

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

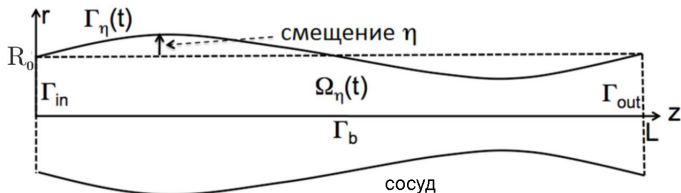
Международная конференция  
«Дни геометрии в Новосибирске, 2013»

## ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В ГЕМОДИНАМИКЕ

Барлукова Аюна, Чупахин Александр

29 августа 2013

Целью работы является анализ мат. модели течения жидкости в вязкоэластичной трубке, моделирующей кровеносный сосуд. Изучается влияние параметров модели на решение типа бегущих волн.



## Предположения

- цилиндрическая область  $\Omega_t$  зависит от времени;
- перемещение стенки происходит только вдоль радиуса  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- ось  $z$  направлена вдоль оси цилиндра. Движение осесимметрично;
- давление постоянно в каждом сечении;
- компонента скорости  $u_z$  преобладает по сравнению с  $u_x$  и  $u_y$ .

Обозначения

$P$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости,  $L$  — длина сосуда.

Уравнения 1-D нестационарной модели (полученные из уравнений Навье-Стокса путем усреднения по сечению)

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

для всех  $z \in (0, L)$  и  $t > 0$ , где неизвестными являются  $A(t, z)$  — площадь сечения,  $Q(t, z)$  — расход и  $P(t, z)$  — давление (далее  $p = P/\rho$ ).

$$A(z, t) = \int_{S(z,t)} dz, \quad Q(z, t) = \int_{S(z,t)} u_z(x, y, z, t) dx dy,$$

$$P(z, t) = (A(z, t))^{-1} \int_{S(z,t)} P(x, y, z, t) dx dy.$$

## Параметры системы уравнений (1)

$K_R$  — параметр сопротивления, зависящий от вязкости жидкости (обычно  $8\pi\nu$ ,  $\nu$  — кинематическая вязкость);  
 $\alpha$  — коэффициент Кориолиса

$$\alpha = \frac{\int_S u_z^2 d\gamma}{A\bar{u}^2} = \frac{\int_S s^2 d\gamma}{A}, \quad (2)$$

где  $s$  — закон профиля. Для случая

$$s(x) = \zeta^{-1}(\zeta + 2)(1 - x^\zeta), \quad (3)$$

и  $\zeta > 0$ , имеем  $\alpha = (\zeta + 2)(\zeta + 1)^{-1}$ .

Существуют различные варианты соотношений, связывающие движения стенки и жидкости (зависимость давления от отклонения стенки от состояния равновесия)

L. Formaggia et al. ([The generalized string model](#))

$$P - P_{ext} = \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \tilde{C}_0 \eta - \tilde{C}_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - D_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} - D_1 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2}, \quad (4)$$

$z \in (0, L), t > 0;$

L. Formaggia et al. ([The benchmark problem](#),  $D_0 = 0$ )

$$P - P_{ext} = \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \tilde{C}_0 \eta - \tilde{C}_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - D_1 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2}; \quad (5)$$

Boris Muha, Suncica Canirc ([The Koiter shell model](#))

$$P - P_{ext} = \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \tilde{C}_0 \eta - \tilde{C}_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \tilde{C}_2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + D_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} - D_1 \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2 \partial t} + D_2 \frac{\partial^5 \eta}{\partial z^4 \partial t}, \quad (6)$$

где коэффициенты  $C_i, D_i$  отвечают за механические свойства системы.

Будем использовать generalized string model с обобщенным законом упругости  $G(\eta)$ .

$$P - P_{ext} = \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \tilde{a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \tilde{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tilde{c} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2} + G(\eta). \quad (7)$$

Обозначения

$R(t, z)$  — радиус сосуда;

$R_0$  — радиус сосуда в состоянии покоя;

$\eta = R - R_0$  — отклонение положения стенки от начального состояния,  $A = \pi R^2$ ;

$G(\eta) = b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3$ ;

$\rho_w$  — плотность стенки;

$h_0$  — толщина стенки;

$\tilde{a}$  характеризует продольные напряжения стенки,  $\tilde{c}$  отвечает за вязкоупругие свойства стенки,  $\tilde{\gamma}$  характеризует взаимодействие стенки с жидкостью.

Уравнения модели (1) в терминах отклонения  $\eta$  и расхода  $q = Q/\pi$

$$\begin{aligned} & [(\eta + R_0)^2]_t + q_z = 0, \\ & q_t + \alpha \left[ \frac{q^2}{(\eta + R_0)^2} \right]_z + \frac{K_R}{\pi} \frac{q}{(\eta + R_0)^2} + \\ & + \frac{(\eta + R_0)^2}{\rho} \left( P_{ext} + \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \tilde{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tilde{a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \tilde{c} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2} + \right. \\ & \left. + G(\eta) \right)_z = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Будем искать решения в виде бегущих волн

$$\eta = \eta(\lambda), \quad q = q(\lambda), \quad \lambda = z - c_0 t, \quad (9)$$

где  $c_0$  — скорость волны. Из первого уравнения (8) получаем

$$q = q_0 + c_0[(\eta + \eta_0)^2], \quad (10)$$

где  $q_0 = const$ .

