояния s задает в T_0 набор замкнутых кривых без пересечений и самопересечений. Тогда обобщенный полином Кауффмана имеет вид $X(K) = (-a)^{-3\omega(K)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)}(-a^{-2}-a^2)^{\gamma(s)} d^{\delta(s)} e^{\nu(s)} f^{\lambda(s)} g^{\mu(s)}$, где числа γ, δ, μ, ν и λ показывают, сколько кривых различных типов получается при разрешении.*

Свойства обобщенного полинома Кауффмана и доказательства его инвариантности относительно движений Райдемайстера для дуг в $T_0 \times I$ полностью совпадают с классическим случаем, описанным в книге [1].

Список литературы

[1] L. Kauffman, "State models and the Jones polynomal", *Topology*, Vol. 26, No. 3, 395–407 (1987).

ФГБОУ ВПО "Челябинский государственный университет", Челябинск, 454000, Россия
E-mail address: `ykilyina@gmail.com`

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00605, грантом НШ-1414.2012.1 по государственной поддержке ведущих научных школ и программой ОМН РАН (проект 12-Т-1-1003/2).

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ НАКРЫТИЯ СВЯЗНЫХ СУММ ЛИНЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

ТАТЬЯНА АНАТОЛЬЕВНА КОЗЛОВСКАЯ

В докладе будет представлен метод построения разветвленных циклических накрытий произвольного числа $k \geq 2$ связных сумм линзовых пространств $L(p_1, q_1)\#L(p_2, q_2)\# \dots \#L(p_k, q_k)$. С его помощью построен широкий класс трехмерных многообразий, определенных через их диаграммы Хегора и обладающих циклической симметрией. Этот класс содержит, как очень частный случай, примеры 3-многообразий из [1], разветвленных над связной суммой двух линзовых пространств.

Пусть p и q взаимно просты, $p > q > 0$, $p \geq 3$. Рассмотрим p-угольную бипирамиду на рис. 1. Обозначим через $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ вершины p-угольника, а через S_+ и S_- — вершины конусов. Отождествим грани по правилу $A_iS_+A_{i+1} \to A_{i+q}S_-A_{i+q+1}$, $i = 0, \dots, p-1$, при этом индексы берутся по модулю p и вершины склеиваются в том порядке, в котором они написаны. Получившееся многообразие называется *линзовым пространством* $L(p, q)$.

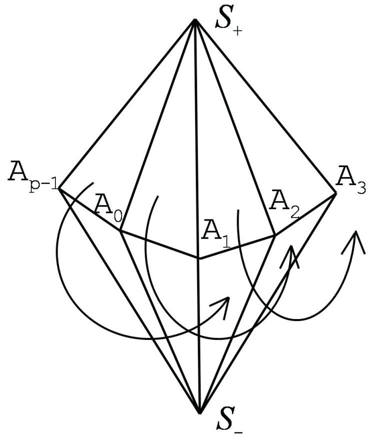


Рис. 1. p-угольная бипирамида.

В [2] рассматривались трехмерные многообразия, которые лежат в классе циклических накрытий $(1, b)$-зацеплений, $b \geqslant 2$. Отметим, что $(0, 1)$-узлы являются тривиальными узлами в $\mathbb{S}^3$, а $(0, 2)$-узлы и $(0, 2)$-зацепления являются двухмостовыми узлами и зацеплениями в $\mathbb{S}^3$. Бесконечные серии 3-многообразий, разветвленно циклически накрывающих линзовые пространства $L(p, q)$ (параметры p и q взаимно просты, $p > q > 0$, $p \geqslant 3$), с ветвлением вдоль двухкомпонетного зацепления, были построены и изучались в [3].

Перейдем к построению нового класса 3-многообразий. Определим диаграмму Хегора для частного случая — многообразия $N_{(8,3)(5,2)(7,2)}$(см. рис. 2). Рассмотрим шесть дисков $A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$. Границы дисков $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ ориентируем по часовой стрелке, а границы дисков A, B, C — против. На ∂A и $\partial\overline{A}$ отметим 12 точек, на $\partial B, \partial\overline{B}$ — 15 точек, а на ∂C и $\partial\overline{C}$ — 11 точек. Занумеруем точки в соответствии с выбранными выше направлениями обходов. Отождествим диски A и $\overline{A}$, B и $\overline{B}$, C и $\overline{C}$ так, чтобы вершины с одинаковыми метками отождествились. Отметим, что все дуги диаграммы разбиваются на три класса, каждый класс образует замкнутую кривую на поверхности Хегора. На рис. 2, дуги разных классов изображены линиями разных типов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 12-01-90812 молрф_нр и ведущих научных школ, НШ-1414.2012.

Теорема 1. *Диаграмма, приведенная на рисунке 2 (слева), является диаграммой Хегора замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия* $M(N_{(8,3)(5,2)(7,2)})$.

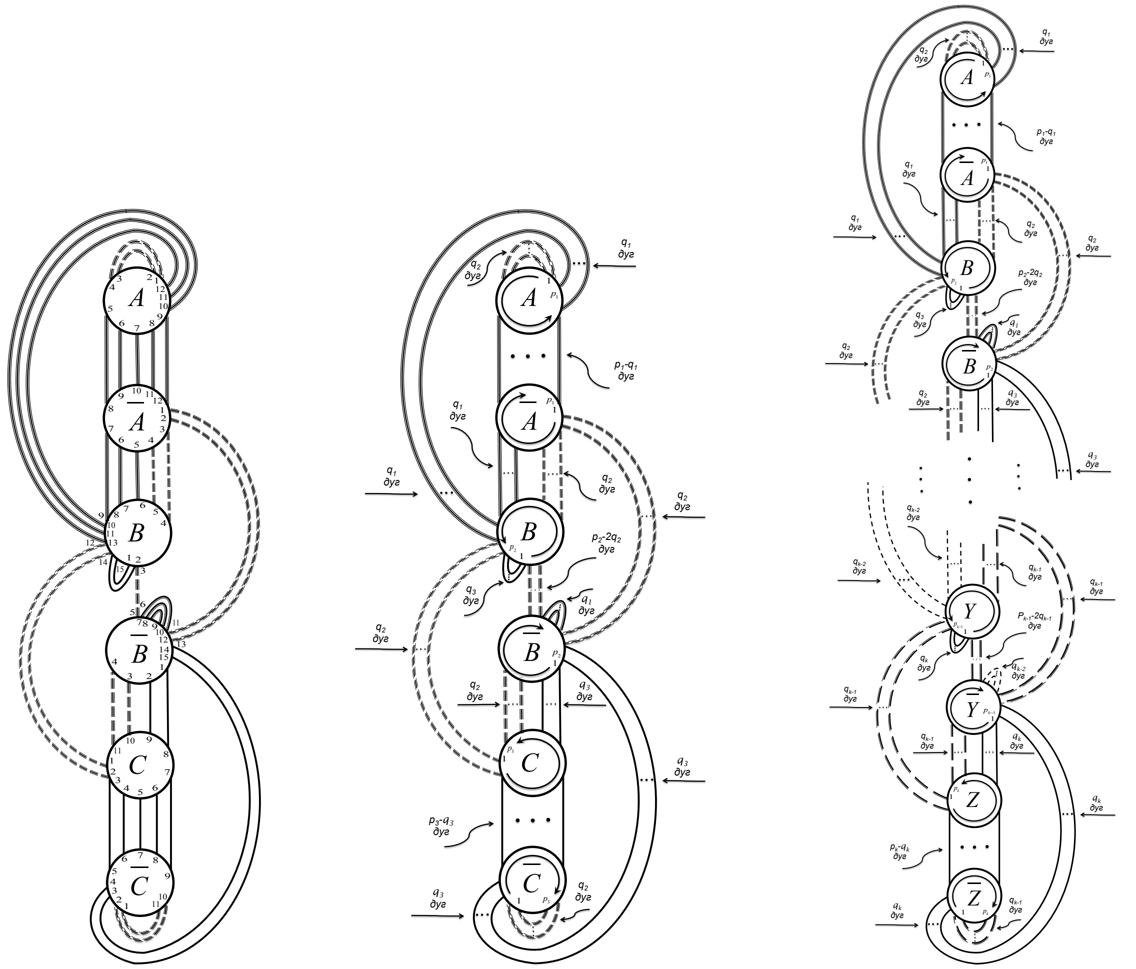


Рис. 2. Диаграммы Хегора для $N_{(8,3)(5,2)(7,2)}$, $N_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)(p_3,q_3)}$ и $N_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)\dots(p_k,q_k)}$.

Из приведенного выше примера становится понятно, как должны выглядеть диаграммы Хегора многообразий $N_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)(p_3,q_3)}$ и $N_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)\dots(p_k,q_k)}$. Эти диаграммы приведены на рис. 2 (в центре и справа). Обобщая циклически диаграмму Хегора многообразия $N_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)\dots(p_k,q_k)}$, мы получим диаграмму его n-листного разветвленного циклического накрытия $M(N_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)\dots(p_k,q_k)}, n)$.

Теорема 2. *Трехмерное многообразие* $M(N_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)\dots(p_k,q_k)}, n)$ *является* n*-листным разветвленным циклическим накрытием многообразия* $N_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)\dots(p_k,q_k)}$.

Список литературы

[1] P. Cristofori, M. Mulazzani, A. Vesnin "Strongly-cyclic branched coverings of knots via $(g,1)$-decompositions", *Acta Math. Hungarica*, 116, No. 1–2, 163–176 (2007).

[2] А. Веснин, Т. Козловская , "Разветвленные циклические накрытия линзовых пространств", *Сиб. матем. журн*, 52, No. 3, 542–554 (2011).

[3] P. Cristofori, T. Kozlovskaya, A. Vesnin, "Cyclic generalizations of two hyperbolic icosahedral manifolds", *Topology and Its Applications*, 159, No. 8, 2071–2081 (2012).

Магаданский институт экономики, г. Магадан, 685030, Россия
E-mail address: `konus_magadan@mail.ru`

AMENABILITY OF LOCALLY COMPACT GROUPS IN TERMS OF ORLICZ FUNCTIONS

YAROSLAV ANATOL'EVICH KOPYLOV

Below we assume all groups to be separated.

A locally compact group G is called *amenable* if it admits a G-invariant mean. There are a lot of equivalent formulations of amenability. Some of them are connected with the canonical left action of the group on the space $L_p(G)$ of functions integrable to the power p over G with respect to a left-invariant Haar measure μ_G on G.

Let V be a normed space of functions $f : G \to \mathbb{R}$ ($f : G \to \mathbb{C}$) such that if $f \in V$ then, for every $g \in G$, the function

$$\lambda_G(g)f(x) = f(g^{-1}x), \quad x \in G,$$

lies in V and $\|\lambda_G(g)f\|_V = \|f\|_V$. Then $\lambda_G : G \to B(V)$ is called the *left regular representation* of G in V.

Examples of such function spaces V are given by the space $L_p(G)$ of all real-valued functions on G integrable to the power p over G with respect to a left-invariant Haar measure μ_G. Instead of the L_p spaces, one can consider more general Orlicz spaces $L_\Phi(G)$ of real-valued functions on G for an N-function Φ.

In [3], Stegeman proved that, for a locally compact group, the following conditions (P_p) are equivalent for all $p \geq 1$:

(P_p) for every compact set $F \subset G$ and every $\varepsilon > 0$, there exists a function $f \in L_p(G)$ with $f \geq 0$ and $\|f\|_{L_p(G)} = 1$ such that $\|\lambda_G(z)f - f\|_{L_p(G)} < \varepsilon$ for all $z \in F$.

In [1] Eymard extended this equivalence to quotients G/H of locally compact groups by closed subgroups and proved that conditions (P_p) are equivalent to the amenability of G/H.

Theorem 1. *Let Φ be a differentiable Δ_2-regular N-function and let G be a locally compact group. The group G is amenable if and only if G satisfies the following property:*

(P_Φ) for every compact set $F \subset G$ and every $\varepsilon > 0$, there exists a function $f \in L_\Phi(G)$ with $f \geq 0$ and $\|f\|_{L_{(\Phi)}(G)} = 1$ such that $\|\lambda_G(z)f - f\|_{L_{(\Phi)}(G)} < \varepsilon$ for all $z \in F$.

Here $\|\cdot\|_{L_{(\Phi)}(G)}$ stands for the gauge norm in the space $L_\Phi(G)$.

Corollary 1. *The properties (P_Φ) are equivalent for all differentiable Δ_2-regular N-functions Φ.*

Let G be a topological group and let V be a topological G-module, i.e., a real or complex topological vector space endowed with linear representation $\pi : G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \pi(g)v$. The space V is called a *Banach G-module* if V is a Banach space and π is a representation of G by isometries of V. Introduce the notation:

$$Z^1(G,V) := \{b : B \to V \text{ continuous } \mid b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h)\} \quad (\textit{1-cocycles});$$

$$B^1(G,V) = \{b \in Z^1(G,V) \mid (\exists v \in V)\,(\forall g \in G)\; b(g) = \pi(g)v\} \quad (\textit{1-coboundaries});$$

$$H^1(G,V) = Z^1(G,V)/B^1(G,V) \quad (\textit{1-cohomology with coefficients in } V).$$

The author was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 12-01-00873-a), the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools and Junior Scientists of the Russian Federation (Grant NSh-921.2012.1), and the Integration Project 12-II-CO-01M-002 "Geometric Analysis of Actual Problems in Function Theory and Differential Equations" of the Siberian and Far-Eastern Branches of the Russian Academy of Sciences.

Endow $Z^1(G,V)$ with the topology of uniform convergence on compact subsets of G and denote by $\overline{B}^1(G,V)$ the closure of $B^1(G,V)$ in this topology. The quotient $\overline{H}^1(G,V) = Z^1(G,V)/\overline{B}^1(G,V)$ is called the *reduced 1-cohomology* of G with coefficients in the G-module V.

Corollary 2. *Suppose that Φ is a differentiable Δ_2-regular N-function. If G is a noncompact second countable locally compact group then the following are equivalent:*

(i) $H^1(G, L_\Phi(G)) = \overline{H}^1(G, L_\Phi(G))$*;*

(ii) *G is not amenable.*

The following assertion is a generalization of a theorem proved for the L_p spaces in [2]:

Theorem 2. *Assume that Φ is a differentiable Δ_2-regular N-function. Let G be a second countable locally compact group and let H be a closed subgroup in G. The following are equivalent:*

(i) *for every compact set $F \subset H$ and every $\varepsilon > 0$, there exists a function $f \in L_\Phi(G)$ with $\|f\|_{L_{(\Phi)}(G)} = 1$ such that $\|\lambda_H(z)f - f\|_{L_{(\Phi)}(G)} < \varepsilon$ for all $z \in F$.*

(ii) *H is amenable.*

References

[1] P. Eymard, *Moyennes Invariantes et Représentations Unitaires*, Springer Verlag, Lect. Notes in Math. **300**, 1972.

[2] Ya. Kopylov, "An L_p-criterion of amenability for a locally compact group,", *Sib. Electr. Math. Reports* **2**, 186–189 (2005).

[3] J. D. Stegeman, "On a property concerning locally compact groups," *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **68**, 702–703 (1965).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, RUSSIA

E-mail address: yakop@math.nsc.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП МНОГООБРАЗИЙ В ГРУППУ ПОДСТАНОВОК

ФИЛИПП ГЛЕБОВИЧ КОРАБЛЁВ

Пусть M — n-мерное многообразие, $n \geqslant 2$, и пусть T — его такая триангуляция, что любые два i-мерных симплекса пересекаются не более, чем по одной $(i-1)$-мерной грани. В работе [1] Рубенштейном был предложен способ построения представлений фундаментальной группы $\pi_1(M)$ в группу подстановок S_{n+1}, причем эти представления существенным образом зависят от выбора триангуляции T многообразия M.

Нами был построен аналог представлений в группу S_4 для фундаментальных групп трёхмерных многообразий, заданных своими *чётными* специальными спайнами (то есть спайнами, каждая 2-компонента которых является многоугольником с чётным числом сторон). Такие представления группы $\pi_1(M)$ в группу S_4 мы будем называть *геометрическими*. Отметим, что если T — триангуляция 3-многообразия M, и P — чётный специальный спайн многообразия M, двойственный к триангуляции T, то геометрическое представление группы $\pi_1(M)$ в группу S_4 совпадает с представлением Рубенштейна, построенному по триангуляции T.

Пусть $C = \{0, 1, 2, 3\}$, и пусть v — истинная вершина специального спайна P многообразия M. *Раскраской вершины* v будем называть биекцию между множеством дуг ребер особого графа $S(P)$, примыкающих к вершине v, и множеством C. Пусть e — ребро графа $S(P)$, инцидентное истинным вершинам u, v спайна P. Определим *перенос* раскраски вершины v вдоль ребра e следующим образом: дугу ребра e, примыкающую к вершине u, раскрасим цветом, совпадающим с цветом дуги ребра e, примыкающей к вершине v, а все другие дуги рёбер графа $S(P)$, примыкающие к вершине u, раскрасим так, чтобы в окрестности ребра e каждая 2-компонента спайна P примыкала к дугам графа $S(P)$ ровно двух различных цветов.

Можно показать, что если P — чётный специальный спайн 3-многообразия M, то перенос раскраски вдоль любой петли по рёбрам графа $S(P)$ с началом в фиксированной вершине v корректным образом задает представление группы $\pi_1(M, v)$ в группу S_4. Такое представление называется *геометрическим*. Заметим, что геометрическое представление зависит от выбора чётного спайна P многообразия M.

Была обнаружена тесная связь между геометрическими представлениями и теорией кристаллизаций (введение в теорию кристаллизаций см. в [2]). Напомним, что *геммой* называется регулярный граф степени 4, рёбра которого раскрашены в четыре цвета так, что каждой вершине инцидентны рёбра всех четырёх цветов. Каждая гемма задаёт 3-многообразие, специальный спайн которого получается из геммы приклейкой дисков вдоль всех двухцветных циклов.

Теорема. *Пусть M — 3-многообразие, P — его чётный специальный спайн. Геометрическое представление группы $\pi_1(M)$ тривиально тогда и только тогда, когда спайн P получается из некоторой геммы приклейкой дисков вдоль всех двухцветных циклов.*

Следствие. *1. Любое 3-многообразие, возможно после удаления нескольких шаров, допускает чётный специальный спайн;*

2. Пусть M — такое замкнутое 3-многообразие, что любое представление группы $\pi_1(M)$ в группу S_4 тривиально. Тогда многообразие M не допускает чётного специального спайна;

Исследования поддержаны грантом РФФИ №11-01-00605 и грантом НШ-1414.2012.1 по государственной поддержке ведущих научных школ.

3. Если замкнутое 3-многообразие M допускает чётный специальный спайн P, то соответствующее геометрическое представление группы $\pi_1(M)$ в группу S_4 нетривиально.

Был проведён компьютерный эксперимент по перечислению минимальных чётных специальных спайнов 3-многообразий, сложность которых не превосходит 8, и вычислению соответствующих геометрических представлений. Всего было рассмотрено 65 многообразий. Оказалось, что образом геометрического представления является:

(1) группа $\mathbb{Z}_4$ для 39 многообразий;
(2) группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ для 10 многообразий;
(3) группа D_8 для 12 многообразий;
(4) группа A_4 для двух многообразий;
(5) группа S_4 для двух многообразий.

Список литературы

[1] J. Hyam Rubinstein, "Triangulations of n-Manifolds", *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, Report No. 24, 28—32 (2012).

[2] P. Bandieri, M. R. Casali, C. Gagliardi, "Representing manifolds by crystallization theory: foundations, improvements and related results", *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena Suppl.*, 49, 283–337 (2001).

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, 454000, Россия
E-mail address: korablev@csu.ru

SEMICLASSICAL SPECTRAL ASYMPTOTICS FOR A TWO-DIMENSIONAL MAGNETIC SCHRÖDINGER OPERATOR

YURI ARKAD'EVICH KORDYUKOV

Let (M, g) be a two-dimensional compact oriented Riemannian manifold (possibly with boundary), and let $\mathbf{A}$ be a real-valued differential 1-form on M. A Schrödinger operator with magnetic potential $\mathbf{A}$ (a magnetic Laplacian) is the second order differential operator on M defined by

$$H^h = (ih\, d + \mathbf{A})^*(ih\, d + \mathbf{A}).$$

Here $h > 0$ is a constant (a semiclassical parameter), $i = \sqrt{-1}$, $d : C_c^\infty(M) \to \Omega_c^1(M)$ is the de Rham differential, and the operator $(ih\, d + \mathbf{A})^* : \Omega_c^1(M) \to C_c^\infty(M)$ is the adjoint of the operator $ih\, d+\mathbf{A} : C_c^\infty(M) \to \Omega_c^1(M)$ with respect to the natural Hilbert structures on $C_c^\infty(M)$ and $\Omega_c^1(M)$. If M has non-empty boundary, we will assume that the operator H^h satisfies the Dirichlet boundary condition.

Consider a closed 2-form $\mathbf{B} = d\mathbf{A}$ on M (the magnetic field). We can write $\mathbf{B} = b\, dx_g$, where $b \in C^\infty(M)$ and dx_g is the Riemannian volume form. Assume that

$$b_0 = \min_{x\in M} |b(x)| > 0.$$

We consider two cases:

1. *The case of discrete wells:* the set $\{x \in M : |b(x)| = b_0\}$ is a single point x_0, which belongs to the interior of M, and the magnetic field b is non-degenerate at x_0.
2. *The case of degenerate wells:* the set $\{x \in M : |b(x)| = b_0\}$ is a smooth curve γ, which is contained in the interior of M, and the magnetic field b is non-degenerate at γ.

In both cases, we study the asymptotic behavior of the eigenvalues of the operator H^h as $h \to 0$ (in semiclassical limit). First, we state asymptotic formulae for the low-lying eigenvalues $\lambda_0(H^h) \leq \lambda_1(H^h) \leq \lambda_2(H^h) \leq \dots$ of H^h. Then we discuss the eigenvalues of H^h contained in an interval $(-\infty, h(b_0 + \epsilon)]$ for some $\epsilon > 0$. Finally, we give geometric interpretations of our results and discuss some related problems in differential geometry and integrable systems.

This is joint work with B. Helffer [1, 2].

References

[1] B. Helffer, Y. A. Kordyukov, "Semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator: The case of discrete wells", Spectral Theory and Geometric Analysis, *Contemp. Math.*, 535, 55–78; AMS, Providence, RI, (2011).

[2] B. Helffer, Y. A. Kordyukov, "Semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator. II: The case of degenerate wells", *Comm. Partial Differential Equations*, 37, 55–78 (2012).

Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008, Russia

E-mail address: yurikor@matem.anrb.ru

Partially supported by the Russian Foundation of Basic Research (grants 09-01-00389 and 12-01-00519).

АФФИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ НА АЛГЕБРОИДАХ ЛИ

ЕВГЕНИЙ СЕРГЕЕВИЧ КОРНЕВ

Пусть M — многообразие класса C^∞ и E — векторное расслоение над M, на котором задана структура алгеброида Ли, т. е. определена операция взятия скобки Ли $[\sigma,\tau]$ двух сечений σ и τ расслоения E, обладающая свойствами: существует непрерывное отображение $\psi : E \to TM$ линейное на слоях и такое, что $[\psi\,\sigma, \psi\,\tau] = \psi[\sigma,\tau]$; для любой функции $f \in C^\infty(M), [\sigma, f\tau] = (\psi\,\sigma)(f)\tau + f[\sigma,\tau]$. Действие сечения σ на функцию f определяется как $\sigma(f) = (\psi\,\sigma)(f)$.

