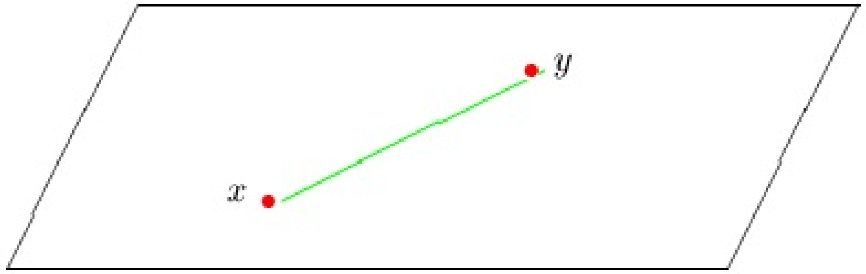
Геометрия и топология G-пространств неположительной кривизны

Павел Андреев (г. Архангельск)

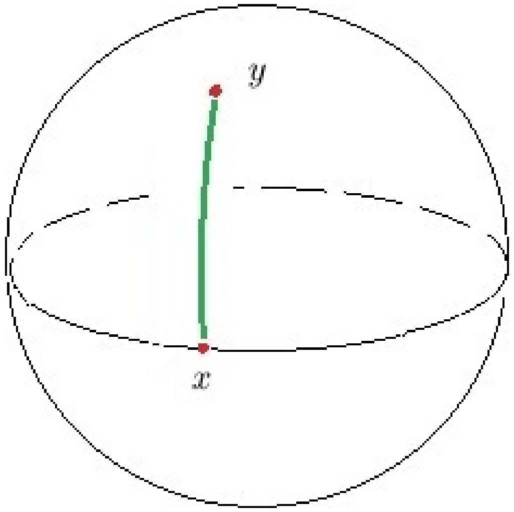
Александр Данилович Александров и Герберт Буземан

Основные понятия

Под **отрезком** в метрическом пространстве (X, d), соединяющим точки $x, y \in X$, понимается образ спрямляемого пути $\gamma : [0, 1] \to X$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, длина которого равна $d(x, y)$. Пространство X называется **геодезичеким**, если в нём любые две точки можно соединить отрезком.



Отрезок на плоскости



на сфере

Определение 1. Метрическое пространство (X, d) называется **G-пространством**, если в нём выполнены следующие аксиомы:

G1. X **конечно компактно** (всякое ограниченное замкнутое подмножество в X компактно)

G2. X **выпукло по Менгеру** (между любыми двумя точками в $x, y \in X$ есть середина m, для которой $d(x, m) = d(y, m) = \frac{1}{2} d(x, y)$).

Из свойств G1 и G2 следует, что X — геодезическое пространство.

G3. В X выполняется свойство **локального продолжения отрезков** (для любой точки $x \in X$ существует такое $r > 0$, что для любой пары точек $y, z \in B(x, r)$ найдётся точка w, для которой $d(y, w) = d(y, z) + d(z, w)$).

G4. X обладает свойством **единственности продолжения отрезков**: если точки y, z, w_1 и $w_2 \in X$ таковы, что

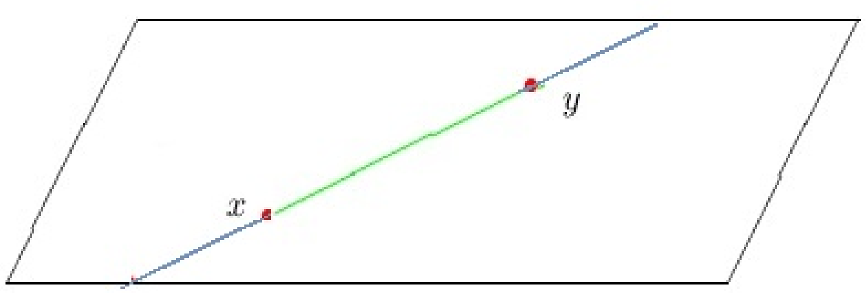
$$d(y, w_1) = d(y, w_2) = d(y, z) + d(z, w_1) = d(y, z) + d(z, w_2),$$

то $w_1 = w_2$.

Для каждой точки x в G-пространстве X определена величина $\rho(x)$, равная точной верхней грани радиусов шаров с центром x, в которых выполнено свойство продолжения отрезков. При этом $\rho(x)$ либо является положительным числом, либо равно $+\infty$. В последнем случае $\rho(y) = +\infty$ для любой точки $y \in X$.

G-пространство X называется **прямым** пространством, если $\rho(x) = +\infty$ для всех $x \in X$.

В прямом пространстве X всякий отрезок однозначно продолжается до бесконечности в обе стороны. Результат такого продолжения — прямая линия.



Евклидова плоскость — прямое пространство.

Проблема Буземана

Проблема 1. Всякое ли G-пространство является топологическим многообразием?

Результаты. Ответ положителен в следующих случаях:

1. В случае малой топологической размерности n:

   - $n \leq 2$: G. Busemann, The Geometry of Geodesics, 1955, Th 9.7, Th 10.4.

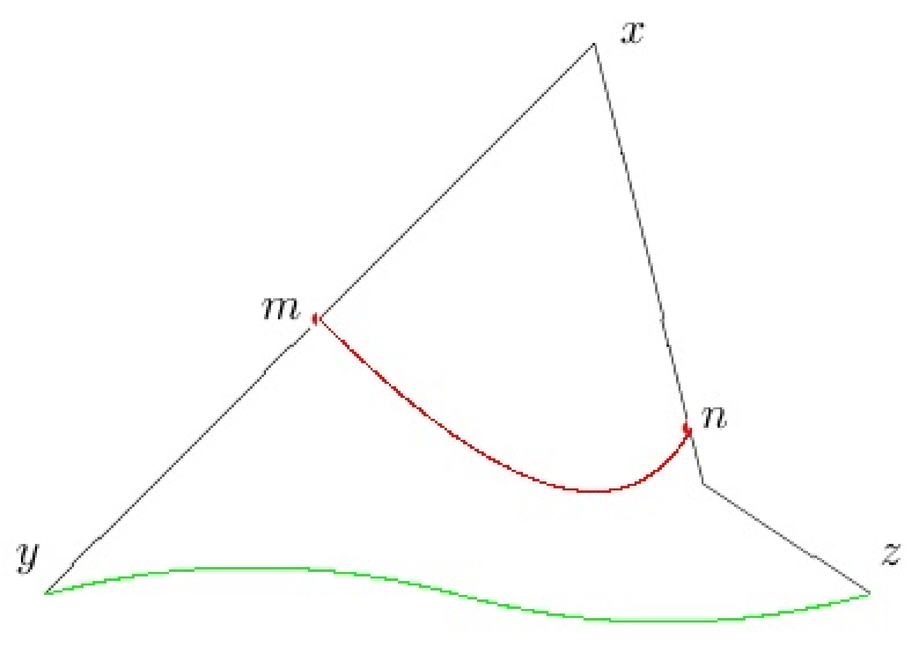
   - $n = 3$: B. Krakus. Any 3-dimensional G-space is a manyfold. Bull. Acad. Pol. Sci., 16 (1968).

