Чуешева Надежда Александровна

Кемерово, Кемеровский госуниверситет

§1. НЕСКОЛЬКО ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тезисы конференции "дни геометрии Новосибирск 2013 год.

Рассмотрим в области
$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,1)\}$
с кусочно-гладкой границей дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + cu_x + du + eu_t = f(x,t) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u|_{t=0,\ t=1} = 0,$$
$$u|_{x=0,\ x=1} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0,\ x=1} = 0. \quad (2)$$

Граничные задачи для таких уравнений рассматривали многие авторы. Например, Д. Аманов, В.Н. Врагов, А.А. Дезин, Г.В. Демиденко, Ю.А. Дубинский, И.Е. Егоров, А.И. Кожанов, В.П., Михайлов, С.Г. Пятков, Ж.А. Отарова, Г.А. Свиридюк.

Теорема 1. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$.

Пусть существуют постоянные $\varepsilon > 0, \delta > 0$ (ε - мало) такие, что для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:

1) $a \geq 0, \quad b > 0;$

2) $(b-\varepsilon)\frac{\pi}{8} - d \geq \delta > 0.$

Тогда решение $u(x,t)$ задачи (1), (2) из пространства $H^{2,1}(D)$ существует и единственное.

Норма в $H^{2,1}(D)$ задается равенством $\|u\|_{H^{2,1}(D)} = \left(\int\limits_D \left(u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_t^2\right) dD\right)^{\frac{1}{2}}.$

Пример неединственности решения задачи (1), (2).

В области

$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,\pi)\}$

рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + 4u_{xxx} + 3u_{xx} + 4u_x + 5u = 0 \qquad (3)$$

с граничными условиями

$$u|_{t=0,\ t=\pi} = 0,$$

$$u|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \qquad (4)$$

Функции

$$u(x,y) \equiv 0, \quad u(x,y) = \sin t \sin x$$

удовлетворяют краевым условиям (4) и уравнению (3).

Заметим, что не выполняется условие 2) на коэффициенты уравнения (1) в теореме.

Пусть теперь решение уравнения (1) удовлетворяет на границе условиям:

$$u\big|_{t=0,\ t=1} = 0, \quad u\big|_{x=0,\ x=1} = 0, \quad u_x\big|_{x=0,\ x=1} = 0. \quad (2')$$

Тогда будет верна

Теорема 2. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть существует постоянная $\delta > 0$ такая, что для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:

1) $b > 0$;

2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0.$

Тогда решение $u(x,t)$ задачи $(1),(2')$ из пространства $H^{2,1}(D)$ существует и единственное.

Пример 1. В области

$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in (0,\pi), \quad t \in (0, \frac{1}{2})\}$

рассмотрим уравнение

$$(1-t)^2 u_{tt} - u_{xxxx} + a(x,t)u_{xxx} - u_{xx} + a(x,t)u_x +$$
$$+\frac{3}{4}u + (1-t)u_t = \frac{3}{4}\sin\left(1 - \frac{t}{2}\right) \quad (5)$$

с начально-краевыми условиями

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \tag{6}$$

Коэффициент $a(x,t)$ и правая часть в уравнении (5) - аналитические функции в $\overline{D}$.

Решением задачи (5), (6) будет функция

$$u(x,t) = \left((1-t)^{\frac{3}{2}} - (1 - \frac{3}{2}t)\right)\sin x,$$

которая не принадлежит классу функций $W_2^2(D)$.

Пример 2. В области
$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,1)\}$
рассмотрим уравнение

$$u^n_{tt} - u^n_{xxxx} + u^n_{xx} + u^n_t = 0 \tag{7}$$

с начально-краевыми условиями

$$u^n|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^5}, \quad u^n_t|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^3},$$

$$u^n|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad u^n_{xx}|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \tag{8}$$