Далее подставив выражение (10) во второе уравнение (8) получаем ОДУ — основной объект исследования

$$\begin{aligned} \eta^{IV} + \frac{c_0^2 \rho_w h_0 - \tilde{a}}{c_0 \tilde{c}} \eta''' + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{c}} \eta'' + \frac{\rho K_R}{\pi c_0 \tilde{c}} \frac{(q_0 + c_0(\eta + R_0)^2)}{(\eta + R_0)^4} + \\ + \frac{\rho}{c_0 \tilde{c} (\eta + R_0)^5} \left( -2\alpha \left( c_0^2 (\eta + R_0)^4 - q_0^2 \right) + \right. \\ \left. + (\eta + R_0)^4 \left( \rho^{-1} (\eta + R_0) G'(\eta) - 2c_0^2 \right) \right) \eta' = 0. \quad (11) \end{aligned}$$



Обозначим  $\eta = x_1$ ,  $\eta' = x_2$ ,  $\eta'' = x_3$ ,  $\eta''' = x_4$ .

Соответствующая система ОДУ

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= x_3, \\x_3' &= x_4, \\x_4' &= F_0(x_1) + F_1(x_1)x_2 + \mu_3x_3 + \mu_4x_4,\end{aligned}\tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}\mu_3 &= -\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{c}}, \quad \mu_4 = -\frac{c_0\rho_w h_0 - \tilde{a}}{c_0\tilde{c}}, \\F_0(\eta) &= -\frac{K_R\rho (c_0(\eta + R_0)^2 + q_0)}{\pi\tilde{c}c_0(\eta + R_0)^4}, \\F_1(\eta) &= -\frac{\rho}{\tilde{c}c_0(\eta + R_0)^2} \left( -2c_0^2(\eta + R_0) + \frac{4\alpha c_0 (c_0(\eta + R_0)^2 + q_0)}{\eta + R_0} - \right. \\&\quad \left. - \frac{2\alpha (c_0(\eta + R_0)^2 + q_0)^2}{(\eta + R_0)^3} + \frac{(\eta + R_0)^2 G'(\eta)}{\rho} \right).\end{aligned}\tag{13}$$

Найдем состояния равновесия — особые точки системы (12)

$$\begin{aligned}x_2 = x_3 = x_4 = 0, \\ F_0(\eta) = 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Поскольку  $R = \eta + R_0 > 0$  получаем одну особую точку

$$\eta_* = -R_0 + \sqrt{-\frac{q_0}{c_0}}.\tag{15}$$

Замечание: Уравнение (11) и система (12) имеют особую точку при  $\eta + R_0 = 0$ . Она является сильно вырожденной и отвечает предельному стенозу сосуда  $R = 0$ . Можно считать, что анализ ведется вдали от этой точки.

Матрица линеаризации системы (12) выглядит следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ F'_0(\eta_*) & F_1(\eta_*) & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Характеристическое уравнение матрицы (16)

$$k^4 - \mu_4 k^3 - \mu_3 k^2 - F_1(\eta_*) k - F'_0(\eta_*) = 0. \quad (17)$$

1) **Случай чисто мнимых корней.**

Интегральные кривые линеаризации в фазовом пространстве лежат внутри компактного многообразия.

Пусть  $\pm i\beta_1$  и  $\pm i\beta_2$  — корни уравнения (17). Воспользовавшись Т. Виета получаем, что

$$\mu_4 = 0, \quad F_1(\eta_*) = 0. \quad (18)$$

Из условий (18) получаем соотношения на параметры

$$a = c_0^2 \rho_w h_0, \quad b = -2 \frac{c_0^3}{q_0} \rho \sqrt{-\frac{q_0}{c_0}}. \quad (19)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4 - \mu_3 k^2 - F_0'(\eta_*) = 0. \quad (20)$$

В этом случае  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  (дивергенция в силу системы) — объем в фазовом пространстве сохраняется.

Используя теорему Виета для  $\beta_i$  и то что  $\beta_{1,2} \in \mathbb{R}_+$  получаем еще одно соотношение на параметры задачи

$$\frac{8K_R\rho c}{\pi\gamma^2} < \left(-\frac{q_0}{c_0}\right)^{3/2}, \quad (21)$$

2) Если соотношение (21) не выполняется, то характеристическое уравнение (20) имеет 4 комплексных корня вида  $\pm\alpha \pm i\beta$ , где  $\alpha \neq 0$ .