   - $n = 4$: P.Thurston, 4-Dimensional Busemann G-spaces are 4-manifolds, Diff. Geom. Appl. 6 (3), 1996.

2. Для G-пространств ограниченной сверху кривизны по А.Д. Александрову: В.Н. Берестовский, 2003 г.

Неположительная кривизна по Буземану

Определение 2. **Треугольником** в геодезическом пространстве (X, d) называется конфигурация, включающая три произвольные точки (вершины треугольника) и три попарно соединяющих их отрезка (стороны треугольника). Геодезическое пространство X называется простанством **неположительной кривизны в смысле Буземана**, если в любом треугольнике $\triangle xyz$ длина его средней линии mn не превосходит длины основания yz.



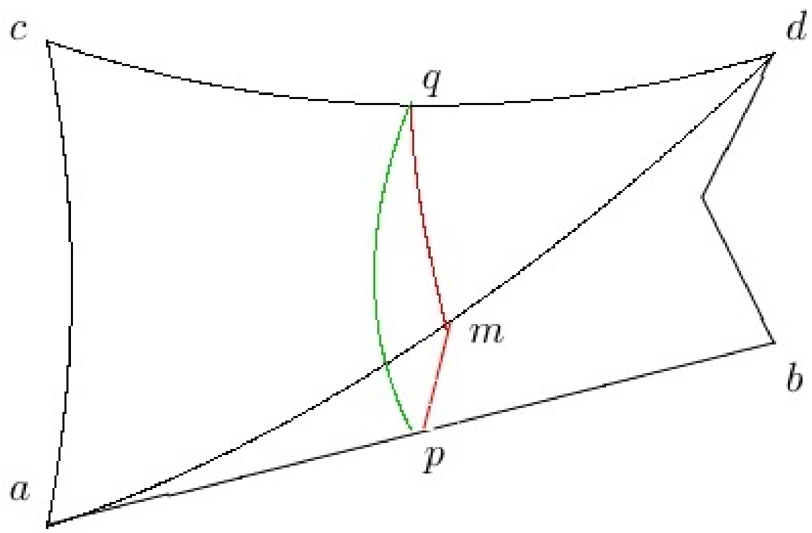
Следствие 1. *Всякое пространство X неположительной кривизны по Буземану односвязно.*

Следствие 2. *Любые две точки в пространстве X соединяются единственным отрезком.*

Следствие 3. *Всякое G-пространство неположительной кривизны по Буземану — прямое.*

Выпуклость метрики

Метрика d в пространстве неположительной кривизны по Буземану X является **выпуклой**: для любых двух отрезков $[ab]$ и $[cd]$ с параметризациями $\gamma_i : [0,1] \to X$, пропорциональными длине, функция $D : [0,1] \to \mathbb{R}$, действующая по формуле $D(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, выпукла.



Если p и q — середины, соответственно, отрезков $[ab]$ и $[cd]$, то

$$d(p,q) \leq \frac{1}{2}(d(a,c) + d(b,q)).$$

Перечень Пападопулоса

Теорема 1. (A. Papadopoulos, Metric spaces, convexity and nonpositive curvature, EMS, 2005, Proposition 8.1.2) *Пусть X — геодезическое пространство. Тогда эквивалентны следующие условия.*

1. *X — пространство неположительной кривизны по Буземану;*

2. *Для любых отрезков с аффинными параметризациями $\gamma : [a, b] \to X$ и $\gamma' : [a'b'] \to X$ функция $D_{\gamma,\gamma'}(s, t) = d(\gamma(s), \gamma'(t))$ выпукла;*

3. *Для любых отрезков с аффинными параметризациями $\gamma : [a, b] \to X$ и $\gamma' : [a'b'] \to X$ при любом $t \in [0, 1]$, если $x_t = \gamma((1-t)a + tb)$ и $x'_t = \gamma'((1-t)a' + tb')$, то*

$$d(x, x') \leq (1-t)d(\gamma(a), \gamma'(a')) + td(\gamma(b), \gamma'(b'));$$

и т.д. Полный перечень включает 11 условий.

Выпуклость и локальная выпуклость

В связи со свойствами выпуклости метрики к пространствам неположительной кривизны по Буземану иногда применяется термин "выпуклые пространства".*

Определение 3. Геодезическое пространство X называется **локально выпуклым**, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью $O(x) \subset X$, которая в индуцированной из X метрике является пространством неположительной кривизны в смысле Буземана.

Теорема 2. (M. Gromov) *Всякое полное односвязное локально выпуклое пространство является пространством неположительной кривизны по Буземану*
(см. S.B. Alexander, R.L. Bishop, Esseign. Math. **36** (1990), pp. 309–320.)

*Другой популярный термин - "Busemann spaces" (например, B. Bowditch, Minkowskian subspaces of non-positively curved metric spaces, Bull. London Math. Soc., **27** (1995), pp. 575–584.)

Вариации на тему выпуклости

Определение 4. (T. Gelander, A. Karlsson, G. Margulis (2008)) Геодезическое пространство (X,d) называется **строго выпуклым**, если для любых различных точек $x,y,z \in X$ выполняется неравенство

$$d(x,m) < \max\{d(x,y), d(x,z)\},$$

где m — середина между y и z. **Модулем выпуклости** в точке $x \in X$ строго выпуклого пространства (X,d) называется функция от двух аргументов $r, \mu > 0$

$$\delta_x(r,\mu) = \inf_{(y,z)\in A(x,r,\mu)} \{r - d(x,m)\},$$

где множество $A(x,r,\mu) \subset X \times X$ определяется условием: пара (y,z) содержится в $A(x,r,\mu)$ тогда и только тогда, когда

$$\max\{d(x,y), d(x,z)\} \leq r$$

и

$$d(y,z) \geq \mu r.$$

Строго выпуклое пространство (X,d) называется **слабо равномерно выпуклым**, если для любой точки $x \in X$ модуль выпуклости δ_x является положительной функцией.