Пусть α — 1-форма на алгеброиде Ли E. Наличие операции взятия скобки Ли любых двух сечений векторного расслоения E позволяет определить на алгеброиде Ли внешний дифференциал $d\alpha$ стандартным способом:

$$d\alpha(\sigma,\tau) = \sigma(\alpha(\tau)) - \tau(\alpha(\sigma)) - \alpha([\sigma,\tau]).$$

Радикалом 1-формы α в точке $x \in M$ называется множество $\mathrm{rad}\alpha_x$ всех элементов $\sigma \in E_x : i_\sigma d\alpha = 0$, где i_σ — внутреннее произведение сечения σ на внешнюю форму. 1-форма α называется регулярной, если распределение $\mathrm{rad}\alpha$ имеет постоянный ранг на M. Для незамкнутой регулярной 1-формы α ее радикал является векторным подрасслоением в E, которое обозначается $\mathrm{rad}\alpha$.

Пусть D — фиксированное дополнительное к подрасслоению $\mathrm{rad}\alpha$ векторное подрасслоение в $E : E = D \oplus \mathrm{rad}\alpha$. При наличии на E римановой метрики D всегда можно выбрать как ортогональное дополнение радикала относительно этой метрики. Можно доказать, что вне зависимости от ранга $\mathrm{rad}\alpha$ подрасслоение D всегда имеет четный ранг.

Аффинором, ассоциированным с незамкнутой регулярной 1-формой α, называется непрерывное поле $\varPhi$ послойных эндоморфизмов векторного расслоения E, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) $\ker\varPhi = \mathrm{rad}\alpha$,
(2) $\varPhi^2|_D = -\,\mathrm{id}$,
(3) $d\alpha \circ \varPhi = d\alpha$,
(4) Для любого сечения $\sigma, d\alpha(\sigma, \varPhi\sigma) \geqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть g — риманова метрика на алгеброиде Ли E, α — незамкнутая регулярная 1-форма на E, и Φ — поле сохраняющих метрику g послойных эндоморфизмов E, такое что для любых двух сечений $\sigma,\tau, d\alpha(\sigma,\tau) = g(\varPhi\sigma,\tau)$. Тогда Φ есть аффинор, ассоциированный с 1-формой α, на E.*

Пара $\alpha, \varPhi$, где α — незамкнутая регулярная 1-форма с ненулевым радикалом, $\varPhi$ — ассоциированный с 1-формой α аффинор, называется аффинорной структурой на алгеброиде Ли. Аффинорная структура однозначно определяется незамкнутой регулярной 1-формой α с ненулевым радикалом, выбором подрасслоения D и комплексной структурой J на D, ассоциированной с замкнутой 2-формой $d\alpha$. Обратно, ограничение аффинора $\varPhi$ на подрасслоение D задает на D комплексную структуру, ассоциированную с симплектической формой $d\alpha$ на D. Необходимое условие существования на алгеброиде Ли аффинорной структуры дает следующая теорема:

Работа поддержена грантом РФФИ 12-01-00873-а,
а также президентским грантом по поддержке научных школ НШ-544.2012.1.

Теорема 2. *Пусть E — алгеброид Ли ранга $\geqslant 3$ и $e(\Lambda^2(E))$ — класс Эйлера векторного расслоения внешних 2-форм на E, а $w_1(D)$ — первый класс Штифеля-Уитни подрасслоения D. Тогда, если на алгеброиде Ли E существует аффинорная структура, то $e(\Lambda^2(E)) = w_1(D) = 0$.*

Пусть E — алгеброид Ли ранга $r \geqslant 3$ и на многообразии M существует набор из r глобальных линейно независимых сечений $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ векторного расслоения E. Тогда на E можно построить метрику g_0, относительно которой этот набор сечений образует ортонормированный базис слоя в каждой точке $x \in M$. Пусть α — незамкнутая регулярная 1-форма на E с радикалом ранга k, и $n = r-k$. обозначим через D ортогональное дополнение радикала относительно метрики g_0. Положим, при $i \leqslant n$, $\sigma_i \in D$, а при $n < i \leqslant r$, $\sigma \in \mathrm{rad}\alpha$, $d\alpha(\sigma_i, \sigma_j) = a_{ij}$. Тогда, если выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij},$$

то поле послойных эндоморфизмов $\varPhi : \varPhi\sigma_i = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\sigma_k$ есть аффинор, ассоциированный с 1-формой α, и мы получаем аффинорную структуру на алгеброиде Ли E.

Понятие аффинора можно обобщить следующим образом: Пусть α — незамкнутая регулярная 1-форма на алгеброиде Ли E, D — подрасслоение в E: $E = D \oplus \mathrm{rad}\alpha$ и λ — произвольное вещественное число. λ-аффинором, ассоциированным с 1-формой α, называется непрерывное поле $\varPhi_\lambda$ послойных эндоморфизмов E, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\varPhi_\lambda|_{\mathrm{rad}\alpha} = \lambda\, \mathrm{id}$,
(2) $\varPhi_\lambda^2|_D = -\,\mathrm{id}$,
(3) $d\alpha \circ \varPhi_\lambda|_D = d\alpha|_D$,
(4) Для любого сечения $\sigma, d\alpha(\sigma, \varPhi_\lambda\sigma) \geqslant 0$.

Очевидно, что при $\lambda = 0$ 0-аффинор это обычный аффинор. Также легко проверить, что λ-аффинор сохраняет 2-форму $d\alpha$ не только на D, но и на всем E.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: q148@mail.ru

ON MORSE–SARD THEOREM, N-PROPERTY AND LEVEL SETS FOR THE SHARP CASE OF SOBOLEV–LORENTZ MAPPINGS

MIKHAIL VYACHESLAVOVICH KOROBKOV

In the talk we extend the results of joint papers [1,2] to the case of vector-valued mappings. Denote by $\mathrm{W}^k_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$ the space of mappings $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^d$ such that all its distributional derivatives up to order k belong to $L_p(\mathbb{R}^n)$, moreover, the derivatives of order k belong to the Lorentz space $L_{p,1}(\mathbb{R}^n)$. For a given $m\in\{1,\dots,n\}$ denote $k_\circ=n-m+1$, $p_\circ=\frac{n}{k}$.

Theorem 1 (N-property). *Let $m\in\{1,\dots,n\}$ and $v\in\mathrm{W}^{k_\circ}_{p_\circ,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$. Then for each $\varepsilon>0$ there exists $\delta>0$ such that for any set $E\subset\mathbb{R}^n$ if $\mathcal{H}^m_\infty(E)<\delta$, then $\mathcal{H}^m_\infty(v(E))<\varepsilon$. In particular, $\mathcal{H}^m(v(E))=0$ whenever $\mathcal{H}^m(E)=0$.*

Here $\mathcal{H}^m$, $\mathcal{H}^m_\infty$ denote the m–dimensional Hausdorff measure, Hausdorff content, respectively: for any $F\subset\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^m(F)=\lim\limits_{\alpha\searrow 0}\mathcal{H}^m_\alpha(F)=\sup_{\alpha>0}\mathcal{H}^m_\alpha(F)$, where for each $0<\alpha\le\infty$,

$$\mathcal{H}^m_\alpha(F)=\inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty(\operatorname{diam}F_i)^m\ :\ \operatorname{diam}F_i\le\alpha,\quad F\subset\bigcup_{i=1}^\infty F_i\Big\}.$$

Recall, that if $f\in\mathrm{W}^k_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $k\le n$, then $\nabla f(x)$ is well-defined for $\mathcal{H}^{n-k+1}$-almost all $x\in\mathbb{R}^n$, i.e., there exists a set A_f such that $\mathcal{H}^{n-k+1}(A_f)=0$ and

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|\nabla f(z)-\nabla f(x)|\,\mathrm{d}z=0.$$

Let $m\in\{1,\dots,n\}$. Then, in virtue of $n-k_\circ+1=m$, for $v\in\mathrm{W}^{k_\circ}_{p_\circ}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$ there exists a set A_v such that $\mathcal{H}^m(A_v)=0$ and the gradient $\nabla v(x)$ is well-defined at all points $x\in\mathbb{R}^n\setminus A_v$. Denote $Z_{v,m}=\{x\in\mathbb{R}^n\setminus A_v:\operatorname{rank}\nabla v(x)<m\}$.

Theorem 2 (Morse-Sard property). *If $m\in\{1,\dots,n\}$ and $v\in\mathrm{W}^{k_\circ}_{p_\circ}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$, then $\mathcal{H}^m(v(Z_{v,m}))=0$.*

Corollary 3 (level sets structure). *Let $v\in\mathrm{W}^{k_\circ}_{p_\circ,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Then for almost all $y\in v(\mathbb{R}^n)$ the preimage $v^{-1}(y)$ is a finite disjoint family of $(n-m)$-dimensional C^1-smooth compact manifolds (without boundary) S_j, $j=1,\dots,N(y)$.*

In particular cases, for $m=n$ the results were proved in [3], and for $m=1$ they were established in [1,2]. These results have application in fluid mechanics (see, e.g., [4]).

References

[1] Bourgain J., Korobkov M. V., Kristensen J., "On the Morse–Sard property and level sets of Sobolev and BV functions," *Rev. Mat. Iberoam.,* **29**, No. 1, 1–23 (2013).

[2] Bourgain J., Korobkov M. V., Kristensen J., "On the Morse–Sard property and level sets of $\mathrm{W}^{n,1}$ Sobolev functions on $\mathbb{R}^n$," *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, (Online first), DOI: 10.1515/crelle-2013-0002, March 2013.

[3] Kauhanen J., Koskela P., and Maly J., "On functions with derivatives in a Lorentz space," *Manuscripta Math.*, **100**, No. 1, 87–101 (1999).

[4] Korobkov M. V., Pileckas K., Russo R.., "On the flux problem in the theory of steady Navier–Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions," *Arch. Rational Mech. Anal.*, **207**, 185–213 (2013).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: korob@math.nsc.ru

The author was supported by the Integration Project SB-FEB RAS (project No. 56), and by the President of the Russian Federation (Grants NSh-921.2012.1, MD-5146.2013.1).

ГЕЛИКОИДЫ ДИНИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

АНДРЕЙ ВИКТОРОВИЧ КОСТИН

В работе изучаются поверхности постоянной кривизны, полученные винтовыми движениями псевдоевклидовых трактрис.

Геликоид Дини — поверхность, получаемая винтовым движением трактрисы в евклидовом пространстве. В трёхмерном псевдоевклидовом пространстве существуют различные аналоги этой поверхности. Ситуация здесь более разнообразна, поскольку имеются различные аналоги трактрисы и различные типы винтовых движений. Приведём один из примеров. Рассмотрим в трёхмерном пространстве Минковского поверхность

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cdot cosh(u)cos(v), \\ y & = & a\cdot cosh(u)sin(v), \\ z & = & a(sinh(u)-arctan(sinh(u)))+b\cdot v. \end{array}\right.$$

Эта поверхность получена эллиптическим винтовым движением с осью z трактрисы, у которой касательная имеет вещественную длину, а база — мнимую.

При a>b метрика поверхности будет положительно определённой. Рассмотрим сначала этот случай. Гауссова кривизна дефинитной метрики поверхности трёхмерного пространства Минковского удовлетворяет условию $K=-\frac{h}{g}$, где g,h — дискриминанты первой и второй квадратичных форм соответственно. Кривизна поверхности в данном случае постоянна и равна $-\frac{1}{a^2-b^2}$. Геодезическая кривизна винтовых линий на этой поверхности при отличной от нуля скорости трансляции больше $\frac{1}{R}$, где $R=\sqrt{a^2-b^2}$, поэтому винтовые орбиты во внутренней геометрии поверхности являются окружностями. Ребру поверхности соответствует значение $u=0$. Геодезическая кривизна ребра равна $\frac{a}{a^2-b^2}$. Отсюда следует, что поверхность изометрично накрывает плоскость Лобачевского кривизны $K=-\frac{1}{a^2-b^2}$, из которой вырезан круг радиуса $r=\sqrt{a^2-b^2}\cdot arccoth\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$. При $b\neq 0$ трактрисы, как и при $b=0$, являются линиями кривизны на поверхности, но уже не играют роль прямых во внутренней геометрии поверхности, и вообще перестают быть линиями постоянной кривизны. Ортогональные траектории трактрис, как и в евклидовом случае, являются сферическими кривыми — в данном случае кривыми на сфере вещественного радиуса трёхмерного пространства Минковского — и образуют второе семейство линий кривизны на поверхности.

При $b=0$ данный геликоид, как и геликоид Дини, является поверхностью вращения. Лишь в этом случае их геометрии согласуются в том смысле, что одна поверхность является продолжением другой. Вместе, если взять по одной полости каждой поверхности, они образуют “полную псевдосферу” — поверхность, изометричную поверхности вращения прямой вокруг параллельной ей прямой в трёхмерном пространстве Лобачевского.

При $a<b$ на рассматриваемой поверхности индуцируется индефинитная метрика постоянной кривизны, то есть метрика идеальной области плоскости Лобачевского, или метрика де Ситтера. При $a=b$ на поверхности индуцируется вырожденная метрика. Таким образом, в зависимости от скорости трансляции при эллиптическом винтовом движении этой трактрисы мы получим три различные геометрии.

Список литературы

[1] T. Ikawa, “Bour’s theorem in Minkowski geometry”, *Tokyo J. Math.*, 24, 377–394 (2001),

[2] А.Г. Попов, Е.В. Маевский, “Аналитические подходы к исследованию уравнения sin-Гордона и псевдосферических поверхностей”, *Современная математика и ее приложения*, 31, 13–52 (2005).

ЕФ КНИТУ-КАИ им. А.Н.Туполева, Елабуга, 423602, Строителей, 16, Россия
E-mail address: kostin_andrei@mail.ru

ВЫРОЖДЕНИЕ ПЕДАЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО

НАТАЛЬЯ НИКОЛАЕВНА КОСТИНА

На евклидовой плоскости педальный треугольник точки M относительно треугольника ABC вырожден тогда и только тогда, когда точка M принадлежит описанной окружности треугольника ABC. Элементарное доказательство этой теоремы имеется, например, в книге Коксетера и Грейтцера [1]. В данной работе доказывается аналогичная теорема для треугольников на плоскости Минковского.

Пусть ABC — треугольник с неизотропными сторонами на плоскости Минковского с метрикой

$$ds^2 = dx^2 - dy^2$$

в декартовых координатах. Обозначим координаты вершин треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Опустим из точки $M(x, y)$ перпендикуляры на стороны треугольника (ортогональные направления на плоскости Минковского сопряжены относительно окружности этой плоскости). Обозначим через A_1 проекцию точки M на сторону BC, через B_1 — проекцию точки M на сторону AC, через C_1 — проекцию точки M на сторону AB. Исключение изотропных сторон обусловлено тем, что прямые, ортогональные изотропным прямым, параллельны им. Поэтому ортогональная проекция точки M на изотропую прямую не определяется. Имеет место

Теорема. *Педальный треугольник точки M относительно треугольника ABC на плоскости Минковского вырожден тогда и только тогда, когда точка M принадлежит описанной окружности этого треугольника.*

Доказательство. Для сокращения записи введём следующие обозначения:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}(c_x, c_y), \overrightarrow{BC} = a(a_x, a_y), \overrightarrow{CA} = b(b_x, b_y),$$
$$a^2 = a_x^2 - a_y^2, b^2 = b_x^2 - b_y^2, c^2 = c_x^2 - c_y^2. \tag{1}$$

Тогда условие вырождения треугольника A_1 B_1 C_1 (принадлежности его вершин одной прямой) можно представить в виде равенства нулю определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} (xa_x^2 - x_2a_y^2 - (y - y_2)a_xa_y & (x - x_2)a_xa_y + y_2a_x^2 - ya_y^2 & a^2 \\ xb_x^2 - x_3b_y^2 - (y - y_3)b_xb_y & (x - x_3)b_xb_y + y_3b_x^2 - yb_y^2 & b^2 \\ xc_x^2 - x_1c_y^2 - (y - y_1)c_xc_y & (x - x_1)c_xc_y + y_1c_x^2 - yc_y^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Поскольку переменные x, y присутствуют в каждом из элементов первых двух столбцов в первой степени, этим уравнением на плоскости Минковского задаётся линия второго порядка. Выписав отдельно квадратичную часть уравнения этой линии, видим, что коэффициенты при x^2 и y^2 равны по величине и противоположны по знаку, а коэффициент при xy равен нулю. Поэтому уравнение (2) задаёт окружность на плоскости Минковского. Непосредственной проверкой убеждаемся, что данная окружность проходит через вершины треугольника ABC. Теорема доказана.

Уравнение описанной окружности треугольника ABC на плоскости Минковского станет более наглядным, если повысить порядок определителя и представить его в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x^2 - y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 - y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 - y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 - y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Такую форму записи можно получить, рассмотрев стереографическую проекцию сферы

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

трёхмерного пространства Минковского на плоскость $z = 0$. Условие (3) при этом будет эквивалентно тому, что четыре точки, соответствующие при стереографической проекции точкам A, B, C, M, будут принадлежать одному плоскому сечению сферы. Записав уравнения двух медиатрис треугольника ABC, получим координаты центра этой окружности:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} x_1^2 - y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 - y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 - y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}, \\ y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} x_1^2 - y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 - y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 - y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}. \end{cases} \tag{4}$$

Список литературы

[1] Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер. *Новые встречи с геометрией.* М.: Наука (1978).

ЕФ КНИТУ-КАИ им. А.Н.Туполева, Елабуга, 423602,Строителей,16,Россия
E-mail address: natnikost@mail.ru

ПРОСТРАНСТВА МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРЕДПИСАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

ТАТЬЯНА СЕРГЕЕВНА КРЕПИЦИНА

В работе получены новые результаты по теории мультипликативных функций на переменных торах. Пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_1(F_0)$, состоящее из классов $[F_\mu, \{a_1^\mu, b_1^\mu\}]$ конформно эквивалентных отмеченных торов, параметризовано точками $H = \{\mu \in \mathbb{C} : Im\mu > 0\}$ и $F_\mu = \mathbb{C}/\Gamma_\mu$, Γ_μ порождается двумя образующими $A_{\mu 1}(z) = z+1$, $B_{\mu 1}(z) = z+\mu$. Характер ρ на торе F_μ это произвольный гомоморфизм из Γ_μ в $\mathbb{C}^*$. Мультипликативной функцией f на F_μ для ρ называется однозначная мероморфная функция $w = f(z)$ на $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям $f(Tz) = \rho(T)f(z),\ z \in \mathbb{C},\ T \in \Gamma_\mu$. Если f_0 — мультипликативная функция без нулей и полюсов на F_μ, то её характер ρ будем называть несущественным. Несущественные характеры образуют подгруппу L_1 в группе всех характеров $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$. Обозначим через $L_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_{1+r}}; F_\mu)$ векторное пространство, состоящее из мультипликативных функций, кратных дивизору $\frac{1}{Q_1 \dots Q_{1+r}}$. Возьмем набор линейно независимых функций $f_1, ..., f_{r+1}$, голоморфно зависящих от ρ и μ, где $f_j \in L_\rho(\frac{1}{Q_j}; F_\mu)$, $j = 1, ..., r+1$.

Теорема 1. *Векторное расслоение* $\bigcup\limits_{\mu,\rho} L_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_{1+r}}; F_\mu)$ *является голоморфным векторным расслоением ранга* $r+1$ *над* $\mathbb{T}_1 \times (Hom\ (\Gamma, \mathbb{C}^*) \setminus L_1)$ *для любого* $r \geq 0, r \in \mathbb{N}$ *и любого дивизора* $Q_1(\mu) \dots Q_{1+r}(\mu)$, *состоящего из попарно различных точек, степени* $1+r$ *на* F_μ, *локально голоморфно зависящего от* μ. *При этом набор* $f_1, ..., f_{r+1}$ *образует базис локально голоморфных сечений этого расслоения..*

Обозначим через $R_1, ..., R_{r+1}$ любой базис в $L(\frac{1}{Q_1 \dots Q_{r+1}}; F_\mu)$, голоморфно зависящий от μ.

Теорема 2. *Векторное расслоение* $\bigcup\limits_{\mu,\rho} L_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_{1+r}}; F_\mu)$ *является голоморфным векторным расслоением ранга* $r+1$ *над* $\mathbb{T}_1 \times (L_1 \backslash 1)$ *для любого* $r \geq 0, r \in \mathbb{N}$ *и любого дивизора* $Q_1(\mu) \dots Q_{1+r}(\mu)$, *состоящего из попарно различных точек, степени* $1+r$ *на* F_μ, *локально голоморфно зависящего от* μ. *При этом набор* $f_0R_1, ..., f_0R_{r+1}$ *образует базис локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Кроме того, найден аналог формулы разложения Аппеля для мультипликативных функций с характерами на переменном торе F_μ, в которой простые элементы (слагаемые) будут иметь полюса только в одной точке на F_μ.

Список литературы

[1] Чуешев, В.В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности*, Ч.2 – Кемерово, КемГУ (2003).

[2] Крепицина, Т.С. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменных торах.* Вестник НГУ, 12, Вып. 1, 74–90 (2012).

Кемеровский государственный университет, Кемерово, 650000 , Россия
E-mail address: kc-fabira@mail.ru

Работа поддержана грантами ФЦП, N 02.740.11.0457.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ШУБЕРТА

АЛЁНА МИХАЙЛОВНА КУЛАКОВА

Доклад посвящен доказательству теоремы Шуберта о существовании и единственности примарного разложения узла в сфере S^3. Эта теорема была доказана Шубертом в начале прошлого века. Доказательство было весьма громоздким и занимало более тридцати страниц трудного текста. В докладе приводится новое доказательство этой теоремы, основанное на последних достижениях теории корней топологических объектов. Новое доказательство теоремы Шуберта получилось простым и понятным.

Будем рассматривать узлы в трехмерных сферах.

Теорема Шуберта. *Любой нетривиальный узел K можно представить в виде конечной связной суммы $K = K_1\#K_2\#...\#K_n$, где все K_i примарные. Все слагаемые определены однозначно с точностью до перестановки.*

Доказывать теорему будем в два этапа. На первом этапе докажем существование примарного разложения, а на втором его единственность с точностью до поряка.

Первый этап.

Существование примарного разложения вытекает из обобщения леммы Х. Кнезера [1]. Х. Кнезер доказал лемму для многообразий без узлов, а С.В. Матвеев — обобщил на многообразия с графами. Нужный нам случай получается, когда вместо графа выступает окружность, а вместо многообразия — трехмерная сфера:

Лемма. *Для любой пары (S^3, K) найдется такое число C, что любая последовательность примененных к ней нетривиальных сферических редукций имеет длину не более C.*

Второй этап.

Докажем единственность примарого разложения. Допустим, что утверждение теоремы неверно.

1) Т.е. существует такой узел K, который имеет два различных разложения на примарные слагаемые. Такой узел назовем сингулярным, в противном случае — регулярным.

2) Назовем узел K_i потомком узла K, если он является одним из узлов, получающихся из узла K в результате одной нетривиальной сферической редукции.

3) **Лемма.** *Если существует сингулярный узел K, то в результате применения к нему нетривиальных сферических редукций, найдется сингулярный узел G, потомки которого регулярны.*

4) Пусть G — сингулярный узел с регулярными потомками. Следовательно, к нему можно применить две нетривиальные сферические редукции, дающие две такие различные пары регулярных узлов, что объединение примарных слагаемых первой пары (однозначно определенное из-за регулярности узлов) не совпадает с объединением примарных слагаемых второй пары. Каждая из этих редукций задается нетривиальной 2-сферой. Среди всех таких редукций (т.е. редукций, дающих две пары регулярных узлов с различными объединениями примарных слагаемых), выберем редукции по таким двум сферам S_1, S_2, что сферы трансверсальны, и число окружностей в их пересечении минимально (среди всех пар сфер, удовлетворяющих упомянутым условиям).

