Сплетающие преобразования Лапласа линейных уравнений в частных производных

Е. И. Ганжа

Красноярский госпедуниверситет
им. В. П. Астафьева, Красноярск

http://arxiv.org/abs/1306.1113

28.08.2013

План доклада

План доклада

1. Классическое преобразование Лапласа. Каскадный метод Лапласа.

План доклада

1. Классическое преобразование Лапласа. Каскадный метод Лапласа.
2. Различные обобщения преобразования Лапласа:
   2.1 для произвольного гиперболического оператора 2-го порядка в $\mathbb{R}^2$;
   2.2 для гиперболических операторов высокого порядка (или систем $n \times n$ 1-го порядка в $\mathbb{R}^2$ (Царёв С.П.,2005);
   2.3 для систем $n \times n$ 1-го порядка в $\mathbb{R}^n$ (Athorne C., 1995);
   2.4 для оператора Лапласа с матричными коэффициентами (Жибер А.В.и др.);
   2.5 пр-е Дарбу для гиперболических и параболических операторов 2-го порядка в $\mathbb{R}^2$ (Царёв С.П., Шемякова Е., 2009, 2012);
   2.6 пр-е Дини для операторов 2-го порядка с разложимым главным символом в $\mathbb{R}^3$;
   2.7 пр-е Эйлера-Дарбу для операторов высокого порядка в $\mathbb{R}^n$ (Капцов О.В., 2009);
   2.8 пр-е Петрен (Petren L.,1911) для операторов высокого порядка в $\mathbb{R}^2$

План доклада (продолжение)

3. Сплетающее преобразование Лапласа (Intertwining Laplace Transformation, *ILT*) для оператора в $\mathbb{R}^n$.

План доклада (продолжение)

3. Сплетающее преобразование Лапласа (Intertwining Laplace Transformation, *ILT*) для оператора в $\mathbb{R}^n$.
4. Универсальность *ILT*
   4.1. унификация частных случаев
   4.2. **Теорема.** Любое сплетающее соотношение $M_1 L = L_1 M$ представимо как *ILT* между операторами L и L_1.

План доклада (продолжение)

3. Сплетающее преобразование Лапласа (Intertwining Laplace Transformation, *ILT*) для оператора в $\mathbb{R}^n$.
4. Универсальность *ILT*
   4.1. унификация частных случаев
   4.2. **Теорема.** Любое сплетающее соотношение $M_1 L = L_1 M$ представимо как *ILT* между операторами L и L_1.
5. Открытые проблемы.

Классическое преобразование Лапласа

$$Lu = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \qquad (1)$$

Введя $u_1 = (D_y + a)u$, приходим (если $h = a_x + ab - c \neq 0$) к преобразованному уравнению $L_1 u_1 = 0$ того же вида (1). Оператор L_1 - результат X-преобразования Лапласа.

Классическое преобразование Лапласа

$$Lu = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \qquad (1)$$

Введя $u_1 = (D_y + a)u$, приходим (если $h = a_x + ab - c \neq 0$) к преобразованному уравнению $L_1 u_1 = 0$ того же вида (1).
Оператор L_1 - результат X-преобразования Лапласа.
Имеется *сплетающее соотношение*

$$\left(D_y + a - \frac{h_y}{h}\right) L = L_1 (D_y + a).$$

Классическое преобразование Лапласа

$$Lu = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \qquad (1)$$

Введя $u_1 = (D_y + a)u$, приходим (если $h = a_x + ab - c \neq 0$) к преобразованному уравнению $L_1 u_1 = 0$ того же вида (1).
Оператор L_1 - результат X-преобразования Лапласа.
Имеется *сплетающее соотношение*

$$\left(D_y + a - \frac{h_y}{h}\right) L = L_1(D_y + a).$$

Каскадный метод Лапласа:

$$L \to L_1 \to \ldots \to L_n$$

Если $L_n u_n = (D_x + b)(D_y + \hat{a}) u_n = 0$, то (1) решается в квадратурах.

Пример 1 применения каскадного метода Лапласа

$$Lu = \left(D_x D_y - \frac{2}{(x+y)^2} \right) u = 0$$

$$L_1 u_1 = D_x \left(D_y + \frac{2}{x+y} \right) u_1 = 0$$

$$u_1 = \frac{2(X(x)+Y(y))}{(x+y)^2} - \frac{2}{x+y} Y'(y) + Y''(y),$$

где $X(x)$, $Y(y)$ - произвольные функции.

$$u = \frac{-2(X(x)+Y(y))}{x+y} + X'(x) + Y'(y)$$

Пример 2 применения каскадного метода Лапласа

$$Lu = \left(D_x D_y - \frac{n(n+1)}{(x+y)^2} \right) u = 0$$

$$h_n = 0 \Longrightarrow L_n u_n = D_x(D_y + a_n) u_n = 0$$

$$u = A_0 X(x) + \ldots + A_n X^{(n)}(x) + B_0 Y(y) + \ldots + B_n Y^{(n)}(y),$$

где $X(x)$, $Y(y)$ - произвольные функции одной переменной.