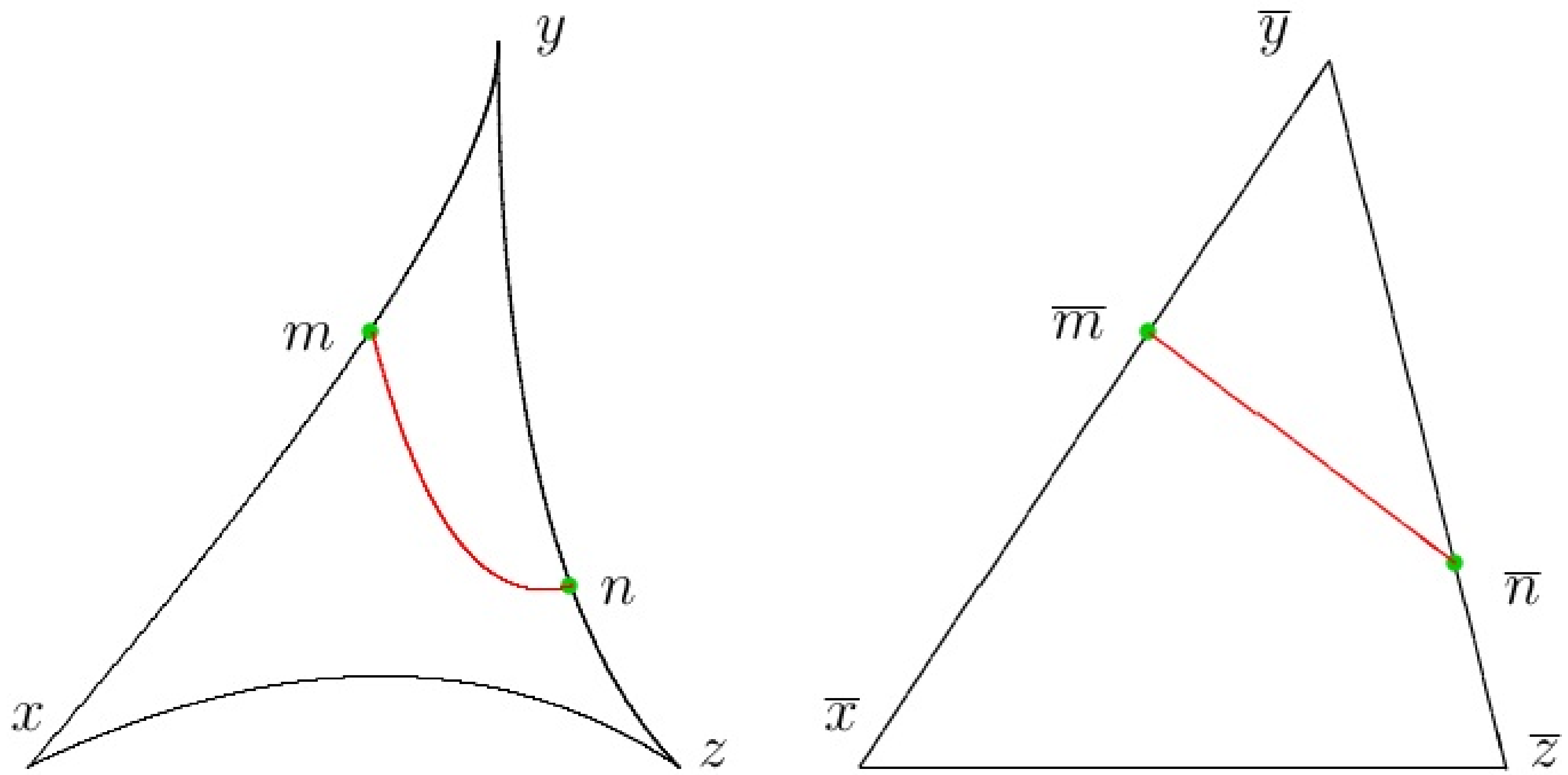
Неположительная кривизна по А.Д. Александрову

Определение 5. Пусть (X,d) — геодезическое пространство. Евклидовым треугольником сравнения для треугольника $\triangle xyz$ называется произвольный треугольник $\triangle\overline{xyz}$ на плоскости с евклидовой метрикой, для которого $|\overline{xy}| = d(x,y)$, $|\overline{xz}| = d(x,z)$ и $|\overline{yz}| = d(y,z)$.

Треугольник $\triangle xyz$ называется **тонким**, если для любой пары точек m и n на его сторонах и для соответствующих им точек $\overline{m}$ и $\overline{n}$ на соответствующих сторонах треугольника $\triangle\overline{xyz}$ выполняется неравенство

$$d(m,n) \leq |\overline{mn}|$$

(так называемое $CAT(0)$-неравенство).



Треугольник $\triangle xyz$ и соответствующий треугольник сравнения $\triangle\overline{xyz}$.

Определение 6. Геодезическое пространство X называется **пространством неположительной кривизны по А.Д. Александрову**, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, в которой всякий треугольник является тонким. Пространство X называется **пространством неположительной кривизны по А.Д. Александрову в целом***, если в X всякий треугольник является тонким.

Следствие 4. Всякое пространство неположительной кривизны по А.Д. Александрову является локально выпуклым. Всякое пространство неположительной кривизны по А.Д. Александрову в целом является пространством неположительной кривизны по Буземану.

Замечание 1. Если в качестве модельного пространства вместо евклидовой плоскости рассмаривать стандартную сферу радиуса $1/\sqrt{\kappa}$ при $\kappa > 0$ или плоскость Лобачевского кривизны κ при $\kappa < 0$, то аналогичная схема приводит к понятию пространства кривизны не больше κ (так называемых $CAT(\kappa)$-пространств).

*В этом случае часто применяется термин "$CAT(0)$-пространство". Для полного $CAT(0)$-пространства применяется также термин "пространство Адамара".

Основная теорема

Теорема 3. *Пусть X — G-пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Тогда X гомеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ при некотором натуральном n.*

Следствие 5. Всякое локально выпуклое G-пространство является n-мерным многообразием при некотором $n \in \mathbb{N}$.

План доказательства основной теоремы

Дано G-пространство неположительной кривизны по Буземану (X, d). Зафиксируем точку $p_1 \in X$. Доказательство гипотезы включает три этапа.