5) Возможны два случая: (а) S_1 и S_2 не пересекаются; (б) S_1 и S_2 пересекаются.

В первом случае получается противоречие между условием, что объединения примарных слагаемых должны быть различными, требованием регулярности потомков и совпадением результатов при редукциях по обеим сферам.

Во втором случае получается противоречие между условием минимальности пересечения сфер и тем фактом, что одну сферу можно заменить на другую так, чтобы окружностей пересечения стало меньше (при помощи "перестройки по самой внутренней окружности").

Список литературы

[1] С.В. Матвеев, “Корни и разложение трехмерных геометрических объектов”, *Успехи математических наук*, том 67, No. 3(405), 63–114 (2012).

[2] Schubert, H. *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten*. S.-B Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. 1949 (1949), 57–104.

[3] С.В. Матвеев, *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*, Московский государственный университет, (1991).

Южно-Уральский Государственный Университет, Челябинск, 454080, Россия
E-mail address: `alyona.kylakova@gmail.com`

УДК 512.816

АДДИТИВНОЕ ВЛОЖЕНИЕ ДВУМЕТРИЧЕСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ РАНГА (2,2) В ДВУМЕТРИЧЕСКУЮ ФИЗИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ РАНГА (3,2)

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ КЫРОВ

Пусть имеются два гладких многообразия M и N, причем $\dim M = 2$ и $\dim N = 2n$, $n = 1, 2$. Точки первого многообразия обозначаются латинскими буквами, а точки второго многообразия — греческими буквами. Рассматривается также достаточно гладкая функция, называемая *метрической*, $f : M \times N \to R^2$, сопоставляющая паре точек $\langle i\alpha \rangle$ из открытой и плотной области определения $S_f \subseteq M \times N$ пару чисел $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))$ [1]. В отношении метрической функции предполагается выполнения аксиомы невырожденности [1]:

Аксиома невырожденности при $n = 1$. Выполняются неравенства

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))}{\partial(x, y)} \neq 0, \ \frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0,$$

где (x, y) – локальные координаты точки i, а (ξ, η) – локальные координаты точки α.

Аксиома невырожденности при $n = 2$. Выполняются неравенства

$$\frac{\partial(f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))}{\partial(x, y)} \neq 0, \ \frac{\partial(f^1(k\alpha), f^2(k\alpha)), f^1(l\alpha), f^2(l\alpha))}{\partial(\xi, \eta, \mu, \nu)} \neq 0,$$

где (x, y) — локальные координаты точки i, а (ξ, η, μ, ν) — локальные координаты точки α.

Далее вводятся определения [1].

Определение 1. Пусть $n = 1$. Будем говорить, что метрическая функция $f : M \times N \to R^2$ на многообразиях M и N задает *двуметрическую физическую структура ранга (2,2)*, если кроме аксиомы невырожденности при $n = 1$, дополнительно выполняется аксиома феноменологической симметрии:

Аксиома феноменологической симметрии при $n = 1$. Существует плотное множество четверок $\langle ij, \alpha\beta \rangle$ из $M^2 \times N^2$, причем пары $\langle i\alpha \rangle$, $\langle j\alpha \rangle$, $\langle i\beta \rangle$, $\langle j\beta \rangle$ принадлежат S_f, что для каждой из них найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2) : R^8 \to R^2$, причем $\mathrm{rang}\Phi = 2$, для которой выполняются равенства:

$$\Phi^1(f(i\alpha), f(j\alpha), f(i\beta), f(j\beta)) = 0,$$

$$\Phi^2(f(i\alpha), f(j\alpha), f(i\beta), f(j\beta)) = 0.$$

Определение 2. Пусть $n = 2$. Будем говорить, что метрическая функция $f : M \times N \to R^2$ на многообразиях M и N задает *двуметрическую физическую структура ранга (3,2)*, если кроме аксиомы невырожденности при $n = 2$, дополнительно выполняется аксиома феноменологической симметрии:

Аксиома феноменологической симметрии при $n = 2$. Существует плотное множество четверок $\langle ijk, \alpha\beta \rangle$ из $M^3 \times N^2$, причем пары $\langle i\alpha \rangle$, $\langle j\alpha \rangle$, $\langle k\alpha \rangle$, $\langle i\beta \rangle$, $\langle j\beta \rangle$, $\langle k\beta \rangle$ принадлежат S_f, что для каждой из них найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2) : R^{12} \to R^2$, причем $\mathrm{rang}\Phi = 2$, для которой выполняются равенства:

$$\Phi^1(f(i\alpha), f(j\alpha), f(k\alpha), f(i\beta), f(j\beta), f(k\beta)) = 0,$$

$$\Phi^2(f(i\alpha), f(j\alpha), f(k\alpha), f(i\beta), f(j\beta), f(k\beta)) = 0.$$

Было доказано [1], что с точностью до изотопии существует только две двуметрические физические структуры ранга (2,2): аддитивная структура:

$$f^1 = x + \xi, \ f^2 = y + \eta,$$

неаддитивная структура:

$$f^1 = (x+\xi)y,\ f^2 = (x+\xi)\eta.$$

Также, с точностью до изотопии, доказано существование только четырех двуметрических физических структур ранга (3,2) [1]:

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi + \nu,\ \varepsilon = -1, 0, 1,$$
$$f^1 = x\xi + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi^c + \nu,\ c \neq 1,$$
$$f^1 = x\xi + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln \xi + \nu,$$
$$f^1 = x\xi + y\mu,\ f^2 = x\eta + y\nu.$$

Согласно гипотезе вложения метрическая функция двуметрической физической структуры ранга (3,2) представима в виде:

$$f^1 = f^1(g^1(x,y,\xi,\eta), g^2(x,y,\xi,\eta), \mu, \nu),\ f^2 = f^2(g^1(x,y,\xi,\eta), g^2(x,y,\xi,\eta), \mu, \nu),$$

где $g = (g^1, g^2)$ — компоненты для метрической функции двуметрической физической структуры ранга (2,2). Гипотеза о вложении дает возможность поиска метрической функции структуры ранга (3,2) по известным метрическим функциям структуры ранга (2,2).

Автором доказана

Теорема. *Метрическая функция любой двуметрической физической структуры ранга (3,2) получается как вложение аддитивной двуметрической физической структуры ранга (2,2).*

Для доказательство этой теоремы метрическую функцию двуметрической физической структуры ранга (3,2) записываем в виде:

$$f^1 = f^1(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu),\ f^2 = f^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu).$$

Затем выводятся специальные функциональные уравнения и решаются.

Список литературы

[1] Г.Г. Михайличенко, *Групповая симметрия физических структур*, Барнаул: БГПУ, (2003).

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, 649000, Россия
E-mail address: kfizika@gasu.ru

ДИНАМИКА СОЛНЕЧНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ИЗ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

НИКОЛАЙ ГРИГОРЬЕВИЧ МАКАРЕНКО

Считается, что предвестники сильных солнечных вспышек содержатся в паттернах магнитограмм, полученных с помощью космических обсерваторий. Это цифровые изображения, которые содержат значения радиальной компоненты плотности магнитного потока. Сложность полей изменяется во времени и может приводить к сценариям, сопровождающимися так называевыми -вспышками. В докладе обсуждаются способы выделения дескрипторов, для диагностики режимов вспышек. Дескрипторы основаны на морфологических функционалах, концепции эпсилон-связности и диаграммах персистентности для критических графов.

ГАО РАН, Санкт-Петербург, 196140, Россия
E-mail address: ng-makar@mail.ru

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДИСКРЕТНОСТИ ДЛЯ ГРУПП МАСКИТА

АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ МАСЛЕЙ

Пусть $f, g \in PSL(2,\mathbb{C})$ и $\langle f, g\rangle$ — группа, порожденная элементами f и g. *Параметрами* группы $\langle f, g\rangle$ называются три комплексных числа

$$\gamma = tr(fgf^{-1}g^{-1}) - 2, \quad \beta = tr^2(f) - 4, \quad \beta' = tr^2(g) - 4.$$

Обозначим $par(\langle f, g\rangle) = (\gamma, \beta, \beta')$. Если $\gamma \neq 0$, то упорядоченная тройка (γ, β, β') определяет группу $\langle f, g\rangle$ с точностью до сопряжения в $PSL(2,\mathbb{C})$. Группу $\langle f, g\rangle$ будем называть *группой Маскита*, если $\gamma = \beta \neq 0$.

Хорошо известно, что группа $PSL(2,\mathbb{C})$ действует на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ как группа всех дробно-линейных преобразований. Группы Маскита обладают следующим свойством. Элемент f имеет ровно две неподвижные точки $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ и $g(z_1) = z_2$. Насколько известно автору, до сих пор полностью не решен вопрос: при каких условиях на порождающие группа Маскита является дискретной? Имеет место следующее необходимое условие дискретности, полученное в работе [1].

Теорема 1. *Пусть $\langle f, g\rangle < PSL(2,\mathbb{C})$ — дискретная группа Маскита. Тогда либо $par(\langle f, g\rangle) = (\beta, \beta, -4)$; либо $par(\langle f, g\rangle) = (\beta, \beta, \beta')$, где $\beta \in \{-4, -3, -2, -1\}$.*

Для первого случая в той же работе был установлен критерий дискретности. Для второго случая из результатов работ [1, 2] следует

Теорема 2. *Пусть $\langle f, g\rangle < PSL(2,\mathbb{C})$ и $par(\langle f, g\rangle) = (\beta, \beta, \beta')$, где $\beta \in \{-4, -3, -2, -1\}$. Если $\beta' \in [-4; +\infty)$, то $\langle f, g\rangle$ — дискретная группа тогда и только тогда, когда*

$$\beta' \in \big\{ -4\sin^2(\pi/m) \bigm| m = 2, 3, ...\big\} \cup [0, +\infty).$$

В данном докладе речь пойдет о необходимых и достаточных условиях дискретности для групп $\langle f, g\rangle$ таких, что $par(\langle f, g\rangle) = (\beta, \beta, \beta')$, где $\beta \in \{-4, -3, -2, -1\}$ и $\beta' \in \mathbb{C} \setminus [-4; +\infty)$. В частности, будет представлена

Теорема 3. *Пусть $G = \langle f, g\rangle < PSL(2,\mathbb{C})$ и $par(\langle f, g\rangle) = (-4, -4, \beta')$.*

(1) *Если $\beta' \in (-\infty, -4)$, то G — дискретная группа тогда и только тогда, когда*
$$\beta' \in (-\infty, -8] \cup \big\{-4\big(1 + \cos^2(\pi/m)\big) \bigm| m = 3, 4, ...\big\}.$$
(2) *Если $\beta' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $0 < |\beta' + 4| < 1$, то G — недискретная группа.*

(3) *Если $\beta' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $|\beta' + 4| \geq 4$, то G — дискретная группа.*

(4) *Если $\beta' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $|\beta' + 4| < 4$ и $\beta' = p + q\omega$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, $\omega = i\sqrt{r}$ и $r \in \mathbb{N}$, то G — дискретная группа.*

(5) *Если $\beta' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $|\beta' + 4| < 4$ и $\beta' = p + q\omega$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{4r-1}}{2}$ и $r \in \mathbb{N}$, то G — дискретная группа.*

Список литературы

[1] B. Maskit, "Some special 2-generator Kleinian groups", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106, No. 12, 175–186 (1989).

[2] Е.Я. Клименко, "Об одном классе двупорожденных подгрупп $PSL(2, C)$", *Сиб. мат. журн.*, 30, No. 5, 74–76 (1989).

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: masley.alexander@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 12-01-33058 и 12-01-31006) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-921.2012.1).

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОТОБРАЖЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ

АНАСТАСИЯ ОЛЕГОВНА МОЛЧАНОВА

Известно, что для гиперупругих материалов задача нелинейной теории упругости сводится к задаче минимизации некоторого функционала. В работе [1] вводятся математические модели стационарных задач нелинейной теории упругости, суть которых состоит в том, что при некоторых "физически оправданных" условиях, таких, как поливыпуклость и условия роста подынтегральной функции, возможно гарантировать существование решения задачи минимизации функционала полной энергии на классе допустимых деформаций. Отдельный интерес представляет случай, когда искомая деформация является гомеоморфизмом ([2]).

В настоящей работе расширен класс допустимых отображений, сравнительно с классами, исследуемыми ранее. Ослаблены условия суммируемости допустимых деформаций $\psi \in W_n^1(\Omega)$ и условия роста подынтегральной функции. Отметим, что в рассматриваемой ситуации отсутствует вложение допустимых отображений в пространство непрерывных функций. Компенсацией за ослабление вышеперечисленных условий является требование на интегральную характеристику искажения. Важно, что при этом решение задачи минимизации функционала будет являться гомеоморфизмом.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $\mathbb{M}^n$ — множество $(n \times n)$-матриц.

Рассмотрим функционал энергии

$$I(\psi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\psi(x))\, dx,$$

где $W : \Omega \times \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии, которая обладает следующими свойствами:

(a) Поливыпуклость:

существует выпуклая функция $G(x,\cdot) : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F \geq 0$, выполнено равенство

$$G(x, F, \operatorname{Adj} F, \det F) = W(x, F)$$

почти всюду в Ω.

Причём, $G(x,\cdot)$ — непрерывна на $\mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+$ и $G(\cdot, F, H, \delta)$ — измерима на Ω.

(b) Коэрцитивность:

существуют постоянные $\alpha > 0$, $r > 1$ и функция $g \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$W(x, F) \geq \alpha(||F||^n + (\det F)^r) + g(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $F \in \mathbb{M}^n$ таких, что $\det F \geq 0$.

Пусть $\varphi_0 : \Omega \to \Omega'$, $\varphi_0 \in W_n^1(\Omega)$. Определим класс допустимых деформаций:

$$\mathcal{A} = \{\psi \in W_n^1(\Omega),\ J(x,\psi) \in L_r(\Omega),\ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|D\psi(x)|^n}{J(x,\psi)}\right)^s dx < M,\ s > n-1,$$
$$\psi|_\Gamma = \varphi_0|_\Gamma \text{ п. вс. на } \Gamma,\ J(x,\psi) \geq 0 \text{ п. вс. в } \Omega\}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке проектами: Интеграционный проект СО РАН—ДВО РАН, 2012-2014, №56; и Научные школы (НШ-921.2012.1).

Теорема. *Пусть выполнены условия* (a) *и* (b) *на функцию* $W(x,F)$, $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — *гомеоморфизм, множество* $\mathcal{A}$ *непусто и* $\inf\limits_{\psi\in\mathcal{A}} I(\psi) < \infty$. *Тогда существует по крайней мере одно отображение* $\varphi \in \mathcal{A}$ *такое, что*

$$I(\varphi) = \inf_{\psi\in\mathcal{A}} I(\psi).$$

Список литературы

[1] J. M. Ball. "Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity", *Arch. Ration. Mech. and Analys*, V. 63, 337–403, (1977).

[2] J. M. Ball. "Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 88A, 315–328, (1981).

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: `mol239@yandex.ru`

КЛАССИФИКАЦИЯ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОЙ БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ

ЛИЛИЯ РУСЛАНОВНА НАБЕЕВА

Пусть K^2 — бутылка Клейна и $K^2\tilde{\times}I$ — утолщенная бутылка Клейна, т. е. ориентируемое косое произведение бутылки Клейна K^2 на отрезок I.

Определение 1. *Под узлом в $K^2\tilde{\times}I$ будем понимать непересекающуюся простую замкнутую кривую K в $\mathrm{Int}(K^2\tilde{\times}I)$. Два узла $K_0, K_1 \subset \mathrm{Int}(K^2\tilde{\times}I)$ эквивалентны, если пара $(K^2\tilde{\times}I, K_0)$ гомеоморфна паре $(K^2\tilde{\times}I, K_1)$.*

Рассмотрим квадрат P с вершинами A, B, C, D. В нем отождествим точки сторон AB и CD, и точки сторон BC и DA симметрично относительно центра квадрата. Хорошо известно, что такое отождествление противоположных сторон в квадрата P представляет собой бутылку Клейна K^2.

Определение 2. *Проекцией узла в K^2 называется граф в квадрате P, причем:*

(1) *Валентность любой вершины равна 1 или 4. Вершины валентности 4 лежат внутри P, а вершины валентности 1 лежат внутри сторон P.*
(2) *Вершины валентностью 1 отождествляются с вершинами валентностью 1 по указанному выше отображению сторон в квадрата.*
(3) *Если, начиная с некоторой точки графа, будем двигаться по его ребрам, проходя вершины валентности 4 по правилу: прямо вперед и проходя вершины валентностью 1 по указанному отождествлению сторон, то получим полный обход графа.*

Диаграмма узла в K^2 получается из проекции указанием разрывов в точках самопересечения, то есть вершинах валентности 4. Как и в классическом случае [1] два узла эквивалентны, тогда и только, когда их диаграммы можно соединить гомеоморфизмом и последовательностью движений Райдемайстера.

Определение 3. *Диаграмма узла K называется минимальной, если ее сложность (число перекрестков) не превосходит сложности любой диаграммы любого узла, эквивалентного узлу K. Проекция называется минимальной, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.*

Будем называть узел $K \subset K^2\tilde{\times}I$ локальным, если он содержится в не котором шаре $V \subset K^2\tilde{\times}I$, и составным, если существует такой шар $V \subset K^2\tilde{\times}I$, что пересечения $K \cap V$ и $K \cap V'$, где $V' = (K^2\tilde{\times}I) \setminus \mathrm{Int}V$, являются нетривиальными дугами. Такие узлы мы не будем включать в классификацию узлов в утолщенной бутылке Клейна. Узел назыветcя примарным, если он отличен от локального и составного.

Теорема. *В утолщенной бутылке Клейна существует 102 примарных узла, минимальные диаграммы которых имеют не более трех перекрестков, из них 3 узла сложности 0, 4 узла сложности 1, 15 узлов сложности 2, 80 узлов сложности 3.*

Для доказательства различности узлов в утолщенном бутылке Клейна используется модифицированный полином Кауффмана.

Рассмотрим узел K. Каждый перекресток делит плоскость на два дополнительных угла, один из которых мы назовем углом типа A, а другой угол — типа B. Угол типа A — это тот угол, который мы видим сначала справа, когда проходим перекресток по верхней ветви; угол типа B — это тот угол, который мы сначала видим справа, когда проходим перекресток по нижней ветви. Состоянием S называют выбор в каждой двойной точке диаграммы расщепления типа A или типа B. Если в каждой двойной точке применить

Исследования поддержаны грантом РФФИ № 12-01-00748, грантом НШ-1414.2012.1 по государственной поддержке ведущих научных школ и программы ОМН РАН (проект 12-T-1-1003/2).

одно из двух возможных преобразований расщепления A или B, то получем набор попарно непересекающихся замкнутых кривых [1].

Определение 4. *Для ориентированной диаграммы D узла в $K^2\tilde{\times}I$ определим модифицированный полином Кауффмана $\langle M\rangle$ от четырех переменных A, d, i, f по формуле:*

$$\langle M(D)\rangle = (-A^3)^{-\omega(D)}\sum_S A^{\alpha(S)-\beta(S)}(-A^{-2}-A^2)^{\gamma(S)}d^{\mu(S)}i^{\nu(S)}f^{\lambda(S)},$$

где, $\alpha(S)$ и $\beta(S)$ — количество расщеплений типа A и B в состоянии S; $\gamma(S)$, $\mu(S)$, $\nu(S)$, $\lambda(S)$ — соответственно число простых замкнутых в бутылке Клейна в состоянии S, и $\omega(D)$ — число скрученности диаграммы узла.

Список литературы

[1] А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, М.: МЦНМО, (1997).

Челябинский государственный университет, Челябинск, 454021, Россия
E-mail address: liya.nabeyeva@yandex.ru

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЫ О БИАЛГЕБРАХ

МИХАИЛ АЛЕКСЕЕВИЧ ОВЧИННИКОВ

Биалгебра — это линейное пространство A, снабженное чеырьмя операциями, связанными естественными соотношениями. Операции называют умножение, коумножение, единица и коединица. Обозначают, соответственно, $\bigtriangledown$, $\bigtriangleup$, η, ε.

$$\bigtriangledown : A \otimes A \to A, \bigtriangleup : A \to A \otimes A, \eta : R \to A, \varepsilon : A \to R$$

Среди соотношений особенно важным является следующее:

$$\bigtriangledown \circ \bigtriangleup = (\bigtriangleup \otimes \bigtriangleup) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\bigtriangledown \otimes \bigtriangledown),$$

где τ — перестановка сомножителей в произведении $A \otimes A$, и суперпозиции выполняются слева направо.

Пусть композиция умножений, коумножений и перестановок τ, а также их тензорных произведений с тождественными отображениями осуществляет отображение $A \to A$. Схема умножений и коумножений, составляющих это отображение, представляет собой ориентированный граф G, у которого две вершины валентности 1 и остальные — валентности 3. Каждая вершина валентности 3 соответствует умножению или коумножению. Рассматривается следующий способ построения трехмерного многообразия по графу G. Поместим граф G в наше трехмерное пространство XYZ так, чтобы все ориентированные ребра взамно однозначно и положительно проектировались на ось X, окрестность каждой вершины, соответствующей коумножению, оказалась горизонтальной, а умножению — вертикальной. Утолщаем окрестности вершин вначале до поверхностей в виде "толстых букв Y", а затем — прямым произведением на отрезок — до трехмерных шаров с тремя квадратами, соединенными 6 дугами. Продолжим утолщение вдоль ребер графа так, чтобы сечения утолщенного графа плоскостями $x = c$ состояли из квадратов со сторонами, параллельными осям Y и Z. Получается полный крендель, на поверхности которого выделены два квадрата, вершины которых соединены дугами, и набор замкнутых кривых. Вдоль замкнутых кривых приклеиваются ручки индекса 2. Получается некоторое трехмерное многообразие с узором, состоящим из двух квадратов и четырех соединяющих дуг.

Схемы, эквивалентные в силу соотношений в биалгебре, дают гомеоморфные пары вида (многообразие, узор). Вопрос: могут ли неэквивалентные схемы привести к одной и той же паре?

В работе доказывается следующая теорема.

Теорема. *Две операции эквивалентны тогда и только тогда, когда отвечающие им многообразия с узорами гомеоморфны (как пары).*

Тем самым дается положительное решение гипотезы Концевича, формулировка которой повторена в формулировке теоремы.

Список литературы

[1] С. В. Матвеев, В. В. Таркаев, "Биалгебры и трехмерные многообразия", Тезисы докладов на Конференции «Дни геометрии в Новосибирске, 2012»

Челябинский государственный университет, Челябинск, 454021, Россия
E-mail address: ovch@csu.ru

Исследование было поддержано грантами РФФИ-11-01-00605, НШ-1414.2012.1. Автор благодарен профессору С. Матвееву за постановку проблемы.

О ПОДКЛАССАХ НАПРАВЛЕННЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

ЕЛЕНА СЕРГЕЕВНА ОШЕВСКАЯ

Направленная алгебраическая топология [2,10], выделившаяся из алгебраической топологии в 1990-х годах, изучает направленные топологические пространства, т.е. топологические пространства, обладающие покрытием из карт с частичными порядками (направлением), согласованными на пересечениях карт, и непрерывные отображения между направленными топологическими пространствами, сохраняющие частичные порядки.