Неустойчивым решением задачи (7), (8) будет функция

$$u^n(x,t) = \frac{e^{n^2 t} \ \sin nx}{n^5}.$$

В работе [10] найдено решение для нелинейного уравнения следующего вида

$$u_{xxxxxx}(x,t) + 15\ u_x(x,t)\cdot u_{xxxx}(x,t) +$$

$$+15\ u_{xx}(x,t)\cdot u_{xxx}(x,t)+45\ \ (u_x(x,t))^2\cdot u_{xx}(x,t)-$$
$$-5\ u_{xxxt}-15\ u_x(x,t)\cdot u_{xt}(x,t)-$$
$$-15\ u_t(x,t)\cdot u_{xx}(x,t)-5\ u_{tt}(x,t)=0,$$

Решением этого уравнения будет функция

$$u(x,t)=c_3-$$
$$-2c_2\tanh\left(-c_1-c_2x-4\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\sqrt{5}\right)c_2^3t\right).$$

Рассмотрим аналогичное уравнение четвертого порядка с произвольными коэффициентами.

Задача 1.

$$a\ u_x(x,t)\cdot u_{xxxx}(x,t)+b\ u_{xx}(x,t)\cdot u_{xxx}(x,t)+$$
$$+c\ \ (u_x(x,t))^2\cdot u_{xx}(x,t)+$$
$$+d\ u_x(x,t)\cdot u_{xt}(x,t)+e\ u_t(x,t)\cdot u_{xx}(x,t)=0,$$

a,b,c,d,e **- вещественные постоянные и**

$$c\neq 0, d+e\neq 0.$$

Функция

$$u(x,t)=c_3-$$
$$-\frac{6c_2(b+2a)\ \ \tanh\left(-c_1-c_2x+\frac{4(c_2)^3(a+b)t}{d+e}\right)}{c}$$

- решение этого уравнения.

Задача 2. Интересное дифференциальное уравнение в работе В.К. Белошапка [4]

$$u_x(x,t)\cdot u_t(x,t)\left(u_{xxt}(x,t)\cdot\ u_t(x,t)-\right.$$
$$\left.-u_{xtt}(x,t)\cdot\ u_x(x,t)\right)+$$
$$+u_{xt}(x,t)\Big((u_x(x,t))^2\cdot u_{tt}(x,t)-$$
$$-\left(u_t(x,t)\right)^2\cdot u_{xx}(x,t)\Big)=0. \tag{9}$$

Функция

$$u(x,t)=c+\tanh\left(d+ax+bt\right)$$

- решение этого уравнения. Здесь $(c,d,a,b\in\mathbb{R})$.

Задача 3. Заметим, что уравнение

$$e^{-y}+\sqrt{2}\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

имеет бесконечно много решений на луче $[0,\ \infty)$. **Рассмотрим у этого уравнения два решения**

0 **и** y_0, **где** $y_0\in\left(\pi+\frac{\pi}{4},\ \pi+\frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть в полосе

$$\Pi=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad x+t=0,\quad x+t=y_0\right\}$$

задано уравнение (9).

На границе полосы зададим нулевые граничные условия

$$u|_{x+t=0}=0,\ \ u_x|_{x+t=0}=0,\ \ u_t|_{x+t=0}=0,$$

$$u|_{x+t=y_0} = 0. \tag{10}$$

Задача (9), (10) имеет ненулевое решение

$$u(x,y) = e^{-(x+t)} + \sqrt{2}\sin\left((x+t) - \frac{\pi}{4}\right).$$

Литература

[1] Аманов, Д. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка./Д. Аманов //Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Международная конференция, посвященная 100 - летию со дня рождения академика Ильи Несторовича Векуа, Новосибирск, 28 мая - 2 июня, 2007: Тезисы докладов. Новосибирск. НГУ.- 2007.- с 61.

[2] Аманов, Д. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка./Д. Аманов , Ж. А.Отарова // Узб. мат. ж.- 2008. -№ 3.- с 13-22.

[3] Аманов, Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка./ Д. Аманов , А. В. Юлдашева // Узб. мат. ж.- 2007.- № 4.- с 3-8.

[4] Белошапка В. К. Об аналитической сложности функций двух переменных, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 14 No. 3, 243–249 (2007)

[5] Березанский Ю. М. Разложение по соб-

ственным функциям самосопряженных операторов. / Ю. М. Березанский - Киев: Наукова думка, 1965. - 800 с.

[6] Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики Новосибирск: Новосибирский университет, (1983).