1. Построение, доказательство корректности определения касательного конуса $K_1 = K_{p_1}X$ и исследование его свойств;

2. Изучение свойств второго касательного конуса $K_2 = K_{p_2}K_1$;

3. Доказательство конечности цепочки конусов и гомеоморфизмов

$$X = K_0 \xrightarrow{\varphi_1} K_1 \xrightarrow{\varphi_2} K_2 \longrightarrow \dots$$

Последний конус в указанной цепочке гомеоморфен $\mathbb{R}^n$.

Касательный конус $K_{p_1}X$

Пусть (X, d) — G-пространство неположительной кривизны по Буземану, $p_1 \in X$ — отмеченная точка. Для $x \in X$ и $t > 1$ через x_t обозначается точка отрезка $[p_1 x]$, для которой $d(p_1, x_t) = d(p_1, x)/t$, через d_t — метрика на X, определённая равенством $d_t(y, z) = t \cdot d(y_t, z_t)$.

Лемма 1. Для любых $y, z \in X$ существует предел

$$d^*(y, z) = \lim_{t \to +\infty} d_t(y, z),$$

причём функция d^* является метрикой на X и $d^*(y, z) \leq d(y, z)$ для любых $y, z \in X$.

Лемма 2. Тождественное отображение $\mathrm{Id} : X \to X$ является гомеоморфизмом метрического пространства (X, d) на метрическое пространство (X, d^*).

Определение 7. Метрическое пространство (X, d^*) называется **касательным конусом** к X в точке p_1. Обозначение: $K_{p_1}X$.

Теоремы о сходимости.

Теорема 4.* Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и (X_k, d_k) — последовательность $CAT(\kappa)$-пространств. Если (X, d) является пределом по Громову-Хаусдорфу последовательности (X_k, d_k) то (X, d) — $CAT(\kappa)$-пространство.

Аналогичная теорема для пространств неположительной кривизны по Буземану неверна. Контрпример — последовательность нормированных плоскостей с нормами вида $\|(x_1, x_2)\|_n = \sqrt[n]{|x_1|^n + |x_2|^n}$, $n \geq 2$, сходящаяся к плоскости с максимум-нормой.

Но...

*см. M. Bridson, A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, p.187

Сходимость унимодулярно выпуклых последовательностей

Определение 8. Семейство (X_α, d_α), $\alpha \in A$ пространств неположительной кривизны по Буземану называется **унимодулярно выпуклым**, если каждое X_α является слабо равномерно выпуклым, причём существует такая положительная функция $m(r, \mu)$, что для модуля выпуклости $\delta_x(r, \mu)$ в произвольной точке $x \in X_\alpha$ при произвольном α выполнено неравенство

$$\delta_x(r, \mu) \geq m(r, \mu).$$

Теорема 5.* Пусть пространство (X, d) является пределом по Громову-Хаусдорфу последовательности (X_n, d_n) пространств неположительной кривизны по Буземану (с отмеченными точками в некомпактном случае). Если последовательность X_n является унимодулярно выпуклой с общей нижней границей модуля выпуклости $m(r, \mu)$, то X также является слабо равномерно выпуклым пространством, причём его модуль выпуклости в произвольной точке также ограничен снизу функцией $m(r, \mu)$.

*P.D. Andreev, Geometric constructions in the class of Busemann non-positively curved spaces, J. Math. Ph. An. Geom., **5** (2009), Th. 4.3.

Для $t > 1$ обозначим B_t единичный шар в пространстве (X, d_t) с центром p_1.

Лемма 3. Семейство метрических пространств (B_t, d_t) является унимодулярно выпуклым.

Следствие 6. Пространство $K_{p_1}X$ является пространством неположительной кривизны в смысле Буземана.

Следствие 7. Пространство $K_{p_1}X$ является G-пространством Буземана.

Итог первого этапа

Теорема 6. Пусть (X, d) — G-пространство Буземана неположительной кривизны. Тогда его касательный конус $K_{p_1}X = (X, d^*)$ в произвольной точке $p_1 \in X$ также является G-пространством Буземана неположительной кривизны, причём

- для любых $y, z \in X$ выполнено неравенство $d^*(y, z) \le d(y, z)$;
- отображение Id : $X \to X$ является гомеоморфизмом пространства (X, d) на (X, d^*);
- семейство прямых в смысле метрики d^*, проходящих через точку p_1 совпадает с аналогичным семейством прямых в смысле метрики d, причём вдоль каждой такой прямой выполняется равенство $d = d^*$;
- на пространстве (X, d^*) действует группа H положительных гомотетий с центром p_1.

Параллельные прямые

Определение 9. **Расстояние Хаусдорфа** между подмножествами $A, B \in X$ в метрическом пространстве (X, d) называется величина

$$HD(A, B) = \inf\{\varepsilon \,|\, A \subset N_\varepsilon(B), B \subset N_\varepsilon(A)\},$$

где

$$N_\varepsilon(M) = \{y \in x \,|\, \exists x \in M \,|\, d(x, y) < \varepsilon\}$$

— ε-окрестность множества M в X.

Прямые $a, b \subset X$ в геодезическом пространстве X называются **параллельными**, если расстояние Хаусдорфа между ними конечно. *

*В случае произвольного геодезического пространства параллельные в этом смысле прямые могут пересекаться, причём много раз.