В середине первого десятилетия текущего столетия появились работы Грандиса [9,10], Фейструп и др. [2,3,4], Окура и Губо [8], Рауссена [12], Бубеника [1], развивающие теорию направленной топологии для изучения параллельных процессов, где направление ассоциируется с ходом времени. С другой стороны, в работах Пратта [11] и фон Глаббика [6] было показано, что такие объекты комбинаторной топологии, как полукубические множества, благодаря своей структуре адекватно моделируют параллельные процессы. Известно, что геометрическая реализация полукубических множеств является топологическим пространством. В работе [5] авторы нашли класс полукубических множеств, геометрическая реализация которых является направленным топологическим пространством. В своей диссертации [7] Губо предложил еще одну геометрическую модель параллелизма — полукубические пространства, частный случай которых — геометрические реализации всевозможных полукубических множеств. Полукубические пространства не только являются топологическими пространствами, но также обладают дифференциальной структурой, т.е., кроме всего прочего, позволяют определять временну́ю длительность параллельного процесса. В данной работе найден класс полукубических множеств/пространств, являющихся направленными топологическими пространствами. Кроме того, доказано, что стандартные отображения между полукубическими множествами/пространствами есть направленные отображения.

Рассмотрим произвольное топологическое пространство X. Семейство $\mathbf{U}$ пар $(U, \leq_U)$ частично упорядоченных открытых подмножеств, покрывающих X, называется *атласом порядка* на X, если для любого $x \in \mathsf{X}$ существует не пустая открытая окрестность $W(x) \subseteq \mathsf{X}$ такая, что для любых $(U_1, \leq_{U_1}), (U_2, \leq_{U_2}) \in \mathbf{U}$ и любых $y, z \in W(x) \cap U_1 \cap U_2$ выполнено соотношение: $y \leq_{U_1} z \;\Leftrightarrow\; y \leq_{U_2} z$. Открытая окрестность $W(x) \subseteq \mathsf{X}$ точки $x \in \mathsf{X}$, определенная выше, вместе с частичным порядком $\leq_{W(x)}$, индуцированным атласом порядка $\mathbf{U}$ на X, называется *окрестностью порядка* точки x. Два атласа порядка на X *эквивалентны*, если их объединение является атласом порядка. Топологическое пространство X вместе с классом эквивалентности атласов порядка называется *направленным* топологическим пространством.

Рассмотрим произвольные направленные топологические пространства X и Y с классами эквивалентности атласов порядка $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ соответственно. Непрерывное отображение $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ называется *направленным отображением*, если для всех представителей $\mathbf{V} = \{(V_j, \leq_{V_j})\}_{j \in J} \in \mathbb{V}$ существует представитель $\mathbf{U} = \{(U_i, \leq_{U_i})\}_{i \in I} \in \mathbb{U}$ такой, что для любого $x \in \mathsf{X}$ найдутся окрестности порядка $(W(x), \leq_{W(x)})$ и $(W(f(x)), \leq_{W(f(x))})$, в которых верны соотношения: $y \leq_{W(x)} z \;\Rightarrow\; f(y) \leq_{W(f(x))} f(z)$ для всех $y, z \in W(x) \cap f^{-1}(W(f(x)))$.

Направленные топологические пространства вместе с направленными отображениями образуют категорию $\mathrm{d}\mathbb{T}\mathrm{op}$.

Данная работа частично поддержена РФФИ (грант 12-01-00873-а), президентской программой "Ведущие Научные Школы" (грант НШ-544.2012.1), а также ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" за 2009-2013 гг (соглашение 8206).

Полукубическое множество M — это семейство попарно непересекающихся множеств $(M_n)_{n\geq 0}$ кубов и граничных отображений $d^\alpha_\lambda : M_{n+1} \to M_n$ ($1 \leq \lambda, \mu \leq (n+1)$ и $\alpha \in \{0,1\}$), удовлетворяющих кубическим законам: $d^\alpha_\lambda \circ d^\beta_\mu = d^\beta_{\mu-1} \circ d^\alpha_\lambda$ для всех $1 \leq \lambda < \mu \leq (n+2)$ и $\alpha, \beta \in \{0,1\}$. Полукубическое множество называется *самонепересекающимся*, если все грани любого его куба различны.

Пусть M и M' — полукубические множества. Отображение $f = \{f_n : M_n \to M'_n\}_{n\geq 0}$ называется *морфизмом* из M в M', если $f_n \circ d^\alpha_\lambda = d^\alpha_\lambda \circ f_{n+1}$.

Полукубические множества вместе с морфизмами между ними формируют категорию p$\mathbb{S}$et. Пусть np$\mathbb{S}$et обозначает полную подкатегорию категории p$\mathbb{S}$et, состоящую из самонепересекающихся полукубических множеств.

Теорема 1. *Категория* np$\mathbb{S}$et *вкладывается в категорию* d$\mathbb{T}$op.

Полукубическое пространство — это компактно порожденное Хаусдорфово пространство X вместе с его представлением кубами, т.е. $X = \coprod_{x\in X_n,\ n\geq 0} x(\overset{\circ}{I}{}^n)$, где X_n состоит из непрерывных отображений $x : I^n \to X$, индуцирующих гомоморфизмы $\overset{\circ}{I}{}^n \cong x(\overset{\circ}{I}{}^n)$ и таких, что $x \circ \delta^\alpha_\lambda \in X_{n-1}$ для всех $\alpha = 0, 1$, $1 \leq \lambda \leq n$ и $n > 0$, а также с семейством норм $\| \cdot \|_u$ на каждом касательном пространстве $T_uX =_{def} T_u x(\overset{\circ}{I}{}^n)$ $(u \in x(\overset{\circ}{I}{}^n))$ таким, что $F(u, \dot{u}) = \| \dot{u} \|_u$ — непрерывное отображение. Здесь кограничные отображения $\delta^\alpha_\lambda : I^{n-1} \to I^n$ определяются как $\delta^\alpha_\lambda(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (t_1, \ldots, t_{\lambda-1}, \alpha, t_\lambda, \ldots, t_{n-1})$.

Пусть X и Y — полукубические пространства. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *морфизмом* из X в Y, если для любого отображения $x \in X_n$ $(n \geq 0)$ найдется отображение $y \in Y_n$ такое, что $f \circ x = y$ и кроме того, дифференциал df является нерастягивающим отображением: $\|d_u f(\dot{u})\|_{f(u)} \leq \|\dot{u}\|_u$ для всех $\dot{u} \in T_uX$ и $u \in X$.

Полукубические пространства и морфизмы между ними образуют категорию p$\mathbb{S}$pace. Пусть np$\mathbb{S}$pace обозначает полную подкатегорию категории p$\mathbb{S}$pace, состоящую из самонепересекающихся полукубических пространств, имеющих топологию CW-комплекса.

Теорема 2. *Категория* np$\mathbb{S}$pace *вкладывается в категорию* d$\mathbb{T}$op.

Список литературы

[1] P. Bubenik, "Models and Van Kampen theorems for directed homotopy theory", *Homology, Homotopy and Applications*, 11, No. 1, 185–202 (2009).
[2] L. Fajstrup, "Dicovering spaces", *Homology, Homotopy, and Applications*, 5, No. 2, 1–17 (2003).
[3] L. Fajstrup, "Dipaths and dihomotopies in a cubical complex", *Advances in Applied Mathematics*, 35, 188–206 (2005).
[4] L. Fajstrup, E. Goubault, M. Raussen, E. Haucourt, "Components of the Fundamental Category", *Applied Categorical Structures*, 12, 81–108 (2004).
[5] L. Fajstrup, M. Raussen, E. Goubault, "Algebraic topology and concurrency", *Theoretical Computer Science*, 357, No. 1-3, 241–278 (2006).
[6] R. van Glabbeek, "Bisimulation semantics for higher dimensional automata", http://theory.stanford.edu/ rvg/hda (1991).
[7] E. Goubault, *The Geometry of Concurrency*, Ecole Normale Superieure (1995).
[8] E. Goubault, E. Haucourt, "Components of the Fundamental Category II", *Applied Categorical Structures*, 15, 387–414 (2007).
[9] M. Grandis, "Directed combinatorial homology and noncommutative tori (The breaking of symmetries in algebraic topology)", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 138, 233–262 (2005).
[10] M. Grandis, *Directed algebraic topology*, Cambridge University Press (2009).
[11] V.R. Pratt, "Modeling concurrency with geometry", *Proc. 18th Annual ACM Symposium on PPL*, 311-322 (1991).
[12] M. Raussen, "Invariants of directed spaces", *Applied Categorical Structures*, 15, 355–386 (2007).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: oshevskaya@gmail.com

COMPLEX GEOMETRY AND TORIC TOPOLOGY

TARAS EVGENIEVICH PANOV

Moment-angle complexes are spaces acted on by a torus and parametrised by finite simplicial complexes. They are central objects in toric topology, and currently are gaining much interest in homotopy theory. Due to their combinatorial origins, moment-angle complexes also find applications in combinatorial geometry and commutative algebra.

After an introductory part describing the general properties of moment-angle manifolds and complexes we shall concentrate on the complex-analytic aspects of the theory.

Moment-angle manifolds provide a wide class of examples of non-Kähler compact complex manifolds. A complex moment-angle manifold $\mathcal{Z}$ is constructed via a certain combinatorial data, called a complete simplicial fan.

In the case of rational fans, the manifold $\mathcal{Z}$ is the total space of a holomorphic bundle over a toric variety with fibres compact complex tori. By studying the Borel spectral sequence of this holomorphic bundle, we calculate the Dolbeault cohomology and Hodge numbers of $\mathcal{Z}$.

In general, a complex moment-angle manifold $\mathcal{Z}$ is equipped with a canonical holomorphic foliation $\mathcal{F}$ and an algebraic torus action transitive in the transverse direction. Examples of moment-angle manifolds include the Hopf manifolds, Calabi–Eckmann manifolds, and their deformations.

We construct transversely Kähler metrics on moment-angle manifolds, under some restriction on the combinatorial data. We prove that all Kähler submanifolds in such a moment-angle manifold lie in a compact complex torus contained in a fiber of the foliation $\mathcal{F}$. For a generic moment-angle manifold in its combinatorial class, we prove that all its subvarieties are moment-angle manifolds of smaller dimension. This implies, in particular, that its algebraic dimension is zero.

This is joint work with Yuri Ustinovsky and Misha Verbitsky.

References

[1] T. Panov, Y. Ustinovsky, “Complex-analytic structures on moment-angle manifolds”, 12, No. 1, 149–172 (2012).

[2] T. Panov, Y. Ustinovsky, M. Verbitsky “Submanifolds and analytic subsets in complex moment-angle manifolds”, preprint (2013).

Department of Mathematics and Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

E-mail address: tpanov@mech.math.msu.su

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grants 11-01-00694, 12-01-00873, 12-01-92104-JF and 13-01-91151-GFEN, a grant from Dmitri Zimin’s ‘Dynasty’ foundation, grants NSh-4995-2012.1 and MD-111.2013.1 from the President of Russia, and grant 11.G34.31.0053 from the Government of Russia.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА И РАССЛОЕНИЕ ГАННИНГА

ТАТЬЯНА АЛЕКСЕЕВНА ПУШКАРЕВА

Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов играют большую роль в теории функций на компактных римановых поверхностях. В работе исследовано гармоническое расслоение Прима, слои которого есть пространства гармонических дифференциалов Прима на переменных компактных римановых поверхностях.

Пусть F_μ — переменная компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, комплексно-аналитическая структура задана дифференциалом Бельтрами $\mu(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$ на $F = F_0$. Обозначим через Γ_μ квазифуксову группу, униформизирующую F_μ в $w^\mu(U)$, где w^μ — решение уравнения Бельтрами на $U = \{|z| < 1\}$. Характер ρ для F_μ — это любой гомоморфизм $\rho: \ \pi_1(F_\mu) \cong \Gamma_\mu \to \mathbf{C}^*$. Дифференциалом Прима ϕ для ρ на F_μ назовем дифференциал $\phi = \phi(z)dz$ такой, что $\phi(Tz)T'(z) = \rho(T)\phi(z),\ z \in w^\mu(U),\ T \in \Gamma_\mu$. Обозначим через $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ пространство голоморфных дифференциалов Прима для несущественного характера $\rho \in L_g$, а $< df_0 >$ — одномерное подпространство, порожденное df_0, где f_0 — единица для ρ на F_μ [1].

Теорема 1. *Векторное расслоение* $\mathbf{P}_{1,0} = \bigcup\limits_{[\mu]\in\mathbf{T}_g,\rho\in L_g\backslash 1} \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))/ < df_0 >$ *является голоморфным векторным расслоением ранга* $g-1$ *над* $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash 1)$ *для любого* $g \geq 2$.

Отображение периодов $p : \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))/ < df_0 > \to H^1(\Gamma_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma_\mu, \rho)/B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ такое, что $\phi(z)dz \to [\phi] = \phi + B^1(\Gamma_\mu, \rho)$, будет $\mathbf{C}$-линейным послойным отображением из $\mathbf{P}_{1,0}$ в когомологическое расслоение Ганнинга G над $\mathbf{T}_g \times (L_g\backslash 1)$. Поэтому отображение периодов $p : \mathbf{P}_{1,0} \to G$ будет линейным отображением голоморфных векторных расслоений над $\mathbf{T}_g \times (L_g\backslash 1)$ [1].

Теорема 2. *Последовательность голоморфных векторных расслоений и отображений*

$$0 \to \mathbf{P}_{1,0} \xrightarrow{p} G \xrightarrow{h} G/\mathbf{P}_{1,0} \to 0$$

над $\mathbf{T}_g(F) \times (L_g\backslash 1)$ *является точной для любого* $g \geq 2$.

Доказано, что когомологическое расслоение Ганнинга G, связанное с классами периодов, будет вещественно-аналитически изоморфно гармоническому расслоению Прима $\mathbf{P}_{1,0} \bigoplus \mathbf{P}_{0,1}$ над произведением пространства Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F)$ и пространства нетривиальных нормированных характеров.

Список литературы

[1] R.C. Gunning, *On the period classes of Prym differential*, J. Reine Angew. Math., No. 319, 153–171 (1980).

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, 649000, Россия
E-mail address: pushkareva.tanya@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-90800-мол-рф-нр).

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ РАССЛОЕННЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

РОМАН ВАЛЕНТИНОВИЧ РАЗУМОВСКИЙ

В докладе будут представлены два бесконечных класса зацеплений и доказана их расслоенность. Для комбинаторного описания используются прямоугольные диаграммы. Дополнения узлов из первого класса допускают свободное действие $\mathbb{Z}_n$. Второй класс обобщает лоренцевы зацепления и характеризуется тем, что каждая вторая вершина диаграммы любого представителя семейства лежит на координатной диагонали прямоугольной диаграммы. Указанные классы расширяют торические зацепления в двух направлениях.

В первом случае для доказательства будут использованы результаты из теории гомологий Хегора-Флоера. Во втором случае явно строится поверхность Зейферта, являющаяся слоем расслоения.

Список литературы

[1] Joan Birman, R.F. Williams. "Knotted periodic orbits in dynamical systems. I. Lorenz's equations". *Topology*, 22(1983), no.1, 47–82.

[2] Joan Birman, Ilya Kofman. "A new twist on Lorenz links". *Journal of Topology*, 2(2009), 227-248.

[3] Norbert A'Campo. "Planar trees, slalom curves and hyperbolic knots". *Publications Mathematiques de l'IHES*, 88 (1999), 171-180.

[4] Ivan Dynnikov. "Arc-presentations of links. Monotonic simplification". *Fund. Math.*, 190 (2006), 29–76.

[5] Peter Ozsvath and Zoltan Szabo. "Holomorphic disks and knot invariants". *Adv. Math.*, 186(1):58–116, 2004

[6] Peter Ozsvath and Zoltan Szabo. "Holomorphic disks and genus bounds". *Geometry and Topology*, 8(2004), 311–334.

[7] Y. Ni. "Knot Floer homology detects fibered knots". *Inventiones Mathematicae*, 177(2009), no. 1, 235-238.

[8] Ciprian Manolescu, Peter Ozsvath, Sucharit Sarkar. "A combinatorial description of knot Floer homology". *Annals of Mathematics*, 169 (2009), 633-660.

[9] Roman Razumovsky. "Grid Diagrams of Lorenz links". *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 19(2010), 843-847.

[10] John Stallings. "On fibering certain 3-manifolds". *Topology of 3-manifolds*, 95-109. Prentice-Hall. New Jersey (1962).

[11] William Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology.* Princeton University Press, 1997.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, город Москва, 119991, Россия

E-mail address: razumovskymail@mail.ru

КОНФОРМНЫЕ И ОДНОРАНГОВЫЕ ДЕФОРМАЦИИ КОНФОРМНО ПЛОСКИХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК

ЕВГЕНИЙ ДМИТРИЕВИЧ РОДИОНОВ, ВИКТОР ВЛАДИМИРОВИЧ СЛАВСКИЙ,
ОЛЕСЯ ПАВЛОВНА ХРОМОВА

В работах [1]-[3] изучались вариации римановых метрик в случае компактных многообразий. В данной работе исследуются конформные и одноранговые деформации римановых метрик. В случае одноранговых деформаций получены формулы для деформированных тензоров: римановой кривизны, кривизны Риччи, одномерной кривизны, Вейля. Исследован вопрос о деформации ранга 1 конформно плоских римановых метрик. Кроме того, получены формулы для изменения спектра оператора римановой кривизны при конформных деформациях конформно плоских римановых метрик.

Список литературы

[1] А.Бессе. *Многообразия Эйнштейна*, Мир, (1990).
[2] А.Бессе. *Четырехмерная риманова геометрия*, Мир, (1985).
[3] Strake M., "Variationen von Metriken nichtnegativer Schnittkrummung *Math. Inst.Univ. Muenster*, 2, Ser. 41., 133 (1986).

Алтайский государственный университет, Барнаул, 656049, Россия, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, 628012, Россия
E-mail address: edr2002@mail.ru, slavsky2004@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457) , гранта ФЦПК (соглашение №8206, заявка №2012-1.1-12-000-1003-014) , а так же программы стратегического развития ФГБОУ ВПО АлтГУ на 2012-2016 годы (мероприятие «Конкурс грантов» №2012.312.2.3).

ЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

ЕВГЕНИЙ ДМИТРИЕВИЧ РОДИОНОВ, МАРИЯ ВИКТОРОВНА КУРКИНА,
ВИКТОР ВЛАДИМИРОВИЧ СЛАВСКИЙ

В модели Ф. Клейна пространству Лобачевского соответствует внутренность шара, выпуклые подмножества совпадают с обычными выпуклыми подмножествами единичного шара, тем не менее выпуклая геометрия пространства Лобачевского в аналитическом плане более содержательна. В частности, произвольному компактному выпуклому подмножеству Q можно естественным образом сопоставить конформно-плоскую метрику $ds^2 = \frac{dx^2}{h_Q^2(x)}$, $x \in R^{n-1}$ ограниченной одномерной секционной кривизны, определенную на $\overline{R^{n-1}}$ [1]:

$$-\frac{\kappa}{2} \leq h_Q \frac{d^2 h_Q}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla h_Q|^2 \leq \frac{\kappa}{2}, \tag{1}$$

где f — положительная функция класса C^1, ∇f — градиент функции f, удовлетворяющий условию Липшица, $\frac{d^2 f}{d\xi^2}$ — вторая производная функции f в смысле Ф. Кларка [2] вдоль единичного вектора $\xi \in R^{n-1}$, κ — кривизна пространства Лобачевского. В данной работе такие метрики называются опорными функциями выпуклого множества Q. В случае конечного выпуклого многогранника пространства Лобачевского справедлива формула

$$h_Q(x) = \min_i \{h_{\triangle_i}(x)\} \tag{2}$$

где $h_{\triangle_i}(x)$ — опорные функции $(n-1)$-мерных граней границы Q. Вычисление функций $h_{\triangle_i}(x)$ происходит рекуррентно и сводится к случаю, когда $\triangle_i$ — k-мерные симплексы $(k < n)$. Такие функции будем называть элементарными конформными сплайнами [3].

В отличии от обычных сплайн-функций, представление (2) функции $h_Q(x)$ конформно-плоскими сплайн-функциями имеет другую природу, здесь не требуется указывать область определения $h_{\triangle_i}(x)$. Функция $h_Q(x)$ имеет гладкость $C^{1,1}$, и любую функцию класса $f \in C^1$ можно сколь угодно точно приблизить функцией $h_Q(x)$ вида (2) в норме пространства C^1 на компактном подмножестве (при достаточно большом κ).

Явная формула (2) для функции $h_Q(x)$ позволяет упростить вычисление и сделать его более эффективным: не нужно разбивать область определения функции, и можно использовать параллельные алгоритмы для вычисления элементарных сплайнов $h_{\triangle_i}(x)$. В работе с помощью пакета Mathematica исследуются свойства $h_{\triangle_i}(x)$

Список литературы

[1] В. Балащенко, Ю. Никоноров, Е. Родионов, В. Славский, *Однородные пространства: теория и приложения*, Ханты-Мансийск: Полиграфист, (2008).

[2] Ф. Кларк. *Оптимизация и негладкий анализ*, М.: Наука, (1988).

[3] М. Куркина, Е. Родионов, В. Славский, “Численные методы интерполяции для решения некоторых задач выпуклой геометрии в пространстве Лобачевского”, *Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика*, (в печати).

Алтайский государственный университет, Барнаул, 656010, Россия; Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, 628012, Россия

E-mail address: edr2002@mail.ru; slavsky2004@mail.ru

Работа выполнена при поддержке совета по грантам при Президенте РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ России (грант № 12-12-22000-а(р)), ФЦПК «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы, тема: «Фундаментальные проблемы анализа и геометрии» (Соглашение № 8206, номер заявки «2012-1.1-12-000-1003-014»), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 г.г. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ОРИЦИКЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

ЛЮДМИЛА НИКОЛАЕВНА РОМАКИНА

На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны (см., например, [1]) существуют 15 типов невырожденных линий второго порядка, содержащих вещественные точки, такие линии называем *овальными* [2]. *Циклами* назовем овальные линии, являющиеся траекториями движения точек плоскости $\widehat{H}$. К циклам относятся линии четырех типов: орициклы, гиперциклы, эллиптические и гиперболические циклы [3]. В решении ряда задач оказываются удобными (см., например, [4]) ортогональные криволинейные системы координат рассматриваемой плоскости, координатными линиями в которых являются циклы. В докладе предполагаем рассказать о свойствах орициклов плоскости $\widehat{H}$ и построить одну из ортогональных орициклических систем координат, координатными линиями в которой являются концентрические орициклы и гиперболические прямые плоскости $\widehat{H}$, являющиеся осями указанных орициклов.

Орициклом плоскости $\widehat{H}$ назовем овальную линию, касающуюся абсолюта в четырех слившихся точках. Общую точку орицикла и абсолюта назовем *центром* орицикла, общую касательную орицикла и абсолюта — *базой* орицикла. Прямую, проходящую через центр орицикла и отличную от его базы, назовем *осью* орицикла.

Характеризовать орицикл плоскости $\widehat{H}$ метрически можно по аналогии с орициклом плоскости Лобачевского.