[7] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

[8] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. // Новосибирск: Изд-во Наука. 2000. 336 с.

[9] Кожанов А.И.Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка. // Новосибирск: Изд-во Носиб. ун-та. 1990. 132 с.

[7] Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка./Ж. А. Отарова // Uzbek. Math. J.- 2008.- № 2.- с 74-80.

[8] Терехов А. Н. Краевая задача для управления смешанного типа.// Применение методов функционального анализа к задачам ма-

тематической физики и вычислительной математики: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. - Новосибирск, 1979. - С. 128-137.

[8] Чуешева Н. А. Об одной смешанной задаче для уравнения 4-го порядка. / Н. А. Чуешева // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: Сб. науч. тр. АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. - Новосибирск, 1979. - с 146-151.

[9] Wang Yan Ding. The existence and non-existence of global solutions for a nonlinear wave equation. /Wang Yan Ding.// Math. Res. and expo.- 2009.29.- №1. - с 164-168.

[10]I. E. Inan, "(G'/G) -Expansion Method for Traveling Wave Solutions of the Sixth-Order Ramani Equation", *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, 7, No. 1, 51–57 (2010).

§2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА.

Максимова Е. В., Чуешева Н. А.

Вестник КемГУ, вып 3/1 (47), Кемерово, 2011 г., с. 266-268.

В области

$$D = \{(x,t) \in R^2, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,1)\}$$

рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + cu_x + du + eu_t = f(x,t). \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u\big|_{t=0,\ t=1} = 0,$$
$$u\big|_{x=0,\ x=1} = 0, \quad u_x\big|_{x=0,\ x=1} = 0. \qquad (2)$$

Введём некоторые обозначения. Через C_L обозначим класс функций из пространства $C^\infty(\overline{D})$, удовлетворяющих граничным условиям (2). Через $H^{4,2}(D)$ обозначим пространство, полученное замыканием пространства C_L по норме $\|u\|_{H^{4,2}(D)} = \left(\int\limits_D \left(u^2 + u_x^2 + u_t^2 + u_{xx}^2 + u_{tt}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxt}^2 + u_{xxxx}^2\right) dD\right)^{\frac{1}{2}}.$

Лемма 1. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:
1) $b \geq 0$; **2)** $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$.
Тогда для решения задачи (1), (2) верна априорная оценка:

$$\|u\|^2_{L_2(D)} + \|u_t\|^2_{L_2(D)} + \|u_{xx}\|^2_{L_2(D)} \leq C\|f\|^2_{L_2(D)}.$$

Замечание. Из леммы 1 следует, что функции $u(x,t),\ u_{xx}(x,t),\ u_t(x,t) \in L_2(D)$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} =$$

$$= f(x,t) - bu_{xx} - cu_x - du - eu_t = f_1(x,t), \qquad (3)$$

где $f_1(x,t) \in L_2(D)$.

Лемма 2. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:
1) $a \geq 0, \quad b \geq 0;$ **2)** $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0.$

Тогда для решения задачи (1), (2) верны априорные оценки:

$$\|u_{txx}\|^2_{L_2(D)} + \|u_{xxxx}\|^2_{L_2(D)} \leq 4\|f_1\|^2_{L_2(D)}.$$

$$\|u_{tt}\|^2_{L_2(D)} \leq \|f_1\|^2_{L_2(D)}.$$

Доказательство леммы 1 и леммы 2 проводится методом интегрирования по частям с применением мультипликативных неравенств.

Теорема единственности. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:
1) $a \geq 0, \quad b \geq 0;$ **2)** $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0.$

Тогда решение задачи (1), (2) из пространства $H^{4,2}(D)$ единственно.