Пространство параллельных в пространстве неположительной кривизны

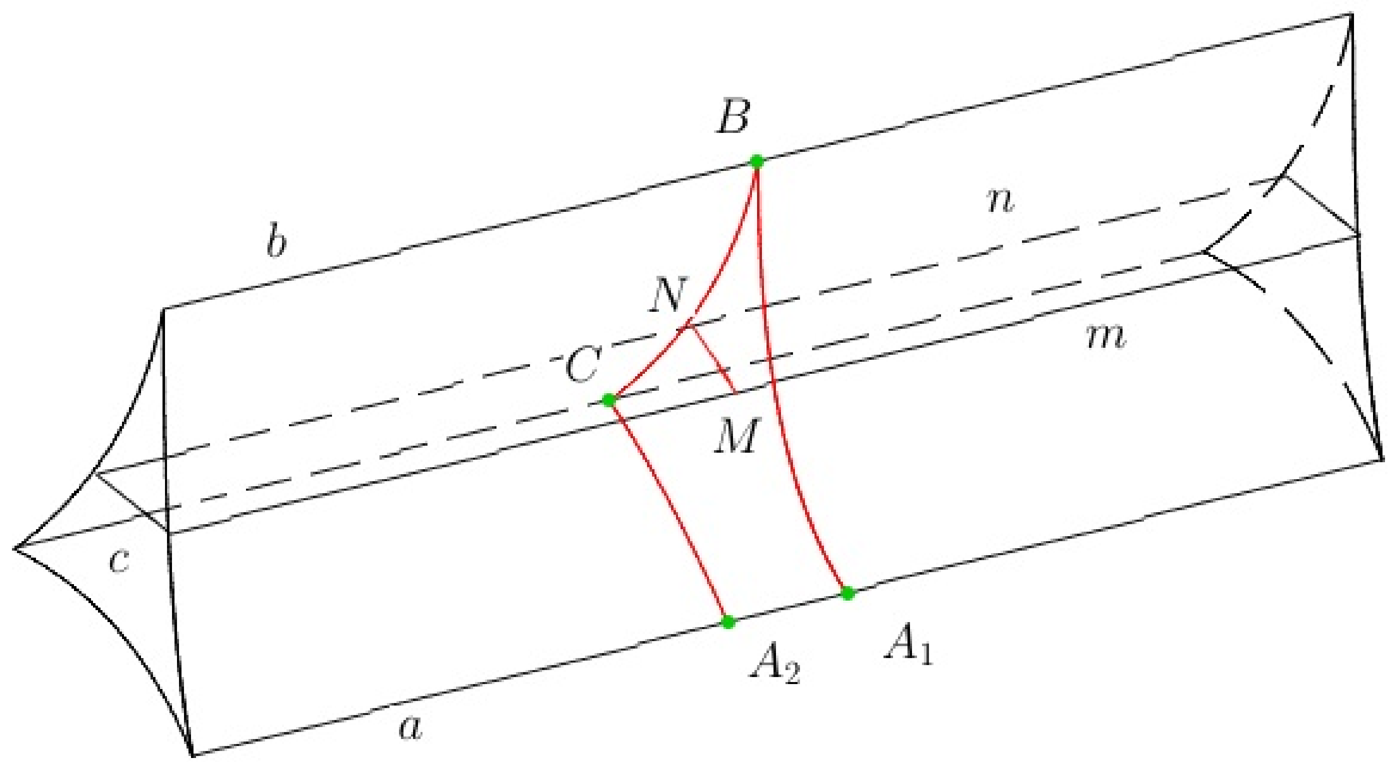
Лемма 4. (Лемма Ринова о нормированной полосе)* Пусть X — выпуклое пространство с внутренней метрикой, $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to X$ — две геодезических постоянной скорости† в X такие, что $d(\gamma_1(t)), \gamma_2(t)) \le C$, где $C \in \mathbb{R}_+$ — некоторая константа. Тогда γ_1 и γ_2 ограничивают в X полосу плоскости Минковского (выпуклое подмножество, изометричное полосе между двумя прямыми в некоторой нормированной плоскости).

*см. W. Rinow Die innere Geometrie der metrischen Raüme. Springer-Verlag, 1961. Здесь цитируется по статье B. Kleiner, The local structure of length spaces with curvature bounded above, Math. Z., **231**, 3 (1999).

†то есть две прямые линии

Пусть a — прямая линия в пространстве неположительной кривизны по Буземану X. Обозначим Y_a множество прямых в X, параллельных a.

Лемма 5. Пусть (X, d) — пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Тогда пространство (Y_a, Hd) также является пространством неположительной кривизны в смысле Буземана.



Треугольник $\triangle abc$ и его средняя линия $[mn]$ в пространстве Y_a.

Пространства конического типа

Конус $K_{p_1}X$ является пространством конического типа с вершиной p_1.

Определение 10. Пусть (X, d) — G-пространство Буземана неположительной кривизны. X называется **пространством конического типа** с **вершиной** p, если тождественное отображение $\mathrm{Id} : X \to K_pX$ пространства X на его касательный конус K_pX является изометрией.

Лемма 6. Пусть (X, d) — G-пространство Буземана неположительной кривизны. Тогда оно является пространством конического типа с вершиной $p \in X$, если и только если на X действует группа H положительных гомотетий с центром p.

Свойства касательного конуса к пространству конического типа

Теорема 7. Пусть (K, D) — прямое пространство неположительной кривизны в смысле Буземана конического типа с вершиной p, и $K_{p'}K$ — касательный конус к K в точке $p' \neq p$ с метрикой D^*. Тогда существует прямое пространство неположительной кривизны конического типа (Y, d_Y) и гомеоморфизм $\Psi : K_{p'}K \to Y \times \mathbb{R}^1$, причём выполняются следующие утверждения.

- Через каждую точку в $K_{p'}K$ проходит прямая, параллельная pp';
- Пространство Y изометрично множеству прямых в $K_{p'}K$, параллельных pp', с метрикой Хаусдорфа;
- На $K_{p'}K$ действует группа $\Gamma = H \cdot T$, где H — группа положительных гомотетий, и T — группа параллельных переносов, изоморфная $\mathbb{R}^1$;
- Группа H действует положительными гомотетиями на сомножителе Y, а T — параллельными переносами на $\mathbb{R}^1$;
- Множество вершин конуса $K_{p'}K$ есть прямая pp'.

Конечномерность G-пространств

Проблема 2.[*] Верно ли, что всякое G-пространство конечномерно (т.е. имеет конечную топологическую размерность)?

Теорема 8. (В.Н. Берестовский)[†] G-пространство, в котором существует непустая открытая область U такая, что всякий шар, содержащийся в U, является выпуклым множеством, конечномерно.

Следствие 8. Всякое G-пространство Буземана неположительной кривизны конечномерно.

[*] Г.Буземан, Геометрия геодезических, проблема (9), с. 486.

[†] В.Н. Берестовский, К проблеме конечномерности G-пространств Буземана, Сиб. Мат. Ж., XVIII, **9** (1977), Теорема 1.

Завершение доказательства Основной Теоремы.

Пусть топологическая размерность пространства (X, d) равна n.