Теорема 1. *Пусть A — собственная точка плоскости $\widehat{H}$, K — точка абсолюта. Орицикл с несобственной точкой K, проходящий через точку A, является множеством всех точек M плоскости $\widehat{H}$, для которых $\angle AMK \cong \angle MAK$.*

Теорема 2. *Орицикл плоскости $\widehat{H}$ симметричен относительно каждой своей оси.*

Теорема 3. *В каждой собственной точке орицикла плоскости $\widehat{H}$ существует эллиптическая касательная, ортогональная оси орицикла, проведенной через данную точку.*

Теорема 4. *Касательная к орициклу плоскости $\widehat{H}$ в каждой его точке разделена точкой касания и базой орицикла пополам.*

Теорема 5. *Ось орицикла, проходящая через его точку M, является полярой относительно абсолюта общей точки базы орицикла и касательной к нему в точке M.*

Теорема 6. *Любые две оси орицикла плоскости $\widehat{H}$ высекают на орицикле и на абсолюте хорды, принадлежащие пересекающимся на базе данного орицикла прямым.*

Теорема 7. *Пусть N — общая точка базы орицикла ω и касательной к ω в его точке M, а L_1, L_2 — точки пересечения орицикла ω параболической прямой, проходящей через точку N и отличной от базы орицикла. Тогда внутренние относительно ω хорды ML_1, ML_2 равны трети эллиптической прямой, т.е. $|ML_1| = |ML_2| = \pi\rho/3$, где ρ — радиус кривизны плоскости $\widehat{H}$.*

При введении ортогональных орициклических координат используем канонический репер R второго типа, уравнение абсолюта плоскости $\widehat{H}$ в котором имеет вид

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0.$$

Пусть в репере R точка M задана проективными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$. Собственными координатами точки M на плоскости $\widehat{H}$ в репере R назовем определенную с точностью до знака упорядоченную тройку чисел:

$$\bar{x}_1 = \pm\frac{\rho x_1}{\sqrt{x_3^2 - x_1x_2}}, \quad \bar{x}_2 = \pm\frac{\rho x_2}{\sqrt{x_3^2 - x_1x_2}}, \quad \bar{x}_3 = \pm\frac{\rho x_3}{\sqrt{x_3^2 - x_1x_2}}.$$

Собственные координаты $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3)$ точки плоскости $\widehat{H}$ удовлетворяют равенству

$$\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1\bar{x}_2 = \rho^2.$$

Пучок Ω орициклов с центром в точке $A_1\,(1:0:0)$ в репере R можно задать уравнением

$$qx_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad q > 0.$$

Каждый орицикл пучка Ω определен однозначно заданием числа q. Орицикл с параметром $q = 1$ назовем *нулевым* ориклом пучка Ω и обозначим ω_0. Базу орициклов пучка Ω, в репере R прямую A_1A_3, обозначим k.

Выделим некоторую ось l орициклов заданного пучка. Поместим на нее вторую координатную вершину A_2. Точку пересечения оси l с орициклом ω_0 обозначим O. Точку пересечения с абсолютом параболической прямой, проведенной через точку O, обозначим E. Каждой точке M плоскости $\widehat{H}$, $M \notin k$, поставим в соответствие пару чисел $(u; v)$ следующим образом.

Пусть ω_M — орицикл пучка Ω, содержащий точку M, $\omega_M \cap l = M_2$. Обозначим:

$$u = ((A_1M)(A_1E)lk),$$

$$v = \tfrac{|OM_2|}{\rho}, \text{ если } M_2 \text{ не принадлежит лучу } OA_1,$$

$$v = -\tfrac{|OM_2|}{\rho}, \text{ если } M_2 \text{ принадлежит лучу } OA_1.$$

Пару чисел $(u; v)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, назовем *ортогональными орициклическими координатами* точки M в системе координат $\{\omega_0, l, E\}$.

Зависимость между собственными координатами $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3)$ точки M плоскости $\widehat{H}$ в репере $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ и ее ортогональными орициклическими координатами $(u; v)$ устанавливают формулы:

$$\bar{x}_1 = \rho\left(u^2e^v - e^{-v}\right), \quad \bar{x}_2 = \rho e^v, \quad \bar{x}_3 = \rho u e^v. \tag{1}$$

Площадь S области D плоскости $\widehat{H}$, соответствующая изменению параметров u, v в параметризации (1), имеет вид

$$S = \rho^2 \int\int_D e^v du\, dv.$$

Применяя систему координат $\{\omega_0, l, E\}$, находим площади различных фигур плоскости $\widehat{H}$ и исследуем линию σ четвертого порядка, заданную уравнением $u = e^v$. Линия σ разбивает каждый координатный криволинейный прямоугольник, две противоположные вершины которого принадлежат σ, на две равновеликие фигуры.

Список литературы

[1] Л. Н. Ромакина, “Аналоги формулы Лобачевского для угла переллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, No. 10, 393–407 (2013).

[2] Л. Н. Ромакина, “Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 12, No. 3, 37–44 (2012).

[3] Л. Н. Ромакина, “Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны”, *Матем. сб.*, 203, No. 9, 83–116 (2012).

[4] Л. Н. Ромакина, “Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны”, *Дальневост. матем. журн.*, 13, No. 1, 127–147 (2013).

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, 410412, Россия

E-mail address: romakinaln@mail.ru

О ГЕОМЕТРИЯХ ЦЕПЕЙ $\sum(\mathbf{F_q}, \mathbf{F_q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]/\langle \mathbf{x^2}, \mathbf{xy}, \mathbf{y^2}\rangle)$

ОЛЬГА ДМИТРИЕВНА РОСЬ

Геометрию цепей с носителями полем F и алгеброй A над этим полем обозначают так: $\sum(F, A)$. В нашем случае F — поле Галуа F_q $(q = p^k)$ и алгебра $A = F_q[x, y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$, для базисных элементов которой используются следующие обозначения: $1, e, f (e^2 = f^2 = ef = 0)$. Известный аппарат (включая терминалогию и систему обозначений) представлен в монографиях [1], [3] и статье [2]. Классические геометрии цепей: $\sum(R, C)$ — Мёбиуса, $\sum(R, R(\varepsilon))$ — Лагерра и $\sum(R, R(e))$ — Минковского, в которых в качестве носителей используются поле действительных чисел и алгебры комплексных, дуальных и двойных чисел соответственно.

Основное множество геометрии — проективная прямая AP_1 над этой алгеброй.

Упорядоченная пара $\langle z^1, z^2\rangle \in A^2$ называется допустимой над алгеброй A, если идеал $(z^1, z^2) := k_1 z^1 + k_2 z^2 | k_1, k_2 \in A$, то есть идеал, порожденный элементами $z^1, z^2 \in A$, равен единичному идеалу кольца A.

На множестве допустимых над A пар определяется бинарное отношение $\sim$:

$$(z^1, z^2) \sim (w^1, w^2) \Leftrightarrow \exists r \in A^* \, w^{1,2} = r z^{1,2}.$$

Это бинарное отношение является отношением эквивалентности.

Проективная прямая над алгеброй A — фактормножество множества допустимых над A пар по этому отношению эквивалентности.

Точка проективной прямой AP_1 — класс эквивалентности с представителем (z^1, z^2):

$$A^*(z^1, z^2) = \left\{(rz^1, rz^2) | r \in A^*\right\}.$$

Определим проективную группу $A\Gamma_1$ проективной прямой AP_1.

Пусть $U \in GL(2, A)$. Отображение $AP_1 \to AP_1$ по закону

$$A^*(z^1, z^2) \to A^*(z^1, z^2)U$$

является преобразованием проективной прямой AP_1, а множество таких преобразований образует группу относительно операции композиции преобразований. Факторгруппа этой группы по ее центру является группой преобразований, определяемых матрицами вида $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, где $r \in A^*$ — проективная группа $A\Gamma_1$.

Следующее понятие — система точек общего положения.

Это система трех точек, для которой три определителя, составленные из координат пар точек, являются обратимыми элементами алгебры.

Если A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 — две системы точек общего положения проективной прямой, то существует, и притом единственное, проективное преобразование $\gamma \in A\Gamma_1$ такое, что $\gamma(A_i) = B_i (i = \overline{1, 3})$.

Предложение. $|AP_1| = q^2(q + 1)$.

Теорема 1. *Число цепей геометрии* $\sum(F_q, F_q[x, y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle)$ *равно* q^6.

В частности, число цепей геометрии $\sum(F_3, F_3[x, y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle)$ равно 729. При $p = 5$ имеем 15625 цепей, при $p = 7$ — 117649 цепей.

Теорема 2. *Каждая цепь геометрии* $\sum(F_q, F_q[x, y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle)$ *удовлетворяет уравнению вида:*

$$(z_1, z_2)UU_0\overline{U}^T \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix} = 0,$$

где $U \in GL(2,A), U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1+e+f \\ -(1+e+f) & 0 \end{pmatrix}$.

Вопрос о взаимном расположении цепей в геометрии $\sum(F_q, F_q[x,y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle)$ (кроме $p=3$) пока не решен.

Список литературы

[1] W. Benz, "Vorlesungen uber Geometrie der Algebren", *Springer*, (1973).
[2] К. Гиберт, "Геометрии n-цепей.", *Известия вузов*, 256, No. 9, 85–87 (1983).
[3] Ф. Картеси, *Введение в конечные геометрии*, М. Наука, (1980).

Северо-Восточный государственный университет, Магадан, 685000, Россия
E-mail address: rossolga@yandex.ru

О ГЕОМЕТРИИ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА $M^7 = SO(5)/SO(3)$

АННА ГЕННАДЬЕВНА СЕДЫХ

Как известно [1], существует неприводимое представление группы $SO(3)$ в пространстве $\mathbb{R}^5$. Оно основано на том, что векторное пространство $\mathbb{R}^5$ изоморфно множеству действительных 3×3 симметричных бесследовых матриц. Изоморфизм устанавливается следующим образом

$$X = (x_1, \dots, x_5) \leftrightarrow \sigma(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{3}} - x_4 & x_2 & x_3 \\ x_2 & \dfrac{x_1}{\sqrt{3}} + x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & -\dfrac{2}{\sqrt{3}}x_1 \end{pmatrix}.$$

Неприводимое представление ρ на $\mathbb{R}^5$ задается формулой

$$\rho(h)X = h\sigma(X)h^{-1},\ h \in SO(3),$$

Для элемента X рассмотрим характеристический полином матрицы $\sigma(X)$:

$$P_X(\lambda) = \det(\sigma(X) - \lambda I) = -\lambda^3 + g(X,X)\lambda + \frac{2\sqrt{3}}{9}\mathbb{T}(X, XX).$$

Этот полином инвариантен относительно $SO(3)$ действия, заданного представлением ρ, поэтому его коэффициенты являются $SO(3)$-инвариантными. Билинейная форма g — это стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^5$,

$$g(X,X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2,$$

а трилинейная часть $\mathbb{T}$ задается формулой

$$\mathbb{T}(X,X,X) = \frac{1}{2}x_1(6x_2^2 + 6x_4^2 - 2x_1^2 - 3x_3^2 - 3x_5^2) + \frac{3\sqrt{3}}{2}x_4(x_5^2 - x_3^2) + 3\sqrt{3}x_2x_3x_5.$$

Тензор $\mathbb{T} = \sum_{i,j,k=1}^5 T_{ijk}\, dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k$ симметричен по всем аргументам, и свертка по любым его двум индексам равна нулю (другие свойства $\mathbb{T}$ см. в [1]). При действии $SO(5)$ на пространстве симметричных тензоров группа изотропии тензора $\mathbb{T}$ совпадает с $SO(3)$.

Представляет интерес изучение однородного пространства $M^7 = SO(5)/SO(3)$. Относительно биинвариантного скалярного произведения $\langle A, B\rangle = -\mathrm{trace}\, A\cdot B$ на $SO(5)$ получено разложение

$$so(5) = so(3) + V$$

алгебры Ли $so(5)$ в прямую сумму алгебры Ли $so(3)$ группы $SO(3)$ и $ad(SO(3))$-инвариантного подпространства V

Выберем ортонормированный базис $E_1, \dots, E_{10}$ алгебры $so(5)$ такой, что $E_1, E_2, E_3 \in so(3)$, а $E_4, \cdots, E_{10} \in V$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \end{pmatrix}, E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{30}}{20} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{10}}{20} \\ \frac{\sqrt{30}}{20}0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{10}}{5} & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{30}}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{30}}{20} & 0 & -\frac{\sqrt{10}}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{20} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

С помощью обычных формул для кривизны однородного пространства [2] получены геометрические характеристики однородного пространства $M^7 = SO(5)/SO(3)$. Оказалось, что M^7 имеет постоянную секционную кривизну, равную $K = \frac{1}{40}$, кривизна Риччи равна $Ric = \frac{3}{20}$, скалярная кривизна $S = \frac{21}{20}$. Кроме того, операция

$$V \times V \to V, \quad (A, B) \mapsto [A, B]_V, \ \forall A, B \in V$$

определяет на семимерном пространстве V векторное произведение. Поэтому однородное пространство M^7 имеет структуру векторного произведения.

Тензор $\mathbb{T}$ определяет [1] эндоморфизм пространства $so(5)$ по формуле:

$$\widehat{T}(A)^{ik} = 4T_{ijm}T_{lkm}A^{jl}.$$

Это позволяет определить на $so(5)$ еще одно инвариантное скалярное произведение по формуле [1]:

$$(A, B) = - * (\widehat{T}(A) \wedge *B),$$

где $*$ — оператор Ходжа. Разложение $so(5) = so(3) + V$ остается ортогональным относительно последнего скалярного произведения. При этом $(A, B) = -7\langle A, B\rangle$ для $A, B \in so(3)$ и $(A, B) = 8\langle A, B\rangle$ для $A, B \in V$.

Получены геометрические характеристики однородного пространства $M^7 = SO(5)/SO(3)$ относительно последней инвариантной римановой структуры.

Список литературы

[1] Bobienski M. M., Nurowski P. “Irreducible $SO(3)$ geometry in dimension five”, arXiv:math/0507152v3 [math.DG], (2005).

[2] Кобаяси Ш., Намидзу К., *Основы дифференциальной геометрии* В 2 т. Москва: Наука, (1981).

Кемеровский государственный университет, г. Кемерово, ул. Красная, 6, 650043, Россия

E-mail address: Nuska2522@mail.ru

ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ (q,ρ)-ФОРМ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ОЛЬГА АЛЕКСЕЕВНА СЕРГЕЕВА

Пусть C — квазиокружность в $\overline{\mathbb{C}}$, $D_1 = IntC$, $D_2 = ExtC$, $\lambda_{D_j}(z)|dz|$ — метрика Пуанкаре в D_j, $j = 1, 2$; G — отмеченная конечнопорожденная квазифуксова группа 1 рода дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с инвариантной кривой C, такая что D_1/G — компактная риманова поверхность рода $h \geq 2$; $Hom(G, \mathbb{C}^*)$ — группа характеров ρ из G в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, с операцией умножения. Далее $D = D_1$ или $D = D_2$.

Определение. Измеримой мультипликативной автоморфной формой порядка q с характером ρ ((q,ρ)-формой) на D называется класс эквивалентности измеримых функций $\phi(z)$ с условием $\phi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\phi(z)$ для любого $A \in G$, $z \in D$. При этом (q,ρ)-форма и $(q, \frac{1}{\rho})$-форма считаются ρ-двойственными, а (q_1,ρ)-форма и (q_2,ρ)-форма — q-двойственными формами для $q = q_1 + q_2$. Формы одновременно q- и ρ-двойственные называются (q,ρ)-двойственными формами.

Для целого $q \geq 2$, $1 \leq p \in \mathbb{R}$ и $\rho \in Hom(G, \mathbb{C}^*)$ (q,ρ)-формы ϕ на D, для которых $\|\phi\|^p_{q,\rho,G,p} = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-pq} \left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz \wedge d\overline{z}| < \infty$, образуют банахово пространство $L^p_{q,\rho}(D,G)$ [3]. Здесь f_1 — мультипликативная единица для несущественной составляющей ρ_1 характера ρ в разложении Фаркаша–Кра [1;2].

Для форм $\phi_1 \in L^p_{q,\rho}(D,G)$ и $\phi_2 \in L^{p'}_{q,\rho}(D,G)$, с условием $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, определено билинейное спаривание [3;4;5]: $(\phi_1,\phi_2)_{q,\rho,D,G} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-2q} \frac{\phi_1(z)\overline{\phi_2(z)}}{|f_1(z)|^2} dz \wedge d\overline{z}$.

Теорема 1. *Интегральный оператор* $(\beta_{q,\rho}\varphi)(z) = \iint\limits_{D} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|f_1(\zeta)|^2} K_{q,\rho_1}(z,\zeta)\,\varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$, *где* $K_{q,\rho_1}(z,\zeta) = \frac{(2q-1)\pi^{q-1}\, i}{2}\, k_D(z,\zeta)^q f_1(z)\overline{f_1(\zeta)}$, $k_D(z,\zeta)$ — *кернфункция Бергмана, является ограниченным линейным отображением пространства* $\mathcal{L}^p_{q,\rho}(D,G)$ *в подпространство голоморфных форм* $A^p_{q,\rho}(D,G)$, $1 \leq p \leq \infty$, *со свойствами:*
1) норма $\|\beta_q\| \leq c_q = \frac{2q-1}{q-1}$;
2) для $\varphi \in \mathcal{L}^p_{q,\rho}(D,G)$, $\psi \in \mathcal{L}^{p'}_{q,\rho}(D,G)$, *где* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *верно* $(\beta_q\varphi,\psi)_{q,\rho,D,G} = (\varphi,\beta_q\psi)_{q,\rho,D,G}$;
3) если $\rho = \rho_1$ — *несущественный характер, то для* $\varphi \in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$ *верно* $\beta_q\varphi = \varphi$.

ρ-Ряд Пуанкаре $(\Theta_{q,\rho}\varphi)(z) = \sum\limits_{A\in G} \frac{\varphi(Az)A'(z)^q}{\rho(A)}$ голоморфной функции φ на D определен для всех z, для которых правая часть сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах множества D. Используя теорему 1, получаем

Теорема 2. *Для целого* $q \geq 2$ *оператор* $\Theta_{q,\rho}$ *является непрерывным линейным отображением пространства* $A^1_{q,\rho}(D)$ *в* $A^1_{q,\rho}(D,G)$ *со свойствами:*
1) норма $\|\Theta_{q,\rho}\| \leq 1$;
2) в случае несущественного характера $\rho = \rho_1$ *отображение* $\Theta_{q,\rho}$ *будет сюръективно;*
3) для любого $\psi \in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$, *где* ρ_1 — *несущественный характер,* $1 \leq p \leq \infty$, *существует такое* $\varphi \in A^p_{q,\rho_1}(D)$, *что* $\psi = \Theta_{q,\rho_1}\varphi$ *и* $\|\varphi\|_{q,\rho_1,p} \leq c_q \cdot \|\psi\|_{q,\rho_1,G,p}$, $c_q = \frac{2q-1}{q-1}$.

Теорема 3. *Пусть* $\rho = \rho_1$ — *несущественный характер,* $1 \leq p < \infty$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Тогда билинейное спаривание задаёт антилинейный топологический изоморфизм между* $A^{p'}_{q,\rho_1}(D,G)$ *и пространством, сопряжённым к* $A^p_{q,\rho_1}(D,G)$. *Кроме того, если* $\psi \in A^{p'}_{q,\rho_1}(D,G)$

Работа выполнена при поддержке РФФИ № 12-01-31256 мол_ а.

и линейный функционал l на $A^p_{q,\rho_1}(D,G)$ соответствуют друг другу при этом изоморфизме, то верно неравенство $c_q^{-1}\|\psi\|_{q,\rho_1,G,p'} \le \|l\| \le \|\psi\|_{q,\rho_1,G,p'}$, где $\|l\|$ — норма функционала l, а $c_q = \frac{2q-1}{q-1}$.

Для (q,ρ)-двойственных форм на D вводится другое билинейное спаривание [4,5]: $\langle \varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D/G} \mu_q(z)\varphi(z)\psi(z)dz\wedge d\overline{z}$, где μ_q — фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D)$ для $q=q_1+q_2$, $2\le q\in\mathbb{N}$. Такое спаривание симметрично и непосредственно может быть использовано в теории мультипликативных мероморфных [6] и однозначных автоморфных форм. Связь между пространствами (q,ρ)-двойственных форм осуществляют операторы двойственности: $(\mathcal{B}^{hom}_C\varphi)(z) = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q_1}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta-z)^{2q_1}\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}$, $(\mathcal{B}^{ord}_C\varphi)(z) = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_q(\zeta)f_1(z)}{(\zeta-z)^{2q_2}f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)d\zeta\wedge d\overline{\zeta}$, где $\varphi\in A^p_{q_1,\rho}(D_1,G)$, $z\in D_2$, $q=q_1+q_2$, [4;5;6].

Теорема 4. *Для $\rho\in\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$ и $\varphi\in A^p_{q_1,\rho}(D_1,G)$ и $\psi\in A^{p'}_{q_2,\rho}(D_2,G)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, справедливо:*
$$\left(\mathcal{B}^{ord}_C\varphi,\psi\right)_{q_2,\rho,D_2,G} = \left\langle\varphi,\mathcal{B}^{hom}_{-C}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}.$$

Теорема 4 устанавливает сопряженность операторов $\mathcal{B}^{hom}_C$ и $\mathcal{B}^{ord}_C$ друг с другом в q-двойственных пространствах голоморфных (q,ρ)-форм и связь между билинейными спариваниями в этих пространствах. Используя теоремы 3 и 4, получаем

Теорема 5. *Для целого $q\ge 2$ и несущественного $\rho=\rho_1$ интегральные операторы двойственности $\mathcal{B}^{hom}_C$ и $\mathcal{B}^{ord}_C$ коммутируют с линейным оператором $\Theta_{q,\rho_1,D_i} : A^1_{q,\rho_1}(D_i)\to A^1_{q,\rho_1}(D_i,G)$, определяющим ряд Пуанкаре $(\Theta_{q,\rho}\varphi)(z) = \sum\limits_{A\in G}\frac{\varphi(Az)A'(z)^q}{\rho(A)}$ на D_i, $i=1,2$:*

1) $(\mathcal{B}^{hom}_C\circ\Theta_{q,\rho_1,D_1})\varphi = (\Theta_{q,\frac{1}{\rho_1},D_2}\circ\mathcal{B}^{hom}_C)\varphi\in A^1_{q,\frac{1}{\rho_1}}(D_2,G)$ для $\varphi\in A^1_{q,\rho_1}(D_1)$;

2) $(\mathcal{B}^{ord}_C\circ\Theta_{q_1,\rho_1,D_1})\varphi = (\Theta_{q_2,\rho_1,D_2}\circ\mathcal{B}^{ord}_C)\varphi\in A^1_{q_2,\rho_1}(D_2,G)$ для $\varphi\in A^1_{q_1,\rho_1}(D_1)$, $q_1+q_2=q\ge 2$.

Список литературы

[1] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, (1992).

[2] В. В. Чуешев, *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности* , Ч. 2. Кемерово: КемГУ, (2003).

[3] О. А. Сергеева, "Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм", *Вестник НГУ*, V, № 4, 45–63 (2005).

[4] О. А. Сергеева, "Модифицированные операторы Берса и двойственность голоморфных мультипликативных автоморфных форм", *Сибирский математический журнал*, 50, № 4, 902–914 (2009).

[5] О. А. Сергеева, "Билинейные спаривания для голоморфных (q,ρ)-форм", *Журнал СФУ*, 4, № 1, 128–139 (2011).

[6] О. А. Сергеева, "Интегральный оператор Берса в нормированных пространствах мероморфных (q,ρ)-форм", *Вестник КемГУ*, № 3/1 (47), 216–223 (2011).