Задача 5. В области

$$D = \{(x,t) \in R^2, \quad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,\pi)\}$$

рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + au_x + (b+2)u = 0. \quad (4)$$

с граничными условиями

$$u\big|_{t=0,\ t=\pi} = 0,$$

$$u\big|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad u_x\big|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \quad (5)$$

Решение поставленной задачи будет не единственным. Помимо нулевого решения этой задачи, не нулевая в этой области функция $u(x,y) = \sin t \sin x$ **удовлетворяет краевым условиям (5) и уравнению (4).**

Задача 6. В области

$$D = \{(x,t) \in R^2, \quad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,\pi)\}$$

рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + au_x + (b+2)u = 0. \quad (6)$$

с граничными условиями

$$u\big|_{t=0,\ t=\pi} = 0,$$

$$u_x\big|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad u_{xxx}\big|_{x=0,\ x=\pi} = 0. \quad (7)$$

Решение поставленной задачи будет не единственным. Помимо нулевого решения этой задачи, не нулевая в этой области функция

$$u(x,y) = \sin t \cos x$$

удовлетворяет краевым условиям (7) и уравнению (6).

Теорема существования. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:
1) $a \geq 0, \quad b \geq 0; \quad$ 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$.

Тогда решение задачи (1), (2) из пространства $H^{4,2}(D)$ существует.

Доказательство. Доказывать существование решения задачи (1), (2) будем методом Галеркина с выбором специального базиса. То есть приближенное решение этой задачи ищем в виде

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im} w_i(x,t),$$

где $w_i(x,t)$– собственные функции следующей задачи

$$Pw_i(x,t) = w_{ixxxx}(x,t) - w_{itt}(x,t) = \lambda_i w_i(x,t),$$

$k = 1, 2, ...,$

$$w_i(x,t)\big|_{t=0,\ t=1} = 0,$$

$$w_i(x,t)\big|_{x=0,\ x=1} = 0, \quad w_{ix}(x,t)\big|_{x=0,\ x=1} = 0.$$

В [2] показано, что в пространстве $H^{4,2}(D)$ существует счетная полная система собственных функций оператора P. Коэффициенты g_{im} находятся из системы алгебраических уравнений

$$(u_{mtt} - u_{mxxxx} + au_{mxxx} + bu_{mxx} + cu_{mx} + du_m +$$
$$+eu_{mt}, w_j) = (f(x,t), w_j)\,, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Аналогично как в леммах, можно получить равномерные по m оценки. Тогда из семейства функций $\{u_m(x,t)\}$ можно выделить такую подпоследовательность, что $u_m(x,t) \to u(x,t)$ слабо в пространстве $H^{4,2}(D)$. Предельная функция будет слабым решением поставленной задачи.

Литература

[1] Аманов, Д. *Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка.* /Д. Аманов //Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Международная конференция, посвященная 100 - летию со дня рождения академика Ильи Несторовича Векуа, Новосибирск, 28 мая - 2 июня, 2007: Тезисы докладов. Новосибирск. НГУ.– 2007.– С. 61.

[2] Аманов, Д. *Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка.* /Д. Аманов , Ж. А. Отарова // Узб. мат. ж.– 2008.– № 3.– С. 13–22.

[3] **Аманов, Д.** *Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка.*/ **Д. Аманов , А. В. Юлдашева // Узб. мат. ж.– 2007.– № 4.– С. 3–8.**

[4] **Березанский Ю. М.** *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* / **Ю. М. Березанский – Киев: Наукова думка, 1965 – 800 с.**

[5] **Отарова Ж. А.** *Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка.*/**Ж. А. Отарова // Uzbek. Math. J.– 2008.– № 2.– С. 74–80.**

[6] **Чуешева Н. А.** *Об одной смешанной задаче для уравнения 4-го порядка.* / **Н. А. Чуешева // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: Сб. науч. тр. АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. - Новосибирск. –1979. – С. 146–151.**

§3. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Пусть Ω - ограниченная односвязная область в пространстве R^n переменной $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

с достаточно гладкой границей Γ_1 **, цилиндрическая область** $G = \Omega \times (0, X)$ **с границей** Γ **, цилиндрическая область** $Q = G \times (0, T)$ **с боковой границей** $\Sigma = \Gamma \times [0, T]$.

Пусть в области Q **задано уравнение**

$$Pu \equiv -\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + k(x, y, t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial t} - Lu+$$
$$+|u|^\rho u = f(x, y, t), \qquad (1)$$

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial y_i},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq M \mid \xi \mid^2, M > 0, \xi \in R^n,$$

$$k(x, y, t) \geq 0, a_{ij}(y) = a_{ji}(y), (x, y, t) \in Q.$$

Обозначим через $\gamma = \left\{(x, y, 0) \in \overline{Q} : k(x, y, 0) > 0\right\}$.