Обобщение пр-я Лапласа для гиперболического оператора 2-го порядка в $\mathbb{R}^2$

$$Lu = u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u = 0\,.$$

$$\boxed{Lu = (X_1X_2 - H)u = 0} \tag{2}$$

где $X_i = D_x + \lambda_i(x,y)D_y + \alpha_i(x,y)$ и $H(x,y)$ -функция. Введя $v = X_2 u$, получаем (если $H(x,y) \neq 0$)преобразованное ур-е:

$$\boxed{L_1 v = (X_2X_1 + \omega X_1 - H)v = 0} \tag{3}$$

где

$$\boxed{\omega = -[X_2, H]H^{-1}}\,. \tag{4}$$

Тогда

$$\boxed{M_1 L = L_1 M}\,, \tag{5}$$

где $M = X_2$, $M_1 = X_2 + \omega$.

Сплетающее преобразование Лапласа ILT

Пусть L, X_1, $X_2 \in \mathbf{F}[D_{x_1}, \dots, D_{x_n}]$ и

$$\boxed{L = X_1X_2 - H} \qquad (H = X_1X_2 - L), \tag{6}$$

Определим

$$\boxed{L_1 = X_2X_1 + \omega X_1 - H}, \tag{7}$$

где $\boxed{\omega = -[X_2, H]H^{-1}} \in \mathbf{F}(D_{x_1}, \dots, D_{x_n})$.

$\Rightarrow \boxed{M_1 L = L_1 M}$, где $M = X_2$, $M_1 = X_2 + \omega$.

Определение

Операторы L, L_1 называются связанными сплетающим преобразованием Лапласа (Intertwining Laplace Transformation, ILT), если выполняется условие $\omega \in \mathbf{F}[D_{x_1}, \dots, D_{x_n}]$.

Пример *ILT*

$$L = X_1 X_2 - H = D_y \left(D_x + \frac{2}{x} \right) - x^3 D_z^2,$$

где $\quad X_1 = D_y,\ X_2 = D_x + \frac{2}{x},\ H = x^3 D^2 z.$

Условие *ILT*: $\quad [H, X_2] = -\frac{3}{x} H \Rightarrow \omega = -\frac{3}{x}.$

Пример ILT

$$L = X_1 X_2 - H = D_y \left(D_x + \frac{2}{x} \right) - x^3 D_z^2,$$

где $\quad X_1 = D_y,\ X_2 = D_x + \frac{2}{x},\ H = x^3 D^2 z.$

Условие ILT: $\quad [H, X_2] = -\frac{3}{x} H \Rightarrow \omega = -\frac{3}{x}.$

Преобразованный оператор:

$$L_1 = X_2 X_1 + \omega X_1 - H = \left(D_x + \frac{2}{x} \right) D_y - \frac{3}{x} D_y - x^3 D_z^2.$$

Сплетающее соотношение

$$\left(D_x - \frac{1}{x} \right) L = L_1 \left(D_x + \frac{2}{x} \right).$$

Сплетающие соотношения и ILT

Теорема

Пусть $L \in \boldsymbol{F}[D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}]$ *и* $ordL \geq 1$*.Если*

$$N_1 L = L_1 N,$$

где $ordN = ordN_1 = 1$, $SymL = SymL_1$, *тогда операторы* L *и* L_1 *связаны* ILT.

Пример *ILT*: Калибровочное преобразование

$$\boxed{L \to \widetilde{L} = \lambda^{-1} L \lambda}, \qquad \lambda \in \mathbf{F}.$$

$$\lambda^{-1} L = \widetilde{L} \lambda^{-1}$$

Пример ILT: Калибровочное преобразование

$$\boxed{L \to \widetilde{L} = \lambda^{-1} L \lambda}, \qquad \lambda \in \mathbf{F}.$$

$$\lambda^{-1} L = \widetilde{L} \lambda^{-1}$$

Представление как ILT:

$$L = X_1 X_2 - H,$$

где $X_2 = \lambda^{-1}$, $X_1 = L\lambda + \varphi\lambda$, $H = \varphi$, $\varphi \in \mathbf{F}$.

$$[H, X_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 0$$

$$L_1 = X_2 X_1 - H = \lambda^{-1}(L\lambda + \varphi\lambda) - \varphi = \lambda^{-1} L \lambda$$

Пример ILT: Дифференциальные подстановки для ЛОДО

Пусть L и M - ЛОДО произвольного порядка и $rGCD(L, M) = 1$. Пусть $K = lLCM(L, M) = M_1 L = L_1 M$, тогда L_1 - результат преобразования оператора L путем дифференциальной подстановки $v = Mu$.