Кемеровский государственный университет, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: `Okoin@yandex.ru`

КАТЕГОРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

ЕВГЕНИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ СКУРИХИН, ЮРИЙ НИКОЛАЕВИЧ ЖУРАВЛЁВ, МИХАИЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ ГУЗЕВ

Как известно, не существует единого понятия информации. Однако, как правило, предполагается, что имеется, заложена, зашифрована, иногда очень сложным способом вполне определённая информация, которую нужно лишь суметь извлечь. Её также требуется сохранить, для чего закодировать, передать, а также реализовать. При этом признаются трудности и возможность заблуждений на каждом из перечисленных шагов, но не подвергается сомнению объективный характер информации.

Такая точка зрения связана с детерминизмом в естественно научных концепциях. И если в большинстве процессов в физике и механике, описываемых дифференциальными уравнениями, принцип детерминизма как будто соблюдается, то во многих других разделах науки, в описаниях природных и социальных явлений имеется большая неопределённость. Научный анализ не является полным, что не позволяет достичь основного результата - возможности надёжных и достоверных предсказаний.

Среди причин такого положения вещей в последнее время всё чаще указывается наличие "скрытых параметров" идея которых заимствована у физиков. Сделаны попытки применить её в биологии.

Такие попытки не случайны. Показательны примеры великих физиков-революционеров. Эйнштейн был одним из авторов гипотезы скрытых параметров в квантовой физике. Э. Шрёдингер в книге "Что такое жизнь..." высказывал убеждение, что достаточно мощный ум, располагая наследственной информацией, содержащейся в хромосомах, сумел бы в точности воссоздать организм, хотя созданная им квантовая механика как будто отступает от принципов детерминизма.

Принципам детерминизма соответствует матричный принцип, сформулированный Кольцовым, как принцип передачи наследственной информации и развитый в современной биологии. Отвлекаясь от (очень важных) деталей, можно сформулировать его важнейшее неотъемлимое свойство так.

(МП). Имеется матрица и процесс, который строго однозначно строит по структуре этой матрицы либо идентичную, либо схожую структуру. При этом что-то другое по сравнению с получившимся однажды может получиться из данной матрицы только если происходит ошибка, сбой в процедуре, и достоинством процедур матричного синтеза или матричной репликации является как раз то, что такие сбои сводятся к минимуму.

Повторяясь, отметим, что и в этом случае предполагается, что имеется вполне конкретная зашифрованная в матрице информация, которая однозначно расшифровывается путём, аналогичным матричному синтезу.

Логический анализ показывает, что матричный принцип в сформулированном выше виде неполон и может быть модифицирован.

Модификация связана с теоретико-категорным понятием представимого функтора и идеей А. Гротендика (Д. Мамфорд. Лекции о кривых на алгебраической поверхности, М: Мир (1968)), формулируемой обычно в виде леммы Йонеды. Экстраполируя эту идею, следует считать, что любой объект полностью определяется всей совокупностью своих

Работа поддержана грантом ДВО РАН 12-III-A-01M-004 Гомологический анализ целочисленных характеристик математических объектов.

взаимодействий с другими объектами. Если же рассматривается не вся совокупность взаимодействий, то она может вызываться разными объектами и наоборот один и тот же объект может вызвать разные совокупности последствий.

Таким образом, в этом подходе реализуется 2 положения

(1) Полная определяемость объекта через его взаимодействия с другими объектами (включая себя).

(2) Неоднозначная определяемость объекта через его взаимодействия с другими объектами, если рассматривается недостаточно полный набор объектов.

Эти положения представляются тривиальными (и безусловно не новыми), однако конкретные их реализации отнюдь не тривиальны. Например, именно реализацией этого подхода может считаться понятие обобщённой функции. Обобщённая функция трактуется, как функционал и тем самым определяется через действие на другие объекты. Но, как и в матричном принципе, в этом построении реализуется лишь первое из перечисленных положений (разумеется, в случае обобщённых функций это именно то, что требуется).

(ОМП, Обобщённый матричный принцип). Информация, которую можно извлечь из информационной матрицы, не однозначна. Различные декодеры выделяют разные подструктуры и реализуя на них матричный принцип выдают разные результаты, хотя и по прежнему однозначно определённые.

Отметим, что сформулированный принцип позволяет в некоторых случаях объяснять имеющуюся неопределённость в описании явлений неполным учётом декодеров.

Отметим также, что обобщённый матричный принцип содержит положение о неспецифичности информации, заложенной в носителе. Тем не менее не снимаются вопросы, которые могут быть заданы по поводу каждого потенциального носителя информации: каково его истинное, и каково полное информационное содержание?

Обобщённый матричный принцип приводит к необходимости рассмотрения информационных рядов, то есть последовательностей информационных матриц, получающихся в процессе трансформации. Роль их определяется следующими положениями.

(3) Вся совокупность информационных рядов, исходящих из объекта, задаёт эволюцию объекта и определяет его истинное информационное содержание.

(4) Вся совокупность возможных информационных рядов, исходящих из объекта, определяет его полное информационное содержание.

Тем не менее, для получения полной картины требуется механизм отбора и синтеза информационных рядов.

В докладе предполагается изложить общие соображения и на их основе

1. Рассмотреть эволюционирующие информационные системы и совокупности информационных рядов, то есть информационные потоки.

2. Рассмотреть геометрические структуры на информационных потоках и связать их с нарастанием сложности в процессе эволюции информационной системы.

3. Рассмотреть грубые модели процессов трансформации биологических информационных матриц и геометрические структуры на биологических информационных матрицах.

4. Определить фундаментальный предпучок множеств, информационные пучки модулей и векторные расслоения, сечения которых определяются информационными рядами и классами рядов, а когомологии отражают свойства объекта, получившегося в результате эволюции информационной динамической системы.

ИПМ ДВО РАН, Владивосток 690041,Россия; ДВФУ, Владивосток, 690950, Россия
E-mail address: eeskur@gmail.com

БПИ ДВО РАН, Владивосток, 690022, Россия
E-mail address: zhuravlev@ibss.dvo.ru

ИПМ ДВО РАН, Владивосток, 690041, Россия; ДВФУ, Владивосток, 690950, Россия
E-mail address: guzev@iam.dvo.ru

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НА ПЯТИМЕРНОЙ ГРУППЕ ЛИ

ЯРОСЛАВНА ВИКТОРОВНА СЛАВОЛЮБОВА

В работе [1] дана классификация контактных структур на пятимерных разрешимых группах Ли. Рассмотрим одну из групп Ли классификационного списка, для которой алгебра Ли $\mathfrak{g}_{21}$ задается в базисе $e_1,\dots,e_5$ скобками Ли: $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,\ [e_2,e_5]=-e_2,\ [e_3,e_5]=e_3$ с контактной 1-формой $\eta={e_1}^*+s{e_5}^*$.

Если мы будем считать базис $e_1,\dots,e_5$ ортонормированным, то соответствующая левоинвариантная риманова метрика не задаёт контактную метрическую структуру. Введём другой базис $E_1=-e_2, E_2=e_3, E_3=e_4, E_4=e_1-\frac{1}{s}e_5, E_5=\frac{1}{s}e_5$ и зададим метрику g_0, относительно которой этот базис является ортонормированным. Базис контактного распределения D составляют следующие векторы: E_1,E_2,E_3,E_4. Скобки Ли в новом базисе имеют вид: $[E_1,E_2]=-E_4-E_5, [E_1,E_3]=E_1, [E_1,E_4]=\frac{1}{s}E_1, [E_1,E_5]=-\frac{1}{s}E_1, [E_2,E_4]=-\frac{1}{s}E_2, [E_2,E_5]=\frac{1}{s}E_2, [E_3,E_4]=-E_4-E_5$. Контактная метрическая структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}_{21}$ тогда определяется 1-формой $\eta={E_5}^*$. Поле Риба ξ есть $\xi=E_5$, а аффинор φ_0 определяется формулами $\varphi_0(E_1)=-E_2$, $\varphi_0(E_2)=E_1$, $\varphi_0(E_3)=-E_4$, $\varphi_0(E_4)=E_3$, $\varphi_0(E_5)=0$.

Теорема. *Контактная метрическая структура $(\eta={E_5}^*,\xi=E_5,\varphi_0,g_0)$ не является ни k-контактной ни структурой Сасаки ни при каких значениях параметра s.*

Матрица оператора тензора Риччи имеет вид:

$$RIC=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{s} & \frac{1}{s}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{s} & -\frac{2(s^2+1)}{s^2} & \frac{2}{s^2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{2}{s^2} & \frac{s^2-2}{s^2}\end{pmatrix}.$$

Квадраты норм тензора Римана, Риччи и тензора кручения $N^{(1)}$ имеют вид:

$$\|Riem\|^2=\frac{175s^4+64s^2+192}{4s^4},\quad \|Ric\|^2=\frac{85s^4+32s^2+64}{s^5},\quad \|N^{(1)}\|^2=\frac{8(s^2+6)}{s^2}.$$

Скалярная кривизна выражается формулой $S=-\frac{15s^2+8}{2s^2}$.

Главные кривизны Риччи имеют следующие значения:

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2,\quad \lambda_3=-3,\quad \lambda_{4,5}=\frac{-3s^2-8\pm\sqrt{49s^4+16s^2+64}}{4s^2}.$$

Секционные кривизны имеют вид:

$$K_{1,2}=-\frac{3s^2-4}{2s^2},\ K_{1,3}=-1, K_{1,4}=-\frac{3s^2+4}{4s^2}, K_{2,3}=0, K_{2,4}=\frac{s^2-4}{4s^2}, K_{3,4}=-\frac{7}{4},$$

$$K_{1,5}=K_{2,5}=\frac{s^2-4}{4s^2}, K_{3,5}=K_{4,5}=\frac{1}{4}.$$

Список литературы

[1] A. Diatta, “Left invariant contact structures on Lie groups”, *arXiv: math.DG/0403555v2*, (2004).

Кемеровский институт (филиал) РЭУ им. Плеханова, Кемерово, 650992, Россия
E-mail address: jar1984@mail.ru

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-544.2012.1).

О САМОВЛОЖЕНИЯХ СИСТЕМ ТРОЕК ШТЕЙНЕРА

ФАИНА ИВАНОВНА СОЛОВЬЕВА

Несмотря на многочисленные результаты, посвященные вложениям полного графа K_n в замкнутые поверхности, см. [2], остается нерешенной целая серия задач. Например, неизвестно, существует ли для произвольной системы троек Штейнера порядка $n \equiv 1, 3 \pmod 6$ другая, изоморфная ей (или неизоморфная, но определенная на том же множестве) система троек Штейнера того же порядка, такая что обе системы дают черно-белое вложение (ориентируемое и(или) неориентируемое) порядка n замкнутой поверхности. Ранее было неизвестно существование такого самовложения даже для хэмминговой системы троек Штейнера порядка n, начиная с $n \geq 31$.

Напомним некоторые определения. Семейство 3-элементных подмножеств (*троек*) множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что любое 2-элементное подмножество из N содержится только в одной тройке из N, называется *системой троек Штейнера порядка* n и обозначается через $\mathrm{STS}(n)$. Известно, что совокупность носителей кодовых слов веса 3 в любом двоичном совершенном коде C длины n, содержащем нулевой вектор $\mathbf{0}^n$, определяет систему троек Штейнера порядка n. $\mathrm{STS}(n)$, отвечающая линейному совершенному коду (коду Хэмминга) длины n, называется *хэмминговой*. Хорошо известно [5], что полный граф K_n триангулирует некоторое ориентируемое многообразие тогда и только тогда, когда $n \equiv 0, 3, 4$ или $7 \pmod{12}$, а неориентируемое многообразие — если и только если $n \equiv 0$ или $1 \pmod 3$, $n > 7$. Триангуляцию называют *двухцветной*, если все треугольники, отвечающие вложению графа K_n, могут быть раскрашены в черный и белый цвета таким образом, что никакие два треугольника одного цвета не являются соседними. Для таких вложений n нечетно, поскольку степень каждой вершины должна быть четной. В случае раскраски в два цвета монохроматические треугольники индуцируют $\mathrm{STS}(n)$, при этом каждому топологическому треугольнику с вершинами i, j и k отвечает тройка (i, j, k). В результате получаем *вложение в замкнутую поверхность двумя* $\mathrm{STS}(n)$, одна из которых дает треугольники белого цвета, другая — черного (далее, кратко, *вложение порядка* n).

Известно, что системы троек Штейнера порядка n существуют тогда и только тогда, когда $n \equiv 1$ или $3 \pmod 6$. Из [5] следует, что если вложение порядка n для ориентируемой поверхности существует, то эта поверхность является сферой с $(n-4)(n-3)/12$ ручками, для неориентируемого случая — сферой с $(n-4)(n-3)/6$ пленками Мебиуса. Следовательно, с учетом результатов [5], для ориентируемого случая должно быть $n \equiv 3$ или $7 \pmod{12}$, для неориентируемого случая имеем $n \equiv 1$ или $3 \pmod 6$, $n > 7$. В случае, если системы эквивалентны, такие вложения называются самовложениями $\mathrm{STS}(n)$.

В данной работе рассматриваются только самовложения двух экстремально удаленных по своим свойствам $\mathrm{STS}(n)$: боузовской $\mathrm{STS}(n)$ и хэмминговой. Определение боузовской $\mathrm{STS}(n)$ см. в [3]. Обе эти системы отличаются по своим группам автоморфизмов, хэммингова имеет самую богатую группу автоморфизмов по сравнению с группами автоморфизмов прочих $\mathrm{STS}(n)$, в то время как боузовская система имеет достаточно бедную группу автоморфизмов. Кроме того, ряд их комбинаторных свойств также разительно отличается, например, в хэмминговой содержится максимальное количество Пашей (специального вида подсистем), в то время как в боузовской таких нет совсем. По определению, хэммингова $\mathrm{STS}(n)$ вложима в совершенный код длины n для любого допустимого n, боузовская

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00631-а).

система порядка 15 не является вложимой ни в один совершенный код длины 15 (для боузовских систем больших порядков этот вопрос остается пока открытым). Обзор других результатов, касающихся самовложений STS(n) порядка n, см. в [2].

Боузовские STS(n) существуют для каждого $n \equiv 3 \pmod 6$. В [6] автором была доказана следующая

Теорема 1. *Для каждого* $n \equiv 3 \pmod 6$, *существуют неизоморфные самовложения боузовской* STS(n) *в неориентируемые поверхности.*

В [6] показано также, что из полученных самовложений можно построить для половины значений $n \equiv 1 \pmod 6$ неизоморфные самовложения неориентируемых замкнутых поверхностей.

Хэмминговы STS(n) существуют для всех $n = 2^m - 1, m > 1$. Для $n = 7$ хорошо известно, что единственная хэммингова STS(7) имеет, с точностью до эквивалентности, только одно самовложение, являющееся тором, следовательно это самовложение ориентируемо, см. [5]. Для $n = 15$ существует всего 4 неизоморфных самовложения хэмминговой STS(15), три из них неориентируемы и одно ориентируемо, см. [1]. В работе [4] начаты исследования самовложений хэмминговых STS(n), заданных мономиальными подстановками, т.е. такими подстановками, что одна система троек получается из другой мономиальной подстановкой. Для малых n получена следующая классификация самовложений хэмминговых STS(n), заданных мономиальными подстановками:

Теорема 2. *Для* $m \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, *с точностью до эквивалентности, существует в точности 1, 1, 4, 14, 12, 65 и 88 самовложений хэмминговой* STS(n) *соответственно, где* $n = 2^m - 1$. *Для всех* $5 \leq m \leq 19$ *эти самовложения неориентируемы.*

Кроме того, там же доказано

Утверждение 1. *Для любого* m, *не являющегося простым, не существует самовложений хэмминговой* STS(n), $n = 2^m - 1$, *заданной мономиальной подстановкой.*

Целесообразность изучения пар систем хэмминговых троек Штейнера, связанных мономиальными подстановками, обосновывается в докладе проблемами классификации мономиальных APN-функций в криптографии. В докладе предлагается также рассмотреть зависимость между самовложениями хэмминговых систем троек Штейнера в псевдоповерхности и мономиальными APN-функциями.

Список литературы

[1] M. J. Grannel, G. K. Bennett and T. S. Griggs, Bi-embeddings of the projective space PG(3,2). *Journal of Statistical Planning and Inference*, 86, 321–329 (2000).

[2] M. J. Grannell, T. S. Griggs, "Designs and Topology *Surveys in Combinatorics 2007*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series, 346, 121–174 (2007).

[3] Холл М. *Комбинаторика.* – М.: Мир, (1970).

[4] J. Rifà, F. I. Solov'eva and M. Villanueva, Self-embeddings of Hamming Steiner triple systems of small order and APN permutations *Des. Codes and Cryptogr.*, submitted.

[5] G. Ringel, *Map color theorem*, Springer-Verlag, Yew York/Berlin, (1974).

[6] F. I. Solov'eva, Tilings of nonorientable surfaces by Steiner triple systems, *Problems of Inform. Transm.*, 43, No. 3, 167–178 (2007).

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: sol@math.nsc.ru

О ЛИФТАХ В РАССЛОЕНИЯ ВЕЙЛЯ

АДГАМ ЯХИЕВИЧ СУЛТАНОВ

В настоящей работе описаны способы получения продолжений тензорных полей и линейных связностей с базы, которая является связным гладким многообразием M класса C^∞, в расслоение Вейля $M^{\mathbb{A}}$, где $\mathbb{A}$ — локальная алгебра А. Вейля. Алгебра Вейля представляет собой конечномерную коммутативную ассоциативную алгебру с единицей над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, обладающая максимальным нильпотентным идеалом $\mathbb{I}$ таким, что факторалгебра $\mathbb{A}/\mathbb{I}$ изоморфна $\mathbb{R}$. Расслоения $\mathbb{A}$-близких точек $M^{\mathbb{A}}$ (расслоения Вейля) были введены в 1953 году А. Вейлем [1]. Расслоениями Вейля являются касательные расслоения различных порядков, расслоения Эресмана. Много работ посвящено построению продолжений (лифтов) геометрических объектов, заданных на базе, в расслоение $M^{\mathbb{A}}$ [2], [3], [4].

Расслоение Вейля строится при помощи гладкого многообразия M и алгебры А. Вейля. Опишем вкратце, как определяется расслоение А. Вейля. Пусть M — гладкое класса C^∞ связное n-мерное многообразие, $C^\infty(M)$ — алгебра гладких класса C^∞ функций, заданных на M.Обозначим через $M_q^{\mathbb{A}}$ множество всевозможных гомоморфизмов $j_q : C^\infty(M) \to \mathbb{A}$, где $q \in M$, удовлетворяющих условию $j_q(f) \equiv f(q)(mod\,\mathbb{I})$. Множество $\bigcup_{q\in M} M_q^{\mathbb{A}}$ обозначим через $M^{\mathbb{A}}$. Отображение $\pi : M^{\mathbb{A}} \to M$, определенное условием $\pi(j_q) = q$ называется канонической проекцией, а тройка $(M^{\mathbb{A}}, \pi, M)$ — расслоением А. Вейля. Множество $M^{\mathbb{A}}$ естественным образом можно наделить структурой гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ и гладкой структурой над $\mathbb{R}$. Построение продолжений тензорных полей и линейных связностей в основе своей имеют продолжения функций $f \in C^\infty(M)$ в $C^\infty(M^{\mathbb{A}})$.

Для каждой функции $f \in C^\infty(M)$, функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом функции f в $M^{\mathbb{A}}$, а функция f^A, определенная условием $f^{\mathbb{A}}(j_q) = j_q(f)$ для каждого гомоморфизма j_q, называется естественным продолжением функции f в расслоение Вейля $M^{\mathbb{A}}$. Функция $f^{\mathbb{A}}$ принимает свои значения в алгебре $\mathbb{A}$. Эти функции были построены А. Вейлем.

Для построения вещественнозначных лифтов функции из $C^\infty(M)$ нам потребуется векторное пространство $\mathbb{A}^*$ линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$, со значениями в поле $\mathbb{R}$. На этом векторном пространстве определим дополнительно внешнюю операцию умножения на элементы алгебры $\mathbb{A}$ следующим образом: произведением линейной формы $a^* \in \mathbb{A}^*$ и элемента $b \in \mathbb{A}$ будем называть линейную форму $a^* \cdot b$, определенную условием $a^* \cdot b(c) = a^*(bc)$ для любого элемента $c \in \mathbb{A}$. Тогда $\mathbb{A}^*$, снабженное естественной операцией сложения и введенной внешней операцией умножения на элементы алгебры $\mathbb{A}$, будет $\mathbb{A}$-модулем. Этим модулем мы будем пользоваться при построении вещественнозначных продолжений функций с M в $M^{\mathbb{A}}$. Пусть $a^* \in \mathbb{A}^*$. (a^*)-лифтом функции $f \in C^\infty(M)$ в расслоение Вейля $M^{\mathbb{A}}$ называется функция $f_{(a^*)}$, принимающая значения в $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $f_(a^*) = a^* \circ f^{\mathbb{A}}$. Ясно, что $f_{(\lambda a^* + \mu b^*)} = \lambda f_{(a^*)} + \mu f_{(b^*)}, (f+g)_{(a^*)} = f_{(a^*)} + g_{(a^*)}, (\lambda f)_{(a^*)} = \lambda f_{(a^*)}$ для всех $f, g \in C^\infty(M), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Имеет место следующее тождество: $(fg)_{(a^*)} = f_{(a^* \cdot e^\alpha)} g_{(e_\alpha)}$ (по α ведется суммирование), где (e^α) — базис алгебры $\mathbb{A}$, (e_α) — базис векторного пространства $\mathbb{A}^*$, дуальный базису (e^α) [5].

Пусть X — гладкое векторное поле на M, $a \in \mathbb{A}$ — произвольный элемент алгебры $\mathbb{A}$. На тотальном многообразии $M^{\mathbb{A}}$ расслоения Вейля существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию

$$X^{(a)} f_{(b*)} = (Xf)_{(b*\cdot a)}$$

для любой функции $f \in C^\infty(M)$.

Векторное поле $X^{(a)}$ называется (a)-лифтом векторного поля X [5]. Предположим, что K — тензорное поле типа $(1, r)$ на M. Тогда на $M^{\mathbb{A}}$ существует единственное тензорное поле $K^{(a)}(a \in \mathbb{A})$, которое удовлетворяет тождеству

$$K^{(a)}(X_1^{(b_1)}, \ldots, X_r^{(b_r)}) = (K(X_1, X_2, \ldots, X_r))^{(ab_1 \ldots b_r)}$$

для любых векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_r$ на M и любых $b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathbb{A}$.

Если ω — r-форма на $M_n, b^* \in \mathbb{A}^*$, то на $M_n^{\mathbb{A}}$ существует единственная r-форма $\omega_{(b^*)}$, удовлетворяющая условию

$$\omega_{(b^*)}(X_1^{(b_1)}, \ldots, X_r^{(b_r)}) = (\omega(X_1, \ldots, X_r))_{(b^* \cdot (b_1, \ldots, b_r))}.$$

Известные лифты тензорных полей в теории касательных расслоений, суммы Уитни $T(M) \oplus_W T(M)$ получаются по указанному правилу. Здесь в качестве алгебры А. Вейля выступают алгебра плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^r)$ и сумма Уитни $\mathbb{R}(\varepsilon) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon)$ двух экземпляров алгебры дуальных чисел, соответственно. Лифты 1-формы, заданной равенством $\omega = \omega_i dx^i$, соответствующие базисным линейным формам e_0, e_1, e_2, которые образуют базис, дуальный базису $e^0 = 1, e^1, e^2$ алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon)$ имеют вид: $\omega_{(0)} = (\omega_i)_{(0)} dx_0^i, \omega_{(1)} = (\partial_j \omega_i)_{(0)} x_1^j dx_0^i + (\omega_i)_{(0)} dx_1^i, \omega_{(2)} = (\partial_j \omega_i)_{(0)} x_2^j dx_0^i + (\omega_i)_{(0)} dx_2^i$. Отсюда следует, что лифты 1-форм, которые приведены в работе А.П. Широкова [2], получаются по указанной нами схеме.