Краевая задача. *Найти решение уравнения (1) в области* Q *, удовлетворяющее граничным условиям*

$$u|_\Sigma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=X} = \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=X} =$$
$$= u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\overline{\gamma}} = 0. \qquad (2)$$

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия :*

1. Коэффициенты дифференциального оператора P принадлежат пространству $C^3(\overline{Q})$;

2. Пусть существует константа $\lambda_0 \geq 0$ такая, что выполнено неравенство

$$2a(x,y,t) - \frac{\partial k(x,y,t)}{\partial t} + \lambda_0 k(x,y,t) \geq \delta > 0;$$

3. $2a(x,y,t) - \left|\frac{\partial k(x,y,t)}{\partial t}\right| \geq \delta > 0;$

4. $\rho \leq \frac{2}{n-1}$ *при* $n \geq 2$, ρ *- любое при* $n = 1$;

5. Правая часть уравнения (1) - функция $f(x,y,t)$ такая, что

$$f(x,y,t) \in L_2(Q), \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} \in L_2(Q), f(x,y,0) = 0.$$

Тогда существует и притом единственное решение граничной задачи (2) для уравнения (1) из пространства $H_2^6(Q)$.

Доказательство. Методом "ε"- регуляризации [1] докажем существование решения граничной задачи для "ε" регуляризированного уравнения. При $\varepsilon > 0$ решение задачи будем искать методом Фаэдо-Галёркина с выбором специального базиса. Учитывая равномерные по ε априорные оценки, в пределе $(\varepsilon \to +0)$получим утверждение теоремы.

Пример 1. **В области**

$$Q = \{(x, y, t) : x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), t \in (0, 1)\}$$

рассмотрим уравнение

$$-\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + (1-t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - 2u = \frac{3}{4}\sin y \sin x \quad (4)$$

с граничными условиями

$$u|_{\Sigma} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=\pi} = \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=\pi} =$$

$$= u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Для коэффициентов уравнения (4) при

$$a(x, y, t) = \frac{1}{2}, k(x, y, t) = 1 - t$$

выполнено второе условие теоремы:

$$2a(x, y, t) - \frac{\partial k(x, y, t)}{\partial t} + \lambda_0 k(x, y, t) =$$

$$= 2\frac{1}{2} - (-1) + (1-t)\lambda_0 > 0.$$

Однако не выполнено третье условие теоремы:

$$2a(x, y, t) - \left|\frac{\partial k(x, y, t)}{\partial t}\right| = 2\frac{1}{2} - |-1| = 0.$$

Функция

$$u(x, y, t) = \left[(1-t)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{3}{2}t - 1\right)\right]\sin y \sin x \qquad (6)$$

удовлетворяет граничным условиям (5) и удовлетворяет уравнению (4). Но функция (6) не принадлежит пространству $H_2^6(Q)$, хотя правая часть уравнения (4) является даже аналитической функцией.

Пример 2. В области

$$Q = \{(x, y, t) : x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), t \in (0, 1)\}$$

рассмотрим уравнение

$$-\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + t\frac{\partial u}{\partial t} + (t^2 - 26)u = 0 \qquad (7)$$

с граничными условиями
($k(x, y, 0) = 0$, γ - пустое множество)

$$u\big|_{\Sigma} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=\pi} = \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=\pi} =$$
$$= u\big|_{t=0} = 0. \qquad (8)$$

Для коэффициентов уравнения (7) при $a(x, y, t) = t, k(x, y, t) = t^2$

$$2a(x, y, t) - \frac{\partial k(x, y, t)}{\partial t} = 0.$$

Функция

$$u(x, y, t) =$$
$$= t^4 \sin 3y \sin x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n!(n + 4)!} \qquad (9)$$

удовлетворяет граничным условиям (8) и удовлетворяет уравнению (7). Но эта функция - не нулевое решение задачи (7), (8).