Рассмотрим следующую цепочку пространств-конусов и гомоморфизмов:

$$X = K_0 \xrightarrow{\varphi_1} K_1 \xrightarrow{\varphi_2} K_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_n} K_{n+1}.$$

Каждое пространство K_i при $i \geq 1$ представляется как произведение $K_i = Y_i \times \mathbb{R}^{n-i}$, где Y_i — некоторое G-пространство Буземана неположительной кривизны, являющееся пространством конического типа с вершиной p_i. При этом конус $K_{p_{i+1}} Y_i$ гомеоморфен $Y_i \times \mathbb{R}$. Гомеоморфизм

$$\varphi_i : K_{i-1} = Y_{i-1} \times \mathbb{R}^{n-i} \to (Y_i \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1} = K_i$$

действует на первом сомножителе как Id : $Y_{i-1} \to K_{p_i} Y_{i-1} = Y_i \times \mathbb{R}$ и на втором сомножителе тривиально. Так как $\dim_{Top} K_{n+1} = n$, Y_{n+1} — одноточечное пространство. $\square$

Appendix

Некоторые отличия свойств неположительности кривизны

1.Центр ограниченного выпуклого подмножества

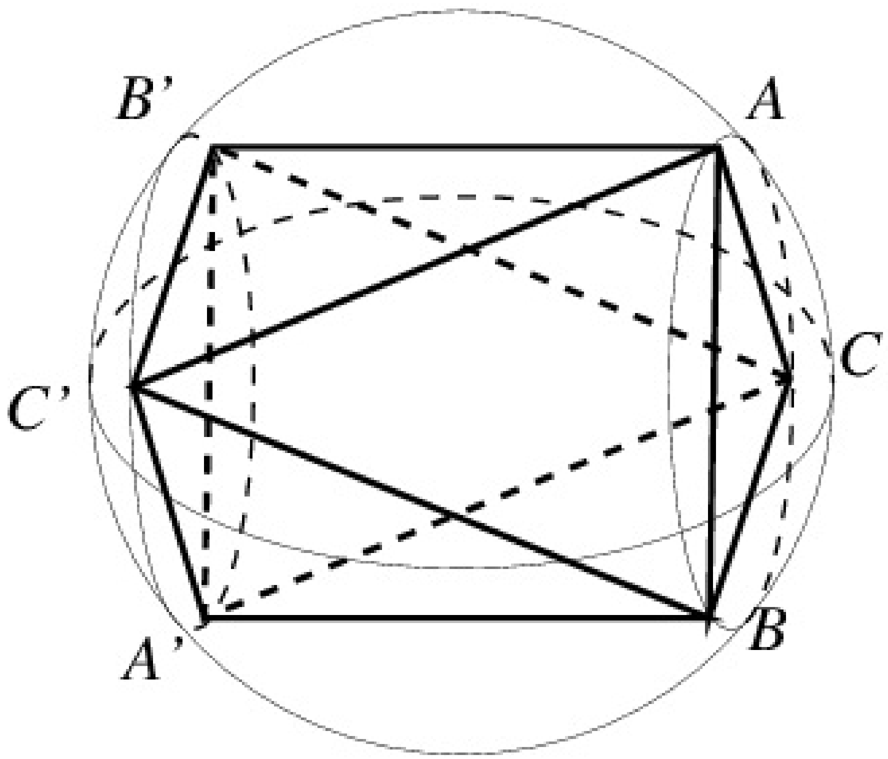
Пусть (X,d) — полное пространство неположительной кривизны по Буземану. Подмножество $A \subset X$ называется **выпуклым**, если для любых точек $a,b \in A$ отрезок $[ab]$ (который однозначно определён) содержится в A.

Теорема 9. Если A — ограниченное выпуклое подмножество в X, то однозначно определён шар наименьшего радиуса (если A — одноточечное множество, то наименьший радиус равен нулю), содержащий A.

Шар наименьшего радиуса, содержащий A, называется **описанным шаром**.

Если X является $CAT(0)$-пространством, то центр описанного шара ограниченного замкнутого выпуклого множества A содержится в A.

Но...



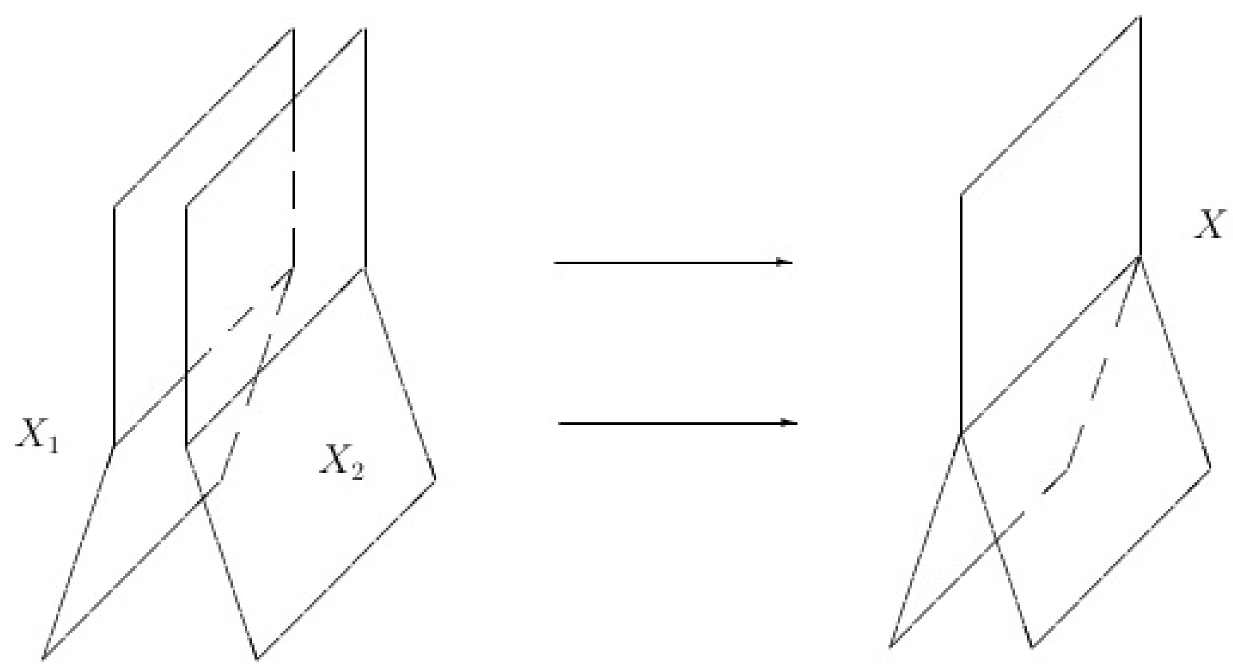
Рассмотрим трёхмерное нормированное пространство X, норма которого при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет вид

$$\|\vec{v}\| = (1-\varepsilon)\|\vec{v}\|_1 + \varepsilon\|\vec{v}\|_2,$$

где норма $\|\vec{v}\|_1$ определяется выпуклым многогранником $ABCA'B'C'$ на рисунке, а $\|\vec{v}\|_2$ — евклидова норма.