В заключение укажем способ получения линейной связности в расслоении Вейля $M^{\mathbb{A}}$, исходя из линейной связности $\nabla = \Gamma_0$, тензорных полей Γ_λ типа $(1, 2)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, dim\, \mathbb{I})$, заданных на базе расслоения M. Имеет место следующий факт: на расслоении $M^{\mathbb{A}}$ существует единственная линейная связность ∇^{Sh} такая, что

$$\nabla^{Sh}_{X^{(a)}} Y^b = (\Gamma_\alpha(X, Y))^{(e^\alpha ab)}$$

для всех $a, b \in \mathbb{A}$ и векторных полей X, Y, заданных на M [5].

Список литературы

[1] A. Weil, “Théorie des points sur les variétés différentiables”, *Cooloq.internat. Centre nat. rech.sci*, Strasbourg. – Paris,1953, 52, 111–117 (1953).

[2] А. Широков, “Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами”, *Проблемы геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР, М.)*, No. 12, 61–95 (1980).

[3] A. Morimoto, “Prolongation of connections to bundles of infinitely near points”, *J. Different. Geom.*, 11, No. 4, 479–498 (1976).

[4] В. Шурыгин, “Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля”, *Итоги науки и техники. Современ. матем. и ее приложения. Тематические обзоры (ВИНИТИ, М.)*, 162–236 (2002).

[5] А. Султанов, “Продолжения тензорных полей и связностей в расслоение Вейля”, *Изв. вузов. Математика*, No. 9, 64–72 (1999).

Пензенский государственный университет, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail address: sultanovaya@rambler.ru

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДИВИЗОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА

МАРИНА ИВАНОВНА ТУЛИНА

В работе исследуется расположение нулей голоморфных дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, а также строение множества (мультипликативно) специальных дивизоров на F в пространствах F_{g-1} и F_{g-2}. Характером ρ для F называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F), \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Пусть Γ будет фуксова группа, униформизирующая поверхность F в круге U.

Определение 1. *(ρ, q)-дифференциалом Прима на F называется дифференциал $\phi = \phi(z)dz^q$ такой, что $\phi(Tz)(T'z)^q = \rho(T)\phi(z), z \in U, T \in \Gamma$.*

В частности, при $q = 0$, это мультипликативная функция относительно Γ для ρ. Обозначим через $\Omega^q_\rho(D; F)$ векторное пространство, состоящее из (ρ, q)-дифференциалов, кратных дивизору D. Характер ρ для функции f_0, без нулей и полюсов, будем называть несущественным. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть существенными на $\pi_1(F)$.

Определение 2. *Дивизор $D = P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}$, $P_j \in F$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, ..., k$, на F называется (ρ, q)-специальным при $q \geq 1$, если $i_{\rho,q}(D) = \dim \Omega^q_\rho(D) > 0$. Дивизор D на F называется (ρ, q)-неспециальным, если $i_{\rho,q}(D) = 0$.*

Теорема 1. *Пусть ρ — несущественный (существенный) характер и $D = P_1...P_g$ ($D = P_1...P_{g-1}$) — целый дивизор степени g (степени $g-1$) на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$. Тогда существует целый дивизор D' близкий к D, $degD' = g$ ($degD' = g - 1$) такой, что D' — $(\rho, 1)$-неспециальный и D' можно выбрать состоящим из попарно различных точек на F.*

Теорема 2. *Для любого характера ρ и дивизора $D \geq 1$ такого, что $(2g - 2)q - g \geq degD = t \geq 0$ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ при $q > 1$ существует ненулевой голоморфный (ρ, q)-дифференциал τ на F такой, что $(\tau) \geq D$, а значит дивизор D является (ρ, q)-специальным на F.*

Теорема 3. *Для любой последовательности $\{P_j\}_{j=1}^\infty$, состоящей из попарно различных точек на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, любого характера ρ и $q \geq 1, q \in \mathbb{N}$, существует набор (ρ, q)-дифференциалов $\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_d$ из пространства $\Omega^q_\rho(1)$ на F, $d = dim\Omega^q_\rho(1)$, такой, что :*
(1) $\widetilde{\omega}_j \neq 0, j = 1, ..., d$;
(2) $(\widetilde{\omega}_j) \geq D_{j-1}, j = 1, 2, ..., d$, *и дивизоры* $D_{j-1} = P_1...P_{j-1}$, $j = 1, 2, ..., d$, *будут (ρ, q)-специальны на F;*
(3) *для любых фиксированных $q \geq 1$ и $j = 1, ..., d - 1$, множество всех целых дивизоров степени j, из попарно различных точек, образует открытое и всюду плотное подмножество в F_j, состоящее из (ρ, q)-специальных дивизоров на F;*
(4) *если, дополнительно предположим, что $\widetilde{\omega}_j(P_j) \neq 0, j = 1, ..., d$, то $\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_d$ будет базис в $\Omega^q_\rho(1)$, адаптированный к произвольной последовательности $\{P_j\}_{j=1}^\infty$, т. е. удовлетворяющий неравенству из (2).*

Список литературы

[1] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Grad. Text's Math.. – V. 71. – New-York, Springer, (1992).
[2] В.В. Чуешев, *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2*, Кемерово, КемГУ, (2003).

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, 649000, Россия
E-mail address: aniram.ru@googlemail.com

Работа поддержана грантами ФЦП, №-02.740.11.0457; РФФИ, 11-01-90709-мобст; РФФИ, 12-01-00210-а.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕРАЛЛЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

АХМЕТ АКСАНОВИЧ ХУСАИНОВ

Работа посвящена применению методов алгебраической топологии для классификации и изучения асинхронных систем с метками. Асинхронная система определяется как моноид с частичным действием моноида трасс. Это позволяет ввести группы гомологий для асинхронных систем с метками. Показано, что бисимуляционно эквивалентные асинхронные системы имеют изоморфные группы гомологий.

Для произвольного множества S обозначим через $S_* = S \sqcup \{*\}$ множество, полученное добавлением некоторого фиксированного "бесконечно удаленного" элемента $*$. Следуя [1], мы будем рассматривать частичное отображение множеств $f : S \rightharpoonup S'$ как тотальное $f_* : S_* \to S'_*$, полагая для $x \in S$

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \text{ определено,} \\ *, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Для $x = *$ положим $f_*(x) = *$. Получим категорию Set_*, изоморфную категории множеств и частичных отображений.

Согласно [2], моноид M с частичным действием справа на множестве S можно рассматривать как моноид с действием справа на S_*. Для каждого $\mu \in M$ должно иметь место $* \cdot \mu = *$. Пусть E — множество, E^* — моноид слов. Для произвольного симметричного антирефлексивного отношения $I \subseteq E \times E$ *моноидом трасс* $M(E, I)$ называется фактор-моноид $E^*/\equiv$ по наименьшему отношению конгруэнтности, для которого $ab \equiv ba$ для всех $(a, b) \in I$. *Асинхронной системой* $(M(E, I), S, s_0)$ называется моноид трасс с частичным действием на множестве S и с выделенным элементом $s_0 \in S$. Мы можем рассматривать асинхронную систему $(M(E, I), S, s)$ для любого $s \in S$. *Полигональным морфизмом* асинхронных систем $(\sigma, \eta) : (M(E, I), S, s_0) \to (M(E', I'), S', s'_0)$ называется пара, состоящая из отображения $\sigma : S \to S'$, и из отображения $\eta : E \to E' \cup \{1\}$, продолжающегося до гомоморфизма моноидов $M(E, I) \to M(E', I')$, таких, что

- $(\forall a, b \in E)\ (a, b) \in I \Rightarrow (\eta(a), \eta(b)) \in I' \ \vee\ \eta(a) = 1 \ \vee\ \eta(b) = 1$,
- $(\forall s \in S_*)(\forall a \in E)\ \sigma_*(s \cdot a) = \sigma_*(s) \cdot \eta(a)$,
- $\sigma(s_0) = s'_0$.

В общем случае допускаются морфизмы асинхронных систем, не являющиеся полигональными морфизмами [1].

В работе [3] была исследована бисимуляционная эквивалентность, основанная на Pom_L-открытых морфизмах. Пусть L — произвольное множество. *Асинхронная система с метками* $(M(E, I), S, s_0, \lambda, L)$ состоит из асинхронной системы $(M(E, I), S, s_0)$ и функции *метки* $\lambda : E \to L$. Полигональный морфизм $(\sigma, \eta) : (M(E, I), S, s_0) \to (M(E', I'), S', s'_0)$ называется сохраняющим метки, если для функций меток $\lambda : E \to L$ и $\lambda' : E' \to L$ верно $\lambda' \circ \eta = \lambda$. Следующее ниже предложение характеризует Pom_L-открытые морфизмы асинхронных систем в терминах действий моноидов трасс. Поэтому морфизм, удовлетворяющий условиям этого предложения, можно взять за определение Pom_L-открытого морфизма. Элемент $s \in S$ называется *достижимым*, если существует такой $\mu \in M(E, I)$, что $s_0 \cdot \mu = s$.

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, № 2011-ПР-054.

Предложение. *Полигональный морфизм*

$$(\sigma, \eta) : (M(E, I), S, s_0, \lambda, L) \to (M(E', I'), S', s'_0, \lambda', L)$$

будет Pom_L-открытым, если и только если

(1) $\eta(E) \subseteq E'$,

(2) *для любых достижимого элемента $s \in S$ и такого элемента $e' \in E'$, что $\sigma(s) \cdot e' = u' \in S'$ существует такой $e \in E$, что $\eta(e) = e'$, $s \cdot e \in S$ и $\sigma(s \cdot e) = \sigma(s) \cdot \eta(e)$,*

(3) *для всякого достижимого $s \in S$, если $s \cdot e_1 e_2 \in S$ и $(\eta(e_1), \eta(e_2)) \in I'$, то $(e_1, e_2) \in I$.*

Функция метки $\lambda : E \to L$ называется *строгой*, если для любой пары $(a, b) \in I$ имеет место $\lambda(a) \neq \lambda(b)$. Асинхронные системы с метками A и B называются *Pom_L-бисимилярными*, если существует асинхронная система C с метками, допускающая Pom_L-открытые морфизмы $C \to A$ и $C \to B$.

Введем группы гомологий асинхронных систем с метками. С этой целью определим на L произвольное отношение линейного порядка. Если $\lambda : E \to L$ — строгая функция метки, то для любого подмножества $A \subseteq E$, состоящего из попарно независимых элементов, отношение $(A \times A) \cap I$ превращает A в линейно упорядоченное множество. Рассмотрим последовательность множеств

$$\begin{aligned} Q_n(M(E, I), S, s_0, \lambda, L) = \{(\lambda(a_1), \cdots, \lambda(a_n)) | (\exists s \in S(s_0)) s \cdot a_1 \cdots a_n \in S(s_0) \\ \& \ a_1 < \cdots < a_n \ \& \ (a_i, a_j) \in I \text{ для всех } 1 \leqslant i < j \leqslant n\}, \end{aligned}$$

для всех $n \geqslant 0$. Здесь $S(s_0)$ обозначает множество достижимых элементов.

Пусть $\mathbb{Z}S$ обозначает свободную абелеву группу, порожденную множеством S. Превратим последовательность абелевых групп $\mathbb{Z}Q_n(M(E, I), S, s_0, \lambda, L)$ в комплекс, определяя дифференциалы на элементах базисов n-х групп по формуле

$$d_n(\lambda(a_1), \cdots, \lambda(a_n)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\lambda(a_1), \cdots, \lambda(a_{i-1}), \lambda(a_{i+1}), \cdots, \lambda(a_n)).$$

Группы гомологий полученного комплекса называются *n-ми группами гомологий асинхронной системы с метками* и обозначаются через $H_n(M(E, I), S, s_0, \lambda, L)$. При $n = 0$ множество $Q_0(M(E, I), S, s_0, \lambda, L)$ пусто, и значит нулевая группа гомологий равна нулю.

Теорема. *Пусть заданы Pom_L-бисимилярные асинхронные системы с метками $(M(E, I), S, s_0, \lambda, L)$ и $(M(E', I'), S', s'_0, \lambda', L)$. Тогда для каждого $w = a_1 \cdots a_k \in E^*$, $k \geqslant 0$, удовлетворяющего условию $s_0 \cdot w \in S$, существует такое слово $w' = a'_1 \cdots a'_k \in E'^*$, что $s'_0 \cdot w' \in S'$ и*

$$(\forall n \geqslant 0) \ H_n(M(E, I), S, s_0 \cdot w, \lambda, L) \cong H_n(M(E', I'), S', s'_0 \cdot w', \lambda', L).$$

Список литературы

[1] G. Winskel, M. Nielsen, “Models for Concurrency”, *Handbook of Logic in Computer Science*, IV, ed. Abramsky, Gabbay and Maibaum. Oxford University Press, 1–148 (1995).

[2] A. Husainov, “On the homology of small categories and asynchronous transition systems”, *Homology Homotopy Appl.*, 6, No. 1, 439–471 (2004).

[3] M. Nielsen, G. Winskel, “Petri nets and bisimulation”, *Theoretical Computer Sci.*, 153, No. 1-2, 211–244 (1996).

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия

E-mail address: husainov51@yandex.ru

SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF SHALLOW–WATER

YURII ALEKSANDROVICH CHIRKUNOV[1,2], SERGEI YUR'EVICH DOBROKHOTOV[3,4], SERGEY BORISOVICH MEDVEDEV[2,5], SERGEY VITAL'EVICH NAZARENKO[6], DMITRII SERGEEVICH MINENKOV[3]

Equivalence of systems of the equations for one-dimensional shallow water models describing motion of surface waves over horizontal and inclined bottoms is established. For each of these systems general formulas for their non-degenerate solutions which are expressed by solutions of the Darboux equation are obtained. The found invariant solutions of the Darboux equation are the elementary representatives significantly different (not connected by reversible point transformations) of exact solutions for this equation. They depend on 21 arbitrary real constants. These solutions product new solutions by the help of general production formulas depending on 6 arbitrary real constant formulas. As result a 27-parametrical set of significantly different exact solutions is found. The vector space of exact solutions of the Darboux equation states an infinite set of their exact solutions. All degenerate solutions of these of system are found also.

[1] Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073, Russia
[2] Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia
[3] Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, 119526, Russia
[4] Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, 141700, Russia
[5] Moskow State University, Moscow, 119991, Russia
[6] Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL-UK, United Kingdom
E-mail address: chr101@mail.ru

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00648), by the Program "Leading Scientific Schools" (project no. NSh_6706.2012.1), and by a grant from the Government of the Russian Federation for the state support of research teams headed by invited researchers (contract no. 12.740.11.1430).

НЕСКОЛЬКО ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

НАДЕЖДА АЛЕКСАНДРОВНА ЧУЕШЕВА

Рассмотрим в области $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,1)\}$ с кусочно-гладкой границей дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + cu_x + du + eu_t = f(x,t) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u|_{t=0,\ t=1} = 0, \quad u|_{x=0,\ x=1} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0,\ x=1} = 0. \tag{2}$$

Граничные задачи для таких уравнений рассматривали многие авторы. Например, Д. Аманов, В.Н. Врагов, А.А. Дезин, Г.В. Демиденко, Ю.А. Дубинский, И.Е. Егоров, А.И. Кожанов, В.П. Михайлов, С.Г. Пятков, Ж.А. Отарова, Г.А. Свиридюк.

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть существуют постоянные $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ (ε мало) такие, что для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия: 1) $a \geq 0$, $b > 0$; 2) $(b-\varepsilon)\frac{\pi}{8} - d \geq \delta > 0$. Тогда решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) из пространства $H^{2,1}(D)$ существует и единственно.*

Норма в $H^{2,1}(D)$ задается равенством $\|u\|_{H^{2,1}(D)} = \left(\int\limits_D (u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_t^2)\, dD\right)^{\frac{1}{2}}$.

Пример неединственности решения задачи (1), (2). В области $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,\pi)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + 4u_{xxx} + 3u_{xx} + 4u_x + 5u = 0 \tag{3}$$

с граничными условиями

$$u|_{t=0,\ t=\pi} = 0, \quad u|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \tag{4}$$

Функции $u(x,y) \equiv 0$, $u(x,y) = \sin t \sin x$ удовлетворяют краевым условиям (4) и уравнению (3). Заметим, что не выполняется условие 2) на коэффициенты уравнения (1) в теореме.

Пусть теперь решение уравнения (1) удовлетворяет на границе условиям:

$$u|_{t=0,\ t=1} = 0, \quad u|_{x=0,\ x=1} = 0, \quad u_x|_{x=0,\ x=1} = 0. \tag{2'}$$

Тогда будет верна

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть существует постоянная $\delta > 0$ такая, что для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия: 1) $b > 0$; 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$. Тогда решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) из пространства $H^{2,1}(D)$ существует и единственно.*

Пример 1. В области $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,\frac{1}{2})\}$ рассмотрим уравнение

$$(1-t)^2 u_{tt} - u_{xxxx} + a(x,t)u_{xxx} - u_{xx} + a(x,t)u_x + \frac{3}{4}u + (1-t)u_t = \frac{3}{4}\sin\left(1 - \frac{t}{2}\right) \tag{5}$$

с начально-краевыми условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \tag{6}$$

Коэффициент $a(x,t)$ и правая часть в уравнении (5) — аналитические функции в $\overline{D}$. Решением задачи (5), (6) будет функция $u(x,t) = \left((1-t)^{\frac{3}{2}} - (1 - \frac{3}{2}t)\right)\sin x$, которая не принадлежит классу функций $W_2^2(D)$.

Пример 2. В области $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,1)\}$ рассмотрим уравнение

$$u^n_{tt} - u^n_{xxxx} + u^n_{xx} + u^n_t = 0 \tag{7}$$

с начально-краевыми условиями

$$u^n|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^5}, \quad u^n_t|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^3}, \quad u^n|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad u^n_{xx}|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \tag{8}$$

Неустойчивым решением задачи (7), (8) будет функция $u^n(x,t) = \frac{e^{n^2 t}\ \sin nx}{n^5}$.

В работе [4] найдено решение для нелинейного уравнения следующего вида

$$u_{xxxxxx}(x,t) + 15\ u_x(x,t) \cdot u_{xxxx}(x,t) + 15\ u_{xx}(x,t) \cdot u_{xxx}(x,t) + 45\ (u_x(x,t))^2 \cdot u_{xx}(x,t) -$$
$$-5\ u_{xxxt} - 15\ u_x(x,t) \cdot u_{xt}(x,t) - 15\ u_t(x,t) \cdot u_{xx}(x,t) - 5\ u_{tt}(x,t) = 0,$$

Решением этого уравнения будет функция

$$u(x,t) = c_3 - 2c_2 \tanh\left(-c_1 - c_2 x - 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}\right) c_2^3 t\right).$$

Рассмотрим аналогичное уравнение четвертого порядка с произвольными коэффициентами.

Задача 1.

$$a\ u_x(x,t) \cdot u_{xxxx}(x,t) + b\ u_{xx}(x,t) \cdot u_{xxx}(x,t) + c\ (u_x(x,t))^2 \cdot u_{xx}(x,t) +$$
$$+d\ u_x(x,t) \cdot u_{xt}(x,t) + e\ u_t(x,t) \cdot u_{xx}(x,t) = 0,$$

a, b, c, d, e — вещественные постоянные и $c \neq 0, d + e \neq 0$. Функция

$$u(x,t) = c_3 - \frac{6c_2(b+2a)\ \tanh\left(-c_1 - c_2 x + \frac{4(c_2)^3(a+b)t}{d+e}\right)}{c}$$

является решением данного уравнения.

Задача 2. Интересно дифференциальное уравнение в работе В.К. Белошапка [2]

$$u_x(x,t) \cdot u_t(x,t)\left(u_{xxt}(x,t) \cdot\ u_t(x,t) - u_{xtt}(x,t) \cdot\ u_x(x,t)\right) +$$
$$+u_{xt}(x,t)\left((u_x(x,t))^2 \cdot u_{tt}(x,t) - (u_t(x,t))^2 \cdot u_{xx}(x,t)\right) = 0. \tag{9}$$

Функция $u(x,t) = c + \tanh(d + ax + bt)$ — решение этого уравнения. Здесь $(c, d, a, b \in \mathbb{R})$.

Задача 3. Заметим, что уравнение $e^{-y} + \sqrt{2}\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ имеет бесконечно много решений на луче $[0, \infty)$. Рассмотрим у этого уравнения два решения 0 и y_0, где $y_0 \in \left(\pi + \frac{\pi}{4},\ \pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть в полосе $\Pi = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x + t = 0, \quad x + t = y_0\}$ задано уравнение (9).

На границе полосы зададим нулевые граничные условия

$$u|_{x+t=0} = 0, \quad u_x|_{x+t=0} = 0, \quad u_t|_{x+t=0} = 0, \quad u|_{x+t=y_0} = 0. \tag{10}$$

Задача (9), (10) имеет ненулевое решение

$$u(x,y) = e^{-(x+t)} + \sqrt{2}\sin\left((x+t) - \frac{\pi}{4}\right).$$

Список литературы

[1] Д. Аманов, “Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка”, *Узб. мат. ж.*, No. 3, 13–22 (2008).

[2] В.К. Белошапка, “Об аналитической сложности функций двух переменных”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, Vol. 14 No. 3, 243–249 (2007).

[3] В.Н. Врагов, *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, Новосибирск: Новосибирский университет, (1983).

[4] I.E. Inan, “(G'/G)-Expansion Method for Traveling Wave Solutions of the Sixth-Order Ramani Equation”, *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, 7, No. 1, 51–57 (2010).

Кемеровский государственный университет, Кемерово, 650065, Россия

E-mail address: `chuesheva@ngs.ru`

СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОГО ГЕКСАЭДРА, ОБОБЩЕННОГО ОКТАЭДРА И ИХ АНАЛОГОВ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

АНТОН ВЯЧЕСЛАВОВИЧ ШЕРСТОБИТОВ

Обобщенный октаэдр (октаэдр*) — восьмигранник с треугольными гранями, имеющий 6 вершин, у которого пространственные диагонали пересекаются в одной точке (*центральная точка*, точка O).

Обобщенный гексаэдр (гексаэдр*) — шестигранник с четырехугольными гранями, у которого пространственные диагонали пересекаются в одной точке (*центральная точка*, точка O). Гексаэдр* имеет 3 *диагональные точки* P, Q, R, каждая из которых задается 4 ребрами.

Теорема 1. *Если два гексаэдра* G_1, G_2 *имеют общую грань* g, *то их грани, противоположные* g, *являются противоположными гранями гексаэдра** G_3. *Все три гексаэдра* имеют две общие диагональные точки* P *и* Q. *Диагональные точки гексаэдров** G_1, G_2 *и* G_3, *отличные от* P *и* Q, *точки* R, R_1 *и* R_2 *лежат на одной прямой. Пусть* O, O_1, O_2 — *центральные точки гексаэдров** G_1, G_2 *и* G_3, *соответственно, тогда точки* R, O_1, O_2 *(также* R_1, O, O_2 *и* R_2, O, O_1*) лежат на одной прямой. Из этого следует, что гексаэдры** G_1, G_2 *и* G_3 *задают пространственную конфигурацию точек и прямых* $(20_6; 40_3)$, *а также конфигурацию точек и плоскостей* $(20_{15}; 50_6)$.