Пример 3. В области

$$Q = \{(x, y, t) : x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), t \in (0, 1)\}$$

рассмотрим уравнение

$$-\frac{\partial^6 u^n}{\partial x^6} + k(x, y, t)\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} +$$

$$+a(x, y, t)\frac{1}{2}\frac{\partial u^n}{\partial t} + b(x, y, t)u^n = 0 \tag{9}$$

с краевыми условиями

$$u^n\big|_{x=0} = u^n\big|_{x=\pi} = u^n\big|_{y=0} = u^n\big|_{y=\pi} =$$

$$= \left.\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}\right|_{x=\pi} = \left.\frac{\partial^4 u^n}{\partial x^4}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^4 u^n}{\partial x^4}\right|_{x=\pi} = 0, \tag{10}$$

с начальными условиями

$$u^n\big|_{t=0} = \frac{\sin n^m x \sin n^p y}{n^q},$$

$$\left.\frac{\partial u^n}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\sin n^m x \sin n^p y}{n^q}. \tag{11}$$

Пусть для коэффициентов уравнения (9) и натуральных чисел p, q, n, m выполнены условия

1. $a(x, y, t) + k(x, y, t) + b(x, y, t) = 0.$
2. $q \geq 6m,\ 3m = p.$

Тогда неустойчивым нулевым решением поставленной задачи (9), (10), (11) будет функция

$$u^n = \frac{e^t \sin n^m x \sin n^p y}{n^q}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. - Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1983. - 84 с.

[2] Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

[3] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. // Новосибирск: Изд-во Наука. 2000. 336 с.

[4] Кожанов А.И. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка. // Новосибирск: Изд-во Носиб. ун-та. 1990. 132 с.

[5] Терехов А. Н. Краевая задача для управления смешанного типа.// Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-

ние, Ин-т математики. - Новосибирск, 1979. - С. 128-137.

[6] Чуешева Н. А. Об одной смешанной задаче для уравнения 4-го порядка. // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. - Новосибирск, 1979. - С. 146-151.

§4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА.

(2007 год 100 лет Векуа) с357-358.

Пусть в области $D = \{(x, y, t) : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < t < a\}$

задано уравнение

$$-u_{ttt} + u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{xx} + u_{yy} + u_{tt} - u_t = f(x, y, t) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = u_t|_{t=a} = u|_{x=0,x=\pi} = u|_{y=0,y=\pi} = 0;$$
$$u_{xx}|_{x=0,x=\pi} = u_{yy}|_{y=0,y=\pi} = 0. \quad (2)$$

Теорема. Пусть правая часть уравнения (1) - функция $f(x, y) \in L_2(D)$. Число $a > 0$ - мало. Тогда существует и притом единственное решение краевой задачи (2) для уравнения (1), принадлежащее пространству $H(D)$.

Здесь пространство $H(D)$ является замыканием класса функций пространства $C^\infty(\overline{D})$, удовлетворяющих краевым условиям (2). Норма в этом пространстве задаётся равенством

$$\|u\|^2_{H(D)} = \int\limits_D (u^2_{xx} + u^2_{yy} + u^2_{tt}(a-t) + u^2_t + u^2)dD.$$

Для доказательства этой теоремы использовалась комбинация методов, например, как в [1],[2], [3].

Интересен вопрос, будет ли корректна эта краевая задача для этого уравнения. Оказывается, что можно в этом случае построить пример неединственности решения такой задачи для уравнения

$$-u_{ttt} + u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{xx} + u_{yy} + u_{tt} - u_t = 0$$

в области $D = \{(x,y,t) : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < t < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\}$ с краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = u_t|_{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} = 0u|_{x=0,x=\pi} = u|_{y=0,y=\pi} =$$

$$u_{xx}|_{x=0,x=/pi} = u_{yy}|_{y=0,y=\pi} = 0.$$

Не нулевым решением такой задачи будет

$$u = (\sqrt{3} + e^{\frac{t}{2}}(sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)) \cdot sinx \cdot siny.$$

Аналогично как в [4] можно построить пример неустойчивости решения уравнения

$$-u^n_{ttt}+u^n_{xxxx}+au^n_{yyyy}+bu^n_{xx}+cu^n_{yy}+du^n_{tt}-hu^n_t=0 \quad (3)$$