При заданных параметрах  $K_R, \rho, c, \gamma$

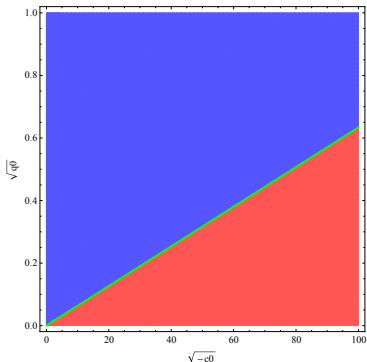


Рис.1. Четверть параметров  $q_0 > 0, c_0 < 0$ .

Мы имеем 4 чисто мнимых корня уравнения (20) в плоскости параметров  $q_0, c_0$ , обозначенной синим цветом. В области, обозначенной красным цветом лежат фокусы. Давление в этом случае выражается

$$P = P_{ext} + b\eta + c_0\tilde{\gamma}\eta' + c_0\tilde{c}\eta'''. \quad (22)$$

# Численный эксперимент

## Значения параметров (система единиц СГС)

$\rho = 1$	плотность жидкости
$R_0 = 0.5$	начальный радиус сосуда
$h_0 = 0.01$	толщина стенки
$\rho_w = 1.1$	плотность стенки
$\alpha = 1$	коэффициент Кориолиса
$G(\eta) = b\eta$	функция, задающая упругую реакцию стенки
$k_R = 1$	коэффициент сопротивления
$P_{ext} = 1$	внешнее давление

Если задавать начальные данные в окрестности ОТ, получаем осциллирующее решение (состояние равновесия неустойчивое).

начальные данные

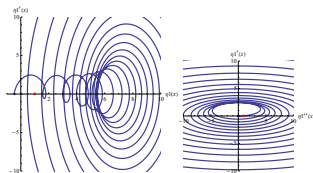
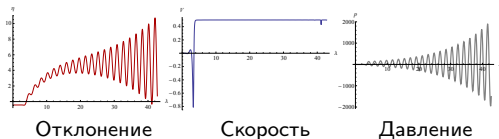
$$\eta(0) = \eta_*, \eta'(0) = 0.0001, \eta''(0) = 0, \eta'''(0) = 0$$

$$c_0 = 0.5, q_0 = -0.002, \gamma = 100, \eta_* = -0.436754$$

$c = 8.9$  — область фокусов.

$$k_1 = -2.36613 - 3.34911I, k_2 = -2.36613 + 3.34911I,$$

$$k_3 = 2.36613 - 3.34911I, k_4 = 2.36613 + 3.34911I$$



Проекция в фазовом пространстве

Рис.2. Осциллирующее решение (область фокусов).



В области центров получаем решения близкие к периодическим.

Начальные данные

$$\eta(0) = \eta_*, \eta'(0) = 0.0001, \eta''(0) = 0, \eta'''(0) = 0$$

$$c_0 = 0.5, q_0 = -0.002, \gamma = 100, \eta_* = -0.436754$$

$c = 0.1$  — область центров,  $k_1 = 0. - 5.08251I$ ,  $k_2 = 0. + 5.08251I$ ,  
 $k_3 = 0. - 31.2117I$ ,  $k_4 = 0. + 31.2117I$



Рис.3. Периодическое решение (область центров).

При  $\frac{8K_R\rho c}{\pi\gamma^2} \ll \left(-\frac{q_0}{c_0}\right)^{3/2}$  параметр  $c$  слабо влияет на поведение функции  $\eta$

При  $\frac{8K_R\rho c}{\pi\gamma^2} \approx \left(-\frac{q_0}{c_0}\right)^{3/2}$  — то есть вблизи границы, разделяющей области центров и фокусов, влияние  $c$  увеличивается.

$c_0 = 0.5$ ,  $q_0 = -0.002$ ,  $\gamma = 100$ ,  $\eta_* = -0.436754$

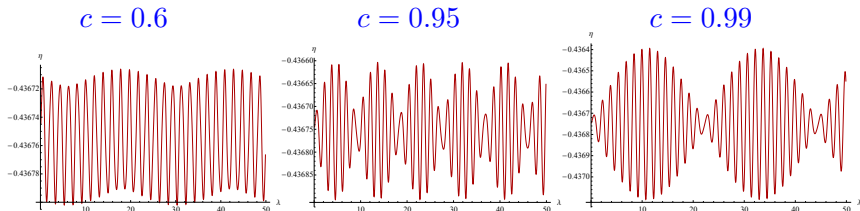
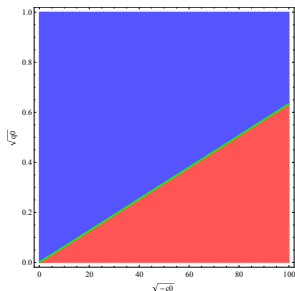


Рис.4. Отклонение. Область центров.

## Заключение

- 1) Модель 1-D гемодинамики имеет как осциллирующие, так и решения близкие к периодическим.
- 2) Поведение модели качественно воспроизводит реальное поведение сосуда.
- 3) Механические свойства стенки слабо влияют на решение в области центров, их влияние увеличивается вблизи границы между областями центров и фокусов.



Четверть параметров  $q_0 > 0$ ,  $c_0 < 0$ .

*Спасибо за внимание!*