Классификация заузленных дуг малой сложности в утолщенном проколотом торе

Ильина Яна Константиновна

(Челябинский Государственный Университет)

Международная конференция
"Дни геометрии в Новосиборске, 2013"
28 — 31 августа 2013

Определение 1

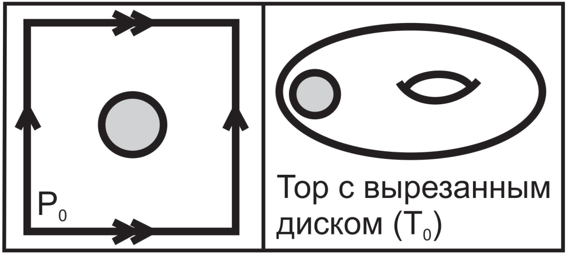
Утолщенным проколотым тором называется прямое произведение проколотого тора, то есть тора с вырезанным диском, на отрезок $[0, 1]$.

Определение 2

Заузленной дугой в утолщенном проколотом торе называется простая кривая с концами в точках a, b, где a и b — это фиксированные точки на утолщенном крае проколотого тора.

Дуги L_1 и L_2 гомеоморфны,если существует гомеоморфизм пар $h : (T_0 \times I, L_1) \to (T_0 \times I, L_2)$, относительно которого точка a переходит в a, b переходит в b, а L_1 — в L_2.

Хорошо известно, что тор можно представить как единичный квадрат P, противоположные стороны которого отождествлены по параллельным переносам. Удалив из P внутренность диска $D \subset \mathrm{Int}\, P$, получим квадрат без диска $P \setminus \mathrm{Int}\, D = P_0$.



Определение 3

Проекцией в T_0 называется такой граф в P_0, что валентность каждой его вершины равна 1 или 4, причем выполнены следующие условия:

1. Все вершины валентности 4 лежат в $\mathrm{Int}\, P_0$, а вершины валентности 1 в ∂P_0.
2. При упомянутых выше параллельных переносах вершины валентности 1 переходят в вершины валентности 1.
3. Путь по ребрам графа от одной конечной точки до другой, который проходит все вершины по правилу "прямо вперед", определяет обход по всем ребрам и вершинам соответствующего графа на торе.

Пример проекции зауленной дуги на проколотом торе

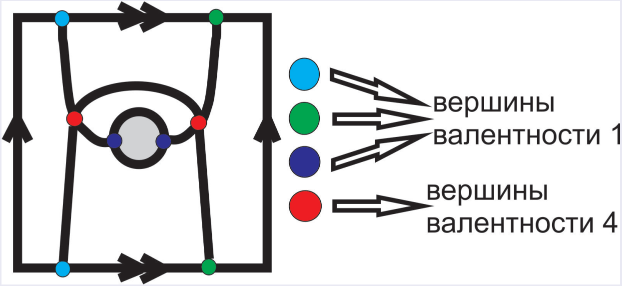
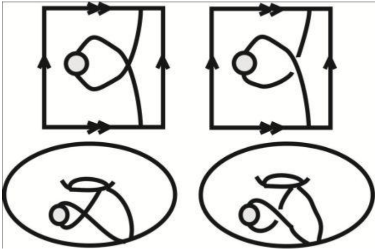


Диаграмма получается из проекции указанием разрывов в точках самопересечения, то есть вершинах валентности 4. Проекции и диаграммы дуг рассматриваются также с точностью до гомеоморфизмов пар. Число вершин валентности 4 будем называть сложностью проекции или диаграммы.



Определение 4

Диаграмма заузленной дуги называется минимальной, если ее сложность не превосходит сложности диаграммы любой дуги, эквивалентной данной. Проекция заузленной дуги называется минимальной, если ей соответствует минимальная диаграмма хотя бы одной заузленной дуги.