в области $D=\{x,y,t:0<x<\pi,0<y<\pi,t>0\}$ с начально краевыми условиями

$$u^n|_{t=0}=\frac{sinn^mxsinn^py}{n^q}; \quad u^n_t|_{t=0}=\frac{n^k\ sinn^mxsinn^py}{n^q};$$

$$u^n_{tt}|_{t=0}=\frac{n^{2k}sinn^mxsinn^py}{n^q}; \quad u^n|_{x=0,x=\pi}=u^n|_{y=0,y=\pi}=0; \quad (4)$$

$$u^n_{xx}|_{x=0,x=/pi}=u^n_{yy}|_{y=0,y=\pi}=0.$$

Рассмотрим функцию

$$u^n(x,y,t)=\frac{e^{n^kt}\cdot sinn^mx\cdot sinn^py}{n^q}.$$

Приведём три примера условий на коэффициенты a,b,c,d,h уравнения и натуральные числа k,m,p,q в начальных условиях (4), при которых нулевое решение поставленной задачи будет не устойчиво.

Пример 1. $a=c=1,b=d=h=0,k=8,m=3,p=6,q=24$.

Пример 2. $c=d=1,a=b=h=0,k=4,m=3,p=4,q=12$.

Пример 3. $a=h=1,b=c=d=0,k=4,m=3,p=1,q=12$.

§5. Краевые задачи для некоторых уравнений неклассического типа

Тезисы доклада на Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева 5-12 октября 2008 г. Новосибирск, Россия стр 232

Пусть Ω - ограниченная односвязная область переменной $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ в пространстве R^n с достаточно гладкой границей Γ_1. Область $G = \Omega \times (0, Y)$ с границей Γ_1. В области $Q = G \times (0, X))$ с границей Σ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + L_0 u = f(x, y, t), \qquad (1)$$

где

$$L_0 u \equiv a_0(x)\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_i}\left(a_{ij}(t)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t_j}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t_i} +$$

$$+a(x,y,t)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + b(x,y,t)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} +$$

$$+d(x,y,t)u(x,y,t),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq m|\xi|^2, m > 0,$$

$(x,y,t) \in Q, \xi \in R^n, a_{ij} = a_{ji}.$

Краевая задача.Найти решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\,|_{\Sigma} = u_x\,|_{x=0} = 0. \tag{2}$$

Теорема.Пусть для коэффициентов оператора L_0 выполнены следующие условия:
1. $a_0(x) \in C^3[0,X];\;\; a_{ij}(t) \in C^3(\overline{\Omega});$
$a(x,y,t), b(x,y,t), c_i(x,y,t), d(x,y,t) \in C^2(\overline{Q});$
$i,j = 1,...,n.$
2. $1 - a_0(x) \geq \delta > 0;$
3. $-2d(x,y,t) + a_x(x,y,t) + b_y(x,y,t) + \sum\limits_{i=1}^{n} c_{it_i}(x,y,t) - a_{0xx}(x) \geq \delta > 0.$
Тогда при любой правой части уравнения (1) $f(x,y,t) \in L_2(Q)$ существует и притом единственное решение краевой задачи (2) для уравнения (1) из пространства H(Q).

Замечание. Если рассматривать задачу Коши для этого уравнения, когда данные Коши

задаются на одной из гиперплоскостей: $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$, то такая задача будет некорректной.

Пример. В области

$$D = \left\{ (x, y, t) : x \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right), y \in (0, \pi), y \in (0, \pi) \right\}$$

рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} + 2u(x, y, t) = 0$$

с краевыми условиями

$$u \left|_{x=0} = u_x \right|_{x=0} = u_x \Big|_{x=\frac{\pi}{\sqrt{3}}} =$$

$$= u \left|_{y=0} = u \right|_{y=\pi} =$$

$$= u \left|_{t=0} = u \right|_{t=\pi} = 0.$$

Так как $a_0(x) = 1, a(x, y, t) = 0, d = 2$, то нарушены условия 2) и 3) теоремы. Ненулевым решением поставленной задачи будет функция

$$u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right).$$

[1] Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Новосибирский университет, 1983.