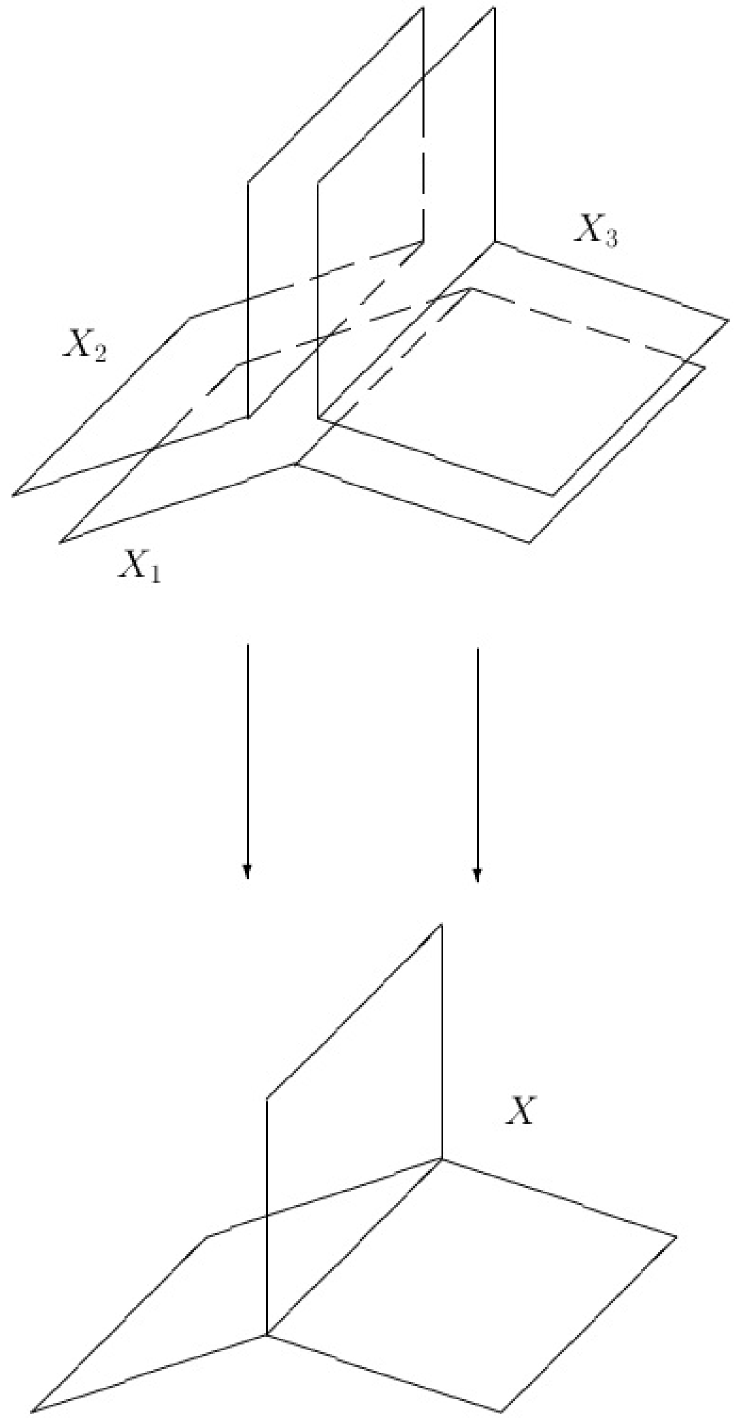
Треугольник $\triangle ABC$ ограничивает замкнутое выпуклое подмножество в X, но центр его описанного шара является внутренней точкой отрезка $[OM]$, где O — начало координат, а M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

2. Теоремы о склеивании



Теорема 10. (Ю. Г. Решетняк) Пусть $(X_i, d_i), i = \overline{1,2}$ — полные локально компактные пространства А.Д. Александрова кривизны $\leq \kappa$. Предположим, что найдутся выпуклые множества $C_i \subset X_i$ и изометрия $f : C_1 \to C_2$. Тогда пространство (X, d), полученное склеванием X_1 с X_2 по изометрии f, является пространством кривизны $\leq \kappa$.

В случае пространств неположительной кривизны по Буземану теорема, аналогичная теореме Ю.Г. Решетняка, не верна. Например, склеив по общей границе две нормированные полуплоскости с разными нормами, мы получим плоскость, не являющуюся пространством неположительной кривизны. **Но...**



Теорема 11.* Пусть $(X_i, d_i), i = \overline{1,3}$ — три пространства неположительной кривизны по Буземану, каждое из которых представлено как объединение замкнутых выпуклых подмножеств:

$$X_i = A_1 \cup B_i.$$

Пусть $g_1 : B_2 \to A_3$, $g_2 : B_3 \to A_1$ и $g_3 : B_1 \to A_2$ — такие изометрии, что $g_2 \circ g_1 \circ g_3|_{A_1 \cap B_1} = \mathrm{Id}$. Тогда пространство X, полученное как результат склеивания трёх пространств вдоль отображений g_i является пространством неположительной кривизны по Буземану.

*P.D. Andreev, Geometric constructions in the class of Busemann non-positively curved spaces, J. Math. Ph. An. Geom., 2009. v.5, №1.

3. Орифункции и функции Буземана

Пусть (X, d) — метрическое пространство с отмеченной точкой $o \in X$. Для произвольной точки $x \in X$ дистанционная функция $d_x : X \to \mathbb{R}$ определяется равенством $d_x(y) = d(x, y) - d(o, x)$.

Пусть $C(X)$ — пространство непрерывных вещественнозначных функций на X с топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах и $C^*(X) = C(X)/\mathbb{R}$ — его факторпространство по подпространству констант.

Сопоставление $x \to [d_x]$ определяет **вложение Куратовского** $i : X \to C^*(X)$. Оно не зависит от выбора отмеченной точки $o \in X$. Будем отождествлять X с его образом $i(X)$ в $C^*(X)$

Определение 11. Пусть пространство X локально компактно, но не компактно. Его **орифункциональной компактификацией** называется замыкание $\overline{X}_h = \overline{i(X)}$ в $C^*(X)$. Множество $\partial_h X = \overline{X}_h \setminus X$ называется **орифункциональной границей** X, а функции, классы которых формируют точки орифункциональной границы, — **орифункциями**. Всякая орифункция — это предельная функция для последовательности дистанционных функций d_{x_n} при удалении точек x_n в бесконечность.

В случае пространства неположительной кривизны по Буземану примером орифункций служат **функции Буземана**.