Постановка задачи

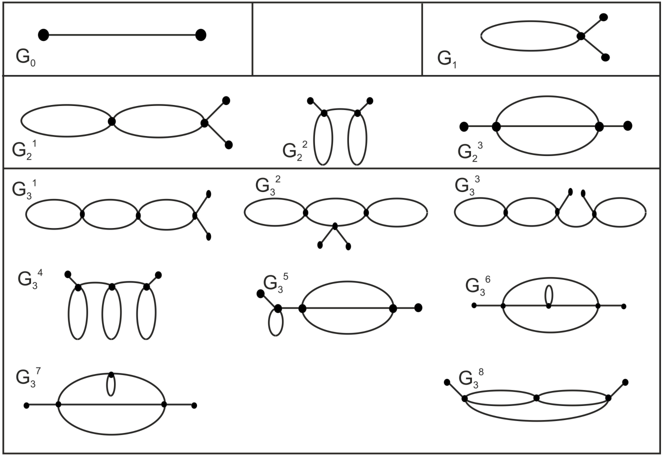
В утолщенном проколотом торе $T_0 \times I$ табулировать все заузленные дуги сложности ≤ 3.

Метод решения

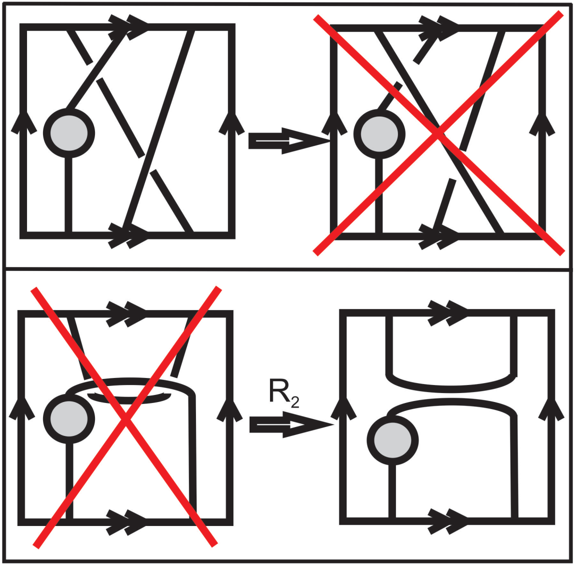
Заузленные дуги строятся с помощью трехступенчатого перебора:

1. абстрактные графы с вершинами валентности 4 двумя вершинами валентности 1;
2. проекции (вложения графов на проколотый тор);
3. диаграммы.

Графы с ≤ 3 вершинами валентности 4 и двумя вершинами валентности 1



Почему можно уменьшить число рассматриваемых диаграмм

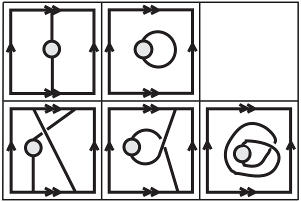


Основная теорема

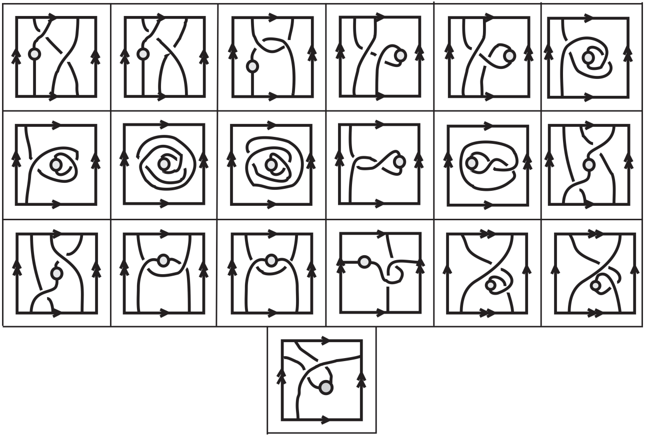
В $T_0 \times I$ существует 101 заузленная дуга сложности ≤ 3, из них:

1. 2 заузленные дуги сложности 0;
2. 3 заузленные дуги сложности 1;
3. 19 заузленных дуг сложности 2;
4. 77 заузленных дуг сложности 3.

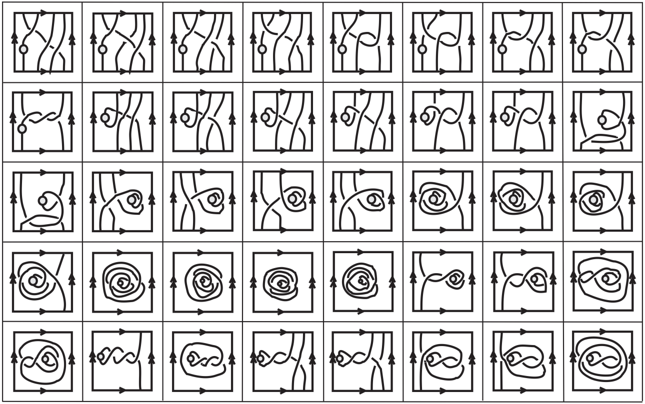
Минимальные диаграммы дуг сложности 0 и 1