[2] Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

[3] Кожанов А. И. Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Бусинеска с нелинейным источником // Матем.заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 70–75.

§4. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА 2М

Н.А. Чуешева

50 лет ИМ СОРАН Конференция "Математика в современном мире", 17–23 сентября 2007, Новосибирск

Целью данной работы является исследование разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения порядка 2m с вырождающимся по времени t коэффициентом. Такие исследования при m=1 для линейного уравнения были проведены в работах Врагова В.Н. , Терехова А. Н. , Ларкина Н. А.. С различными вырождениями уравнения высокого порядка рассматривались в книге Егорова И. Е., Пяткова С.Г., Попова С. В., Кожанова А.И..

Пусть Ω - ограниченная односвязная область в пространстве R^n переменной $y = y(y_1, y_2, ..., y_n)$с достаточно гладкой границей Γ_1 , цилиндрическая область $G = \Omega \times (0, X)$ с границей Γ , цилиндрическая область $Q = G \times (0, T)$ с боковой границей $\Sigma = \Gamma \times (0, T))$, область $Q_t = G \times (0, t), t \in [0, T]$.

Пусть в области Q задано уравнение

$$Pu \equiv (-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + k(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} +$$

$$+a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial t} - Lu + |u|^\rho u = f(x, y, t), \qquad (1)$$

Оператор L - самосопряженный эллиптический дифференциальный второго порядка по переменной $y = y(y_1, y_2, ..., y_n)$. $k(x, y, t) \geq 0$. Обозначим через

$$\gamma = \{(x, y, 0) \in \overline{Q} : k(x, y, 0) > 0\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее граничным условиям

$$u\Big|_{\Sigma} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = ... = \frac{\partial^{2m-2} u}{\partial x^{2m-2}}\Big|_{x=0} = ... = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=X} =$$

$$= ... = \frac{\partial^{2m-2} u}{\partial x^{2m-2}}\Big|_{x=X} = u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\overline{\gamma}} = 0. \qquad (2)$$

Лемма. Пусть существует константа $\lambda_0 \geq 0$ такая, что выполнено неравенство

$$2a(x,y,t) - \frac{\partial k(x,y,t)}{\partial t} + \lambda_0 k(x,y,t) \geq \delta > 0. \qquad (3)$$

Тогда существует константа $\lambda_1 \geq \lambda_0$ что для всех функций $u(x,y,t)$ из класса $H_{2m,2}(Q) \bigcap L_{\rho+2}(Q)$ имеет место неравенство

$$|u(t)|^2_{H_{m,1}(G)} + |u(t)|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(G)} + \|u(t)\|^2_{H_{m,1}(Q_t)} +$$

$$+\|u(t)\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(Q_t)} \leq C \int_0^t \left(Lu, \frac{\partial u}{\partial t} e^{-\lambda\tau} \right) d\tau.$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1. Коэффициенты дифференциального оператора P принадлежат пространству $C^3(\overline{Q})$;

2. $2a(x,y,t) - \left| \frac{\partial k(x,y,t)}{\partial t} \right| \geq \delta > 0$;

3. $\rho \leq \frac{2}{n-1}$ при $n \geq 2$, ρ любое при $n = 1$;

4. Правая часть уравнения (1) - функция $f(x,y,t)$ такая, что

$$f(x,y,t) \in L_2(Q), \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} \in L_2(Q), f(x,y,0) = 0.$$

Тогда существует и притом единственное решение граничной задачи (2) для уравнения (1) из пространства $H_{2m,2}(Q)$.

Замечание 1. Аналогично как в книге В. Н. Врагова [1] можно привести пример того, что условие (3) леммы является существенным для единственности решения классической смешанной задачи для уравнения (1)

Замечание 2. Можно привести пример, что при нарушении условия 2 теоремы, какой бы гладкостью ни обладала правая часть уравнения (1), вообще говоря, решений смешанной задачи из пространства $H_{2m,2}(Q)$ не существует.

Литература

[1] Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск:Изд-во Новосиб. ун-та, 1983.

[2] Терехов А. Н. Краевая задача для управления смешанного типа // В кн.: Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1979. С. 128–137.