Представление в виде ILT для $ordM = 1$:

$$L = QM + r(x) = X_1 X_2 - H, \qquad r(x) \in \mathbf{F}$$

$\Rightarrow [H, X_2] = \psi H$, где $\psi \in \mathbf{F}$.

$$L_1 = X_2 X_1 + \psi X_1 - H = MQ + \psi Q + r(x),$$

$$M_1 L = L_1 M,$$

где

$$M_1 = M + \psi.$$

Пример *ILT*: Преобразование Дарбу одномерного оператора Шредингера

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} - u(x)$$

Если w - решение $Lw = 0$, то

$$L = A^t A = \left(\frac{d}{dx} + \frac{w_x}{w}\right)\left(-\frac{d}{dx} + \frac{w_x}{w}\right)$$

Преобразование Дарбу:

$$L = A^t A \quad \longrightarrow \quad \widetilde{L} = AA^t.$$

Пример ILT: Преобразование Дарбу одномерного оператора Шредингера

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} - u(x)$$

Если w - решение $Lw = 0$, то

$$L = A^t A = \left(\frac{d}{dx} + \frac{w_x}{w}\right)\left(-\frac{d}{dx} + \frac{w_x}{w}\right)$$

Преобразование Дарбу:

$$L = A^t A \quad \longrightarrow \quad \widetilde{L} = AA^t.$$

Представление в виде ILT:

$$AL = \widetilde{L}A.$$

$$L = X_1 X_2 - H,\ \ X_2 = A,\ \ X_1 = A^t + 1,\ \ H = A,\ \ [H, X_2] = 0 \quad \Rightarrow \omega = 0.$$

$$L_1 = X_2 X_1 + \omega X_1 - H = A(A^t + 1) - A = \widetilde{L}.$$

Пример ILT: Преобразование Дарбу для параболического оператора в $\mathbb{R}^2$

$$L = D_x^2 + a(x,y)D_x + b(x,y)D_y + c(x,y), \quad b(x,y) \neq 0.$$

Преобразование Дарбу $L \rightarrow \widetilde{L}$:

$$M_1 L = \widetilde{L} M,$$

где $M = D_x + q(x,y)D_y + r(x,y)$ определяется двумя решениями уравнения $Lu = 0$: $Mu_1 = Mu_2 = 0$.

Пример ILT: Преобразование Дарбу для параболического оператора в $\mathbb{R}^2$

$$L = D_x^2 + a(x,y)D_x + b(x,y)D_y + c(x,y), \quad b(x,y) \neq 0.$$

Преобразование Дарбу $L \;\to\; \widetilde{L}$:

$$M_1 L = \widetilde{L} M,$$

где $M = D_x + q(x,y)D_y + r(x,y)$ определяется двумя решениями уравнения $Lu = 0$: $Mu_1 = Mu_2 = 0$.
Представление в виде ILT:

$$L = X_1 X_2 - H,$$

где $X_2 = M \;, \quad X_1 = D_x - qD_y + (a - r) \;, \quad H = q^2 D_y + \alpha D_y + \beta.$

$$[H, X_2] = \psi(x,y)H, \quad \psi(x,y) \in \mathbf{F},$$

$$L_1 = X_2 X_1 + \psi X_1 - H = \widetilde{L}, \quad M_1 = M + \psi.$$

Пример ILT: Преобразование Эйлера-Дарбу для операторов высокого порядка в $\mathbb{R}^n$

$$Lu = \sum_{i=0}^{k} a_i(x) D_x^i u + \sum_{|\alpha| \geq 0}^{m} b_\alpha(y) D_y^\alpha u = Au + Bu = 0.$$

Введя $v = (D_x - \frac{h_x}{h})u = Mu$, где $h(x)$ - решение $Ah = ch,\ c \in \mathbb{R}$, получаем преобразованное уравнение $\widetilde{L}v = 0$ того же вида.