Определение 12. **Лучом** в метрическом пространстве (X, d) называется изометрическое отображение $c : \mathbb{R}_+ \to X$ числовой полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Образ отображения c мы также будем называть **лучом** и обозначать тем же символом c. Пусть c — луч в пространстве X неположительной кривизны по Буземану с $c(0) = o$. Тогда равенство

$$\beta_c(y) = \lim_{t \to +\infty} d_{c(t)}(y)$$

корректно определяет функцию $\beta_c : X \to \mathbb{R}$. Функция β_c называется **функцией Буземана** на пространстве X.

Лучи $c, c' : \mathbb{R} \to X$ называются **асимптотическими**, если существует константа $K > 0$ такая, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ верно неравенство

$$d(c(t), c'(t)) < K.$$

Теорема 12.* Пусть X — полное, локально компактное $CAT(0)$-пространство. Тогда

1. Всякая орифункция является функцией Буземана;

2. Функции Буземана, порождённые асимптотическими лучами, отличаются на константу и принадлежат одному классу в $C(X)$;

3. Тождественное отображение $\mathrm{Id} : X \to X$ продолжается до гомеоморфизма $\overline{X}_g \to \overline{X}_h$.

Здесь $\overline{X}_g$ — так называемая **геодезическая компактификация**, в которой границу $\partial_g X$ образуют классы эквивалентности асимптотических лучей.

* см. M. Bridson, A. Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature, Springer-Verlag, 1999, Chapter II-8.

Но...

Пусть X — конечномерное нормированное пространство со строго выпуклой нормой. В этом случае оно имеет неположительную кривизну по Буземану. Будем говорить, что норма пространства X **сингулярна**, если его единичная сфера не является C^1-гладкой. Направления, задаваемые радиус-векторами сингулярных точек, называются **сингулярными направлениями**.

Тогда:

1. функции Буземана, соответствуюшие параллельным лучам, идущим в сингулярном направлении, отличаются не на константу;

2. существуют орифункции, не являющиеся функциями Буземана.

3. тождественное отображение Id : $X \to X$ не продолжается до гомеоморфизма $\overline{X}_g \to \overline{X}_h$.

Но есть и совсем особые нормы...

Точки Буземана

Определение 13. Пусть (X, d) — полное локально компактное метрическое пространство, $T \subset \mathbb{R}_+$ — неограниченное подмножество, $0 \in T$. Отображение $\gamma : T \to X$ называется

1. **почти геодезическим лучом** в X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $M > 0$, что для любых $s, t \in T, s \geq t > M$ верно

$$| d(\gamma(t), \gamma(s)) + d(\gamma(0), \gamma(t)) - s| < \varepsilon.$$

2. **слабо геодезическим лучом**, если для любой точки $y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число M, что для любых $s, t \in T, s, t > M$ верно

$$|d(\gamma(t), \gamma(0)) - t| < \varepsilon$$

и

$$|d(\gamma(t), y) - d(\gamma(s), y) - (t - s)| < \varepsilon.$$

Теорема 13. (М. Риффель) Пусть X — полное, локально компактное метрическое пространство. Тогда

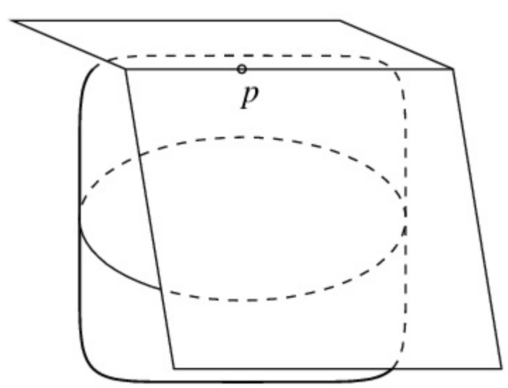
1. всякий почти геодезический луч является слабо геодезическим лучом;
2. всякий слабо геодезический луч порождает на X некоторую орифункцию;
3. если X конечно компактно и имеет счётную базу, то всякая орифункция на X порождается некоторым слабо геодезическим лучом.

Определение 14. Точка $\xi \in \partial_h X$ орифункциональной границы пространства X называется **точкой Буземана**, если она порождается некоторым почти геодезическим лучом.

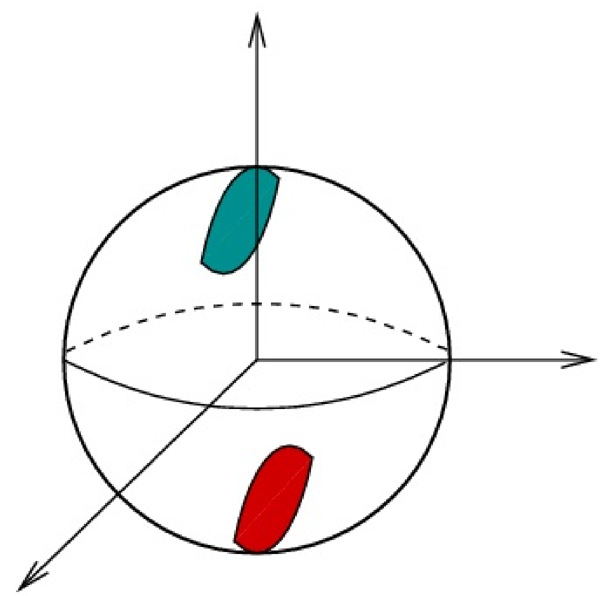
Орифункциональная компактификация n-мерного нормированного пространства X в том случае, когда все точки орифункциональной границы являются точками Буземана, описана в статье C. Walsh, Horofunction boundary of finite dimensional normed space; Math Proc. Camb. Phyl. Soc., **142** No. 3 (2007), 497–507. В этом случае пространство $\overline{X}_h$ гомеоморфно евклидову шару B^n, а граница $\partial_h X$ — сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, но при этом тождественное отображение Id : $X \to X$ в общем случае не продолжается до гомеоморфизма $\overline{X}_g \to \overline{X}_h$.

Свойство точек орифункциональной границы быть точками Буземана может не выполняться, даже если норма является строго выпуклой. Например, если единичная сфера $\mathcal{S}$ трёхмерного нормированного пространства X имеет особенность вида "точки щипка" (изолированную особенность, в которой касательный конус является двугранным углом).
Пример такой нормы:

$$N(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{(x^2+y^2)^2 + 2y^2z^2}}$$



Сфера с точкой щипка



Орифункциональная компактификация пространства с нормой N

Is this the end of the beginning
or the beginning of the end?

(Ozzy Osbourne, 2013 г.)

Где начало того конца, которым
оканчивается начало?

(Козьма Прутков, 1854 г.)

Спасибо за внимание!