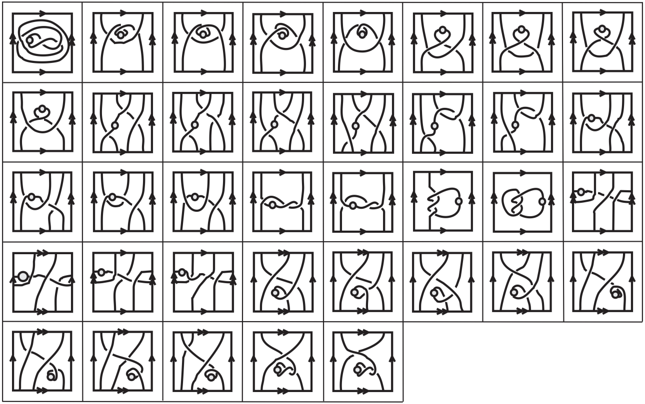
Минимальные диаграммы дуг сложности 2



Минимальные диаграммы дуг сложности 3



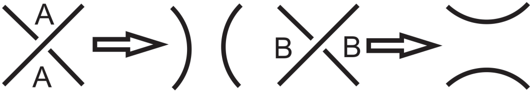
Минимальные диаграммы дуг сложности 3



Построение полинома Кауффмана

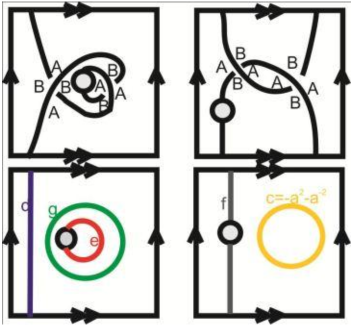
Рассмотрим какой-нибудь перекресток некоторой диаграммы заузленной дуги.

Будем говорить, что выбор маркеров всех перекрестков некоторой диаграммы дуги определяет *состояние дуги*.



Типы кривых, которые могут получаться при разрешении перекрестков диаграммы

1. c — тривиальная окружность;
2. d — нетривиальная окружность, не параллельная краю;
3. g — нетривиальная окружность, параллельная краю;
4. e — тривиальная кривая, концы которой лежат на краю дырки;
5. f — нетривиальная кривая, концы которой лежат на краю дырки.



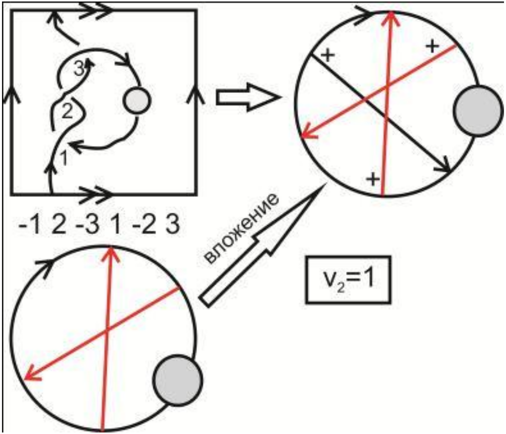
Определение 7

Индексом скручивания для заузленной дуги L называется число $w(L) = \sum_i \varepsilon_i$, где ε_i — это знак двойной точки.

Обобщение полинома Кауффмана

$$X(L) = (-a)^{-3w(L)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)}(-a^{-2} - a^2)^{\gamma(s)} d^{\delta(s)} e^{\nu(s)} f^{\lambda(s)} g^{\mu(s)}$$

Построение инварианта Кассона



Значения инварианта Кассона

Для всех построенных раннее заузленных дуг в $T_0 \times I$ был посчитан инвариант Кассона. Оказалось, что для большинства дуг этот инвариант равен нулю, для трех дуг его значение равно единице:

1. $v_2(2_{18}) = 1$;
2. $v_2(3_{62}) = 1$;
3. $v_2(3_{63}) = 1$.

Инвариант Кассона позволил различить две дуги, у которых значения полинома Кауффмана совпадают:

1. $v_2(0_2) = 0$;
2. $v_2(2_{19}) = -1$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!