$$M_1 L = \widetilde{L} M.$$

Пример ILT: Преобразование Эйлера-Дарбу для операторов высокого порядка в $\mathbb{R}^n$

$$Lu = \sum_{i=0}^{k} a_i(x) D_x^i u + \sum_{|\alpha| \geq 0}^{m} b_\alpha(y) D_y^\alpha u = Au + Bu = 0.$$

Введя $v = (D_x - \frac{h_x}{h})u = Mu$, где $h(x)$ - решение $Ah = ch,\ c \in \mathbb{R}$, получаем преобразованное уравнение $\widetilde{L}v = 0$ того же вида.

$$M_1 L = \widetilde{L} M.$$

Представление в виде ILT: $\quad L = X_1 X_2 - H$, где

$$X_2 = M, \quad X_1 = Q, \quad H = B + c, \quad [H, X_2] = 0,$$

$$L_1 = X_2 X_1 - H = MQ - c - B, \quad M_1 = M.$$

Пример ILT: Преобразование Петрен для операторов высокого порядка в $\mathbb{R}^2$

$$Lu = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(x,y) D_x D_y^i u + \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x,y) D_y^i u = 0. \qquad (8)$$

Введя $v = (D_y - \frac{(\alpha_0)_y}{\alpha_0}) = Mu$,

где $\alpha_0 \ : \ L\alpha_0 \neq 0 \ , \ \sum_{i=0}^{n-1} A_i(x,y) D_y^i \alpha_0 = 0$,

получаем $\{Lu = 0\} \ \rightarrow \ \{\widetilde{L}v = 0\}$

$$M_1 L = \widetilde{L} M.$$

Пример ILT: Преобразование Петрен для операторов высокого порядка в $\mathbb{R}^2$

$$Lu = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(x,y) D_x D_y^i u + \sum_{i=0}^{n-1} B_i(x,y) D_y^i u = 0. \tag{8}$$

Введя $v = (D_y - \frac{(\alpha_0)_y}{\alpha_0}) = Mu$,
где $\alpha_0 \ : \ L\alpha_0 \neq 0 \ , \ \sum_{i=0}^{n-1} A_i(x,y) D_y^i \alpha_0 = 0$,
получаем $\{Lu = 0\} \ \rightarrow \ \{\widetilde{L}v = 0\}$

$$M_1 L = \widetilde{L} M.$$

Представление в виде ILT: $\quad L = X_1 X_2 - H$, где

$$X_2 = M, \ \ X_1 = D_x Q + R, \ \ H = h(x,y), \ \ [H, X_2] = \psi H, \ \psi = -\frac{h_y}{h},$$

$$L_1 = X_2 X_1 + \psi X_1 - H = (M - \frac{h_y}{h})(D_x Q + R) - h, \ \ M_1 = M - \frac{h_y}{h}.$$

Открытые проблемы

1. Представление в виде ILT преобразование Мутара.

Открытые проблемы

1. Представление в виде *ILT* преобразование Мутара.
2. Обобщение *ILT* для случая преобразования систем.

Открытые проблемы

1. Представление в виде ILT преобразование Мутара.
2. Обобщение ILT для случая преобразования систем.
3. Представление сплетающих преобразований высокого порядка как композиции ILT.

Литература

Taimanov, I.A., Tsarev, S.P. *The Moutard transformation: an algebraic formalism via pseudodifferential operators and applications*, `http://arxiv.org/abs/0906.5141` (2009)

Tsarev, S.P. *Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations*. In: Labahn, G. (ed.) Proc. ISSAC'2005. pp. 325–331. ACM Press (2005) `http://arxiv.org/abs/cs/0501030`.

Ore, O. *Theory of non-commutative polynomials.* Annals of Mathematics, 1933, V. 34, p. 480–508.

Литература (2)

Ganzha, E.I.
On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. Programming and Computer Software. 38, 150–155 (2012)

Shemyakova, E.
Factorization of Darboux Transformations of Arbitrary Order for Two-dimensional Schrödinger operator (2013)
`http://arxiv.org/abs/1304.7063`.

Литература (2)

Ganzha, E.I.
On Laplace and Dini transformations for multidimensional equations with a decomposable principal symbol. Programming and Computer Software. 38, 150–155 (2012)

Shemyakova, E.
Factorization of Darboux Transformations of Arbitrary Order for Two-dimensional Schrödinger operator (2013)
`http://arxiv.org/abs/1304.7063`.

Детальное изложение результатов:

E.I. Ganzha,
Intertwining Laplace Transformations of Linear Partial Differential Equations,
`http://arxiv.org/abs/1306.1113`.