Теорема 2. *Даны три гексаэдра** X, Y, Z, *имеющие общую грань* g. *Грани* g_x, g_y *и* g_z — *грани, противоположные* g *у соответствующих гексаэдров**. $XY(XZ, YZ)$ — *гексаэдр**, *противоположными гранями которого являются* g_x *и* g_y (g_x *и* g_z; g_y *и* g_z). *Гексаэдры** X, Y, Z, XY, XZ *и* YZ *имеют две общие диагональные точки* P, Q. *Их остальные диагональные точки обозначим соответственно* $R_x, R_y, R_z, R_{xy}, R_{xz}$ *и* R_{yz}. *Центральные точки вышеуказанных гексаэдров* назовем* $O_x, O_y, O_z, O_{xy}, O_{xz}$ *и* O_{yz}, *соответственно. Тогда:*

а) Точки $R_x, R_y, R_z, R_{xy}, R_{xz}$ *и* R_{yz} *лежат в одной плоскости и являются вершинами полного четырехсторонника.*

б) Все точки вида R_i *и* O_j *с соответствующими прямыми образуют конфигурацию Рейе* $(12_4; 16_3)$.

в) Гексаэдры X, Y, Z *задают конфигурацию точек и прямых* $(30_8; 80_3)$, *а также конфигурацию точек и плоскостей* $(30_{28}; 140_6)$.

Обобщенный гипергексаэдр (гипергексаэдр*) — четырехмерный многогранник, имеющий 8 трёхмерных граней в форме гексаэдров*, 24 двумерные грани, 32 ребра и 16 вершин. *Центральная точка* гипергексаэдра* (точка O) задается 8 диагоналями. Гипергексаэдр* имеет 4 *диагональные точки* P, Q, R, S, каждая из которых задается 8 ребрами.

Теорема 3. *Если два гипергексаэдра** G_1 *и* G_2 *имеют общую трехмерную грань* g, *то их грани, противоположные* g, *являются противоположными гранями гипергексаэдра** G_3. *Каждый гипергексаэдр* имеет диагональную точку, не принадлежащую остальным гипергексаэдрам*. Обозначим их соответственно* S_1, S_2 *и* S_3. *Точки* O_1, O_2 *и* O_3 — *центральные точки гипергексаэдров** G_1, G_2 *и* G_3, *соответственно. Тогда:*

А) точки S_1, S_2 *и* S_3 *всегда лежат на одной прямой;*

Б) диагональная точка S_j *одного гипергексаэдра* принадлежит прямой, соединяющей центральные точки двух других гипергексаэдров*.*

Обобщенный гипероктаэдр (гипероктаэдр*) — четырехмерный многогранник, который имеет 16 трёхмерных граней, имеющих форму тетраэдра; 32 двумерные грани; 24 ребра; 8 вершин. *Центральная точка* гипероктаэдра* (точка O) задается 4 диагоналями.

Теорема 4. *Соединив отрезками центральные точки всех трехмерных смежных граней гипергексаэдра* G, получим гипероктаэдр* G', центральная точка которого совпадет с центральной точкой исходного гипергексаэдра* G.*

Теорема 5. *Отрезки, соединяющие центроиды смежных трехмерных граней гипероктаэдра*, образуют гипергексаэдр*, у которого все противоположные грани и ребра равны и параллельны (четырехмерный аналог параллелепипеда).*

Список литературы

[1] Я.П. Понарин, *Аффинная и проективная геометрия*, МЦНМО, (2009).
[2] Г.Б. Гуревич, *Проективная геометрия*, Физматгиз, (1960).

Областная специализированная школа-лицей для детей, одаренных в области математики, физики и информатики, Усть-Каменогорск, 019, Казахстан
E-mail address: Sherstobitov_a55@mail.ru

О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ ДОПОЛНЕНИЙ К НАБОРАМ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

ИГОРЬ НИКОЛАЕВИЧ ШНУРНИКОВ

В работе изучается число f связных компонент дополнения в d-мерном многообразии M к объединению n замкнутых связных подмногообразий коразмерности один. Получена оценка снизу числа f, зависящая от n и от $(d-1)$-мерной группы гомологий M. Частично описаны множества всех возможных значений числа f для разбиений плоских вещественных d-мерных торов наборами плоских подторов и для разбиений евклидовых тетраэдров наборами простых замкнутых геодезических. Найдена оценка снизу числа f для наборов гиперплоскостей в вещественных проективных пространствах, зависящая от n и максимального числа гиперплоскостей, имеющих общую точку; вычислены несколько первых по возрастанию значений числа f.

Наборы гиперплоскостей в аффинных или проективных вещественных пространствах — достаточно популярный объект для исследования. Т. Заславский в [1] выразил число связных компонент дополнения через значения функции Мёбиуса частично упорядоченного множества пересечений. П. Орлик и Л. Соломон в [2] заметили связь между характеристическим многочленом для набора вещественных гиперплоскостей и многочленом Пуанкаре для комплексифицированного набора гиперплоскостей. Р. Бак в [3] нашел максимальные возможные значения чисел k-мерных граней многогранников разбиения, которые достигаются при общем положении гиперплоскостей. Р. Шеннон в [4] доказал формулы для минимальных возможных значений чисел k–мерных плоскостей и k–мерных граней разбиений проективных пространств наборами гиперплоскостей, не имеющих общей точки в совокупности. Б. Грюнбаум в [5] предложил исследовать и частично описал множество всех возможных чисел областей вещественной проективной плоскости, разделенной набором n прямых при фиксированном n. Н. Мартинов в [6] нашел соответствующие множества чисел областей для разбиений проективной плоскости наборами прямых и псевдопрямых, разбиений двумерной сферы наборами больших кругов. Автор в [7] нашел аналогичные множества чисел связных компонент для разбиений двумерных плоских торов и бутылок Клейна наборами замкнутых геодезических.

Теорема 1. *Пусть A — объединение n различных связных замкнутых подмногообразий коразмерности один в связном замкнутом d-мерном компактном многообразии M без края, при этом подмногообразия пересекаются попарно трансверсально. Тогда для числа f компонент связности дополнения $M \setminus A$ имеем*

$$f \geq n + 1 - \dim H_{d-1}(M, G),$$

где группа коэффициентов $G = \mathbb{Z}$, если M и все подмногообразия из A ориентируемы, и $G = \mathbb{Z}_2$ иначе.

Нетрудно построить примеры наборов из $n \geq \dim H_{d-1}(M)$ замкнутых подмногообразий для двумерных сфер с $g \geq 0$ ручками, бутылки Клейна и многомерных проективных пространств, многомерных сфер и торов, для которых достигается равенство в теореме 1.

Теорема 2. *Для множества F чисел f связных компонент дополнения в тетраэдре в евклидовом пространстве к объединению n различных замкнутых несамопересекающихся геодезических имеем*

$$F \subseteq \{n+1, 2n\} \cup \{l \in \mathbb{N} \mid l \geq 4n-6\} \quad \text{для} \quad n \geq 3,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда тетраэдр равногранный.

Исследования автора поддержаны проектом правительства РФ 11.G34.31.0053.

Факторпространство евклидового пространства $\mathbb{R}^d$ по d-мерной решетке называется плоским тором. Плоский подтор коразмерности один задается в координатах решетки уравнением $\sum a_i x_i = b$, где коэффициенты a_i рациональны.

Теорема 3. *Для множества F всех возможных чисел компонент связности дополнений в d-мерном плоском торе к объединениям n плоских подторов коразмерности один имеем*

$$F \supseteq \{n-d+1, \ldots, n\} \cup \{l \in \mathbb{N} \mid l \geq 2(n-d)\},$$

причем для двумерного тора включение обращается в равенство.

Теорема 4. *Рассмотрим набор из n гиперплоскостей в вещественном d-мерном проективном пространстве. Пусть $m < n$ — максимальное число гиперплоскостей, имеющих общую точку. Тогда для числа f связных компонент дополнения имеем*

$$f \geq (m-d+1) \sum_{j=0}^{[\frac{d}{2}]} \frac{C_n^{d-2j}}{C_{m-2j}^{d-2j}}.$$

Теорема 5. *Рассмотрим только те наборы из n гиперплоскостей в вещественном d-мерном проективном пространстве, в которых не все гиперплоскости имеют общую точку. Пусть $d \geq 3$ и $n \geq 2d+5$. Тогда первые четыре по возрастанию значения числа f связных компонент дополнения следующие:*

$$(n-d+1)2^{d-1}, \quad 3(n-d)2^{d-2}, \quad (3n-3d+1)2^{d-2}, \quad 7(n-d)2^{d-3}.$$

Список литературы

[1] T. Zaslavsky, “Facing up to arrangements: Face count formulas for partitions of space by hyperplanes”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 154:1 (1975).

[2] P. Orlic, L. Solomon, “Combinatorics and topology of complements of hyperplanes”, *Inventiones Math.*, 50, 167–189 (1980).

[3] R.C. Buck, “Partition of space”, *Amer. Math. Monthly*, 105, No. 5, 541–544 (1943).

[4] R.W. Shannon, “A lower bound on the number of cells in arrangements of hyperplanes”, *Jour. of combinatorial theory (A)*, 20, 327–335 (1976).

[5] B. Grünbaum, *Arrangements and Spreads*, AMS, Providence, Rhode Island, 1972.

[6] N. Martinov, “Classification of arrangements by the number of their cells”, *Discr. and Comput. Geom.*, 9 No. 1, 39–46 (1993).

[7] И. Н. Шнурников, “О числе областей, образованных наборами замкнутых геодезических на плоских поверхностях”, *Матем. Зам.*, 90 No. 4, 636–640 (2011).

Ярославский Государственный Университет, лаборатория дискретной и вычислительной геометрии им. Б.Н. Делоне; Ярославль, 150000.

E-mail address: shnurnikov@yandex.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С ТЕНЗОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

НАДЕЖДА ВИКТОРОВНА ШТАБЕЛЬ, ЭЛЛА ПЕТРОВНА ШУРИНА

Параметры среды, входящие в систему уравнений Максвелла, в общем случае являются положительно определенными тензорами второго ранга. Этот факт необходимо учитывать при построении вычислительной схемы для математического моделирования электромагнитного поля. Уравнения Максвелла, записанные в терминах дифференциальных форм, с одной стороны не зависят от выбора метрики пространства, с другой стороны физические законы, которые описывает система уравнений Максвелла, становятся очевидными как следствие определения и свойств дифференциальных форм разных порядков.

$$\begin{cases} dE = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ dH = \frac{\partial D}{\partial t} + J + J^s, \\ dD = \rho, \\ dB = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где E и H — напряженность электрического и магнитного полей соответственно, являющиеся 1-формами (дифференциальные формы 1-порядка), B и D — магнитная и электрическая индукции, являющиеся 2-формами, J, J^s — плотности электрического тока (2-формы), ρ — 3-форма плотности заряда.

Идея использования дифференциальных форм для описания законов электромагнетизма принадлежит Deschamps'у [1]. Все метрические характеристики учитываются в дополнительных уравнениях, называемых материальными соотношениями:

$$D = \varepsilon \star E,$$

$$B = \mu \star H,$$

$$J = \sigma \star E,$$

где $\star$ — оператор Ходжа, представляющий собой отображение k-формы в $(3-k)$-форму для трехмерного пространства, ε, μ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости соответственно, σ — тензор электропроводности.

Система уравнений Максвелла (1), как система уравнений первого порядка с тензорными коэффициентами, не вызывает никаких сложностей для построения вычислительной схемы, связанных с анизотропией среды. Однако для большого круга задач, характерных для геофизических методов, необходимо перейти от системы (1) к уравнению второго порядка, сохранив тензорные параметры среды.

В [2] показано с помощью дифференциальных форм, что переход к уравнению второго порядка относительно электрического поля в предположении, что ε, μ — диагональные тензоры, а σ — плотный тензор электропроводности второго ранга, возможен без каких-либо ограничений, налагаемых на тензоры. Уравнение второго порядка относительно магнитного поля можно получить только при ограничении на тип среды: компоненты тензора электропроводности должны быть константами.

В данной работе построена вычислительная схема для уравнения второго порядка относительно электрического поля в частотной области:

$$d(\mu^{-1} \star dE) - w^2 \varepsilon \star E + iw\sigma \star E = -iwJ \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке междисциплинарных интеграционных проектов СО РАН № 98 и 130.

Реализация вычислительной схемы выполнена векторным методом конечных элементов, как векторного аналога дискретных дифференциальных форм. Выполнены серии расчетов электрического поля в изотропной среде с локальным анизотропным объектом различной ориентации. Проводящие анизотропные свойства объекта описываются тензором σ и остаются постоянными в локальной системе координат, связанной с объектом и главными осями тензора. С точки зрения глобальной системы координат, связанной с геометрией источника возбуждения поля, тензор электропроводности объекта зависит от положения объекта в пространстве. Для определения значений тензора σ в объекте в глобальной системе координат применялись тензорные преобразования поворота [3].

Численные расчеты проводились на неструктурированных тетраэдральных сетках. Поскольку тетраэдры являются симплексами 3 порядка, для них справедлива теория цепей, предложенная Уитни [4]. Основываясь на теории цепей, был предложен способ сеточной интерполяции векторного решения между двумя вложенными сетками. Подобная сеточная интерполяция позволяет сделать некоторые оценки эффективности вычислительной схемы на тетраэдральных разбиениях в анизотропных средах.

Список литературы

[1] G.A. Deschamps,“Electromagnetics and Differential Forms”, *Proceedings of the IEEE*, 69, No. 6, 676–696 (1981).

[2] Н.В. Орловская, Э.П. Шурина, М.И. Эпов, “Моделирование электромагнитных полей в среде с анизотропной электропроводностью”, *Вычислительные технологии*, 11, No. 3, 99–116 (2006).

[3] Н.В. Орловская, Э.П. Шурина, М.И. Эпов, “Тензорный коэффициент электропроводности в геофизических приложениях”,*Вычислительные технологии*, 13, No. 1, 93–106 (2008).

[4] Хасслер Уитни, *Геометрическая теория интегрирования*, М.: Издательство иностранной литературы, (1960).

Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: OrlovskayaNV@ipgg.sbras.ru, shurina@online.sinor.ru

$L_{q.p}$-COHOMOLOGY OF NONCOMPACT MANIFOLDS

VLADIMIR MIKHAILOVICH GOL'DSHTEIN

Let (M, g) be a smooth n-dimensional Riemannian manifold, $1 \leq k \leq n$ and $p, q \in (1, \infty)$. The $L_{q,p}$-cohomology of (M, g) is defined to be the quotient of the space of closed differential forms in $L^p(M)$ modulo the exact forms which are exterior differentials of forms in $L^q(M)$.

This study is focused on the $L_{q,p}$-cohomology of non-compact manifolds and its applications: Lipschitz, quasiisometrical and conformal classification, Sobolev type inequalities for differential forms, elliptic equations on manifolds etc...

Definitions.

We denote by $L^1_{loc}(M, \Lambda^k)$ the space of differential k-forms whose coefficients are locally integrable. One says that a form $\theta \in L^1_{loc}(M, \Lambda^k)$ is the *weak exterior differential* of a form $\phi \in L^1_{loc}(M, \Lambda^{k-1})$ and one writes $d\phi = \theta$ if for each $\omega \in C^\infty_c(M, \Lambda^{n-k})$, one has

$$\int_M \theta \wedge \omega = (-1)^k \int_M \phi \wedge d\omega\,.$$

Let $L^p(M, \Lambda^k)$ be the space of differential forms in $L^1_{loc}(M, \Lambda^k)$ such that

$$\|\theta\|_p := \left(\int_M |\theta|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\,.$$

We then set $Z^k_p(M) := L^p(M, \Lambda^k) \cap \ker d$ (= the set of weakly closed forms in $L^p(M, \Lambda^k)$) and

$$B^k_{q,p}(M) := d\left(L^q(M, \Lambda^{k-1})\right) \cap L^p(M, \Lambda^k).$$

Observe that $B^k_{q,p}(M) \subset Z^k_p(M)$ $(d \circ d = 0)$.

The $L_{q,p}$-*cohomology* of (M, g) (where $1 \leq p, q \leq \infty$) is defined to be the quotient

$$H^k_{q,p}(M) := Z^k_p(M)/B^k_{q,p}(M).$$

History and motivations.

- In the book "Geometric integration theory" (1957) H.Whitney constructed "abstract k-dimensional integration theory in R^n for so-called "flat" differential forms (cochains).
- L_2-cohomology (de Rham, Hodge, Kodaira).
- Theory of Sobolev spaces.
- The Sobolev spaces of differential forms $\Omega^*_{q,p}(M)$ and L^*_p-cohomology were introduced at the beginning of 80's (1982) by G., Kuz'minov and Shvedov as a part of our program of a differential calculus on Lipschitz manifolds. The case $p = \infty, M = R^n$ corresponds to the H.Witney geometric integration theory.
- The concept of $L^*_{q,p}$-cohomology was introduced at 2006 by G. and Troyanov.

Main results.

Theorem 1. *Let (M, g) be an n-dimensional Cartan-Hadamard manifold with sectional curvature $K \leq -1$ and Ricci curvature $Ric \geq -(1+\epsilon)^2(n-1)$.*

(A) Assume that

$$\frac{1+\epsilon}{p} < \frac{k}{n-1} \quad \text{and} \quad \frac{k-1}{n-1} + \epsilon < \frac{1+\epsilon}{q},$$

then $H^k_{q,p}(M) \neq 0$.

{*Recall that a Cartan-Hadamard manifold is a complete simply-connected Riemannian manifold of non positive sectional curvature*}.

Remark. *Vanishing results for the $L^*_{q,p}$-cohomology of complete non-compact manifolds will be discussed also.*

Cohomology $H^k_{q,p}(M,g)$ are Lipschitz invariant for any $1 \le q, p \le \infty$.

Theorem 2. *If $q = \frac{n}{k-1}$ and $p = \frac{n}{k}$, then $H^k_{q,p}(M,g)$ are conformal invariants.*

Let us consider the Riemannian manifold $(\tilde{M}, g)$ such that M is diffeomorphic to R^n and $\tilde{g}$ is a Riemannian metric such that in polar coordinates, we have

$$\tilde{g} = dr^2 + e^{-2r} \cdot h.$$

Theorem 3. *$H^k_{q,p}(M,g) = 0$ if and only if $q < \frac{n-1}{k-1} < p$.*

Sobolev type inequalities.

Galiardo-Nirenberg-Sobolev inequality

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{np/(n-p)} \, dvol \right)^{(n-p)/np} \le C(n) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |du|^p \, dvol \right)^{1/p},$$

where $q = \frac{np}{n-p}$. s

This inequality is a global inequality for differential forms of degree one.

Theorem 4. *$H^k_{q,p}(M,g) = 0$ if and only if there exists a constant $C < \infty$ such that for any closed p-integrable differential form ω of degree k there exists a differential form θ of degree $k-1$ such that $d\theta = \omega$ and $\|\theta\|_{L^q} \le C \|\omega\|_{L^p}$.*

The Sobolev inequality $\|\theta\|_{L^q} \le C \|\omega\|_{L^p}$ gives sufficient condition to solving the non linear equation $\delta(\|d\theta\|^{p-2} d\theta) = \alpha$ where δ is the formal adjoint to the exterior differential d.

References

[1] V. Gol'dshtein, M. Troyanov, "Sobolev Inequality for Differential forms and $L_{q,p}$-cohomology", *Journal of Geom. Anal.*, 16, No. 4, 597–631 (2006).

[2] V. Gol'dshtein, M. Troyanov, "Conformal de Rham complex", *Journal of Geom. Anal.*, 20, No. 3, 651–669 (2010).

Ben Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, 84105, Israel
E-mail address: vladimir@bgu.ac.il

DIGITIZATION OF THE HARMONIC OSCILLATOR IN EXTENDED RELATIVITY

YAAKOV FRIEDMAN

Extended Relativistic Dynamics (ERD) admits only solutions which have speed bounded by the speed of light c and acceleration bounded by an assumed universal maximal acceleration a_m. Here we explore the *harmonic oscillator* under ERD. For oscillators with small natural frequency ω, we recover the classical solutions, while for large ω, the solutions differ significantly from the classical one. The solutions for large ω are a "digitization" of the standard signals of the classical harmonic oscillator. The spectrum of these signals coincide with the energy spectrum of the *quantum* harmonic oscillator. While for small ω, the thermal radiation is a wave type, for large ω, it become pulses of radiation. This provides a possible explanation for the difference in the blackbody radiation for small and large ω and is another indication of the validity of ERD.

The Jerusalem College of Technology, Jerusalem, 91160, Israel
E-mail address: `friedman@g.jct.ac.il`

OSSERMAN CONDITION AND DUALITY PRINCIPLE

ZORAN RAKIĆ

Let (M, g) be a pseudo-Riemannian manifold, with curvature tensor R. The Jacobi operator R_X is the symmetric endomorphism of T_pM defined by $R_X(Y) = R(Y, X)X$. In Riemannian settings, if M is locally a rank-one symmetric space or if M is flat, then the local isometry group acts transitively on the unit sphere bundle SM and hence the eigenvalues of R_X are constant on SM. Osserman wondered if the converse held; this question is usually known as the *Osserman conjecture*.

Recently, many authors have been studied problems which arising from the Osserman conjecture and its generalizations. In the first part of the lecture we will give an overview of Osserman type problems in the psuedo-Riemannian geometry. The second part is devoted to the equivalence of the Osserman pointwise condition and the duality principle. This part of the lecture consists the new results, which are obtained in collaboration with Yury Nikolayevsky and Vladica Andrejić.

Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, p.o. box 550, 11 001 Belgrade, Serbia
E-mail address: zrakic@matf.bg.ac.rs

THE GENEALOGY OF CONVEX SOLIDS

ZSOLT LÁNGI

The shape of homogeneous, smooth convex bodies as described by the Euclidean distance from the center of gravity represents a rather restricted class of Morse-Smale functions on S^2. In this talk we show that even this class exhibits the complexity known for general Morse-Smale functions on S^2 by exhausting all combinatorial possibilities: every 2-colored quadrangulation of the sphere is isomorphic to a suitably represented Morse-Smale complex associated with a function in this class (and vice versa). We prove our claim by an inductive algorithm, starting from the path graph P_2 and generating convex bodies corresponding to quadrangulations with increasing number of vertices by performing each combinatorially possible vertex splitting by a convexity-preserving local manipulation of the surface. Since convex bodies carrying Morse-Smale complexes isomorphic to P_2 exist, this algorithm not only proves our claim but also defines a hierarchical order among convex solids. The presented results are obtained jointly with G. Domokos and T. Szabo.

Budapest University of Technology and Economics, Budapest, 1111, Hungary
E-mail address: `zlangi@math.bme.hu`

ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ, 2013

28 – 31 августа, 2013 года

Тезисы Международной конференции

Подписано в печать 01.08.2013	Формат 60×84 1/8

Усл. печ. л. 13,25	Уч.-изд. л. 10.	Тираж 100 экз.	Заказ 247

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга 4

Отпечатано в типографии ООО «Инкпрессо»
630128, г. Новосибирск, ул. Кутателадзе 4г, оф. 310.
тел. +7 (383) 263-71-01