Доказательство теоремы Шуберта

А. Кулакова

Челябинский Государственный Университет (ЧелГУ)

Международная конференция "Дни геометрии в Новосибирске, 2013"

Август 28-31, 2013

Новосибирск

Теорема Шуберта (1942 г.)

Теорема

Любой нетривиальный узел K можно представить в виде конечной связной суммы $K = K_1 \# K_2 \# ... \# K_n$, где все K_i– примарные узлы.
Все слагаемые определены однозначно с точностью до перестановки.

Введение

- Сферическая редукция узла

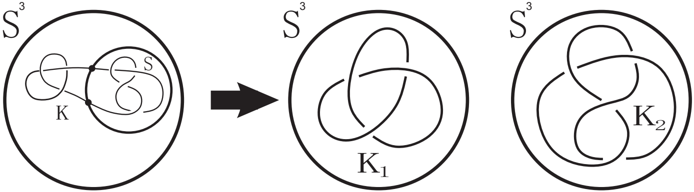


Рис. : **Пример: Сферическая редукция узла** K

- Потомки узла

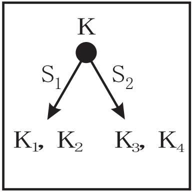


Рис. : **Пример: Потомки узла** K

Доказательство

Определение

Узел K называется регулярным, если он имеет единственное разложение на примарные слагаемые, в противном случае – сингулярным.

G – сингулярный узел с регулярными потомками.

Доказательство

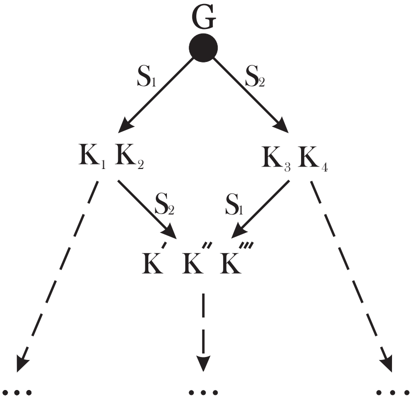
Пусть G – сингулярный узел с регулярными потомками. S_1, S_2 – сферы, по которым совершаются редукции, причем они трансверсальны и число окружностей в их пересечении минимально (среди всех пар сфер, удовлетворяющих упомянутым условиям).

Возможны два случая:

- S_1, S_2 не пересекаются
- S_1, S_2 пересекаются

Рассмотрим первый случай, когда сферы S_1, S_2 не пересекаются. Получаем противоречие со следующими условиями:

- Потомки узла регулярные
- Объединения примарных слагаемых, которые получаются при редукция по сферам S_1, S_2 должны быть различными
- Совпадение результатов при редукциях по обеим сферам



Рассмотрим второй случай, когда сферы S_1, S_2 пересекаются. Найдем пару сфер, по которым совершаются редукции, такую, что число окружностей в их пересечении будет меньше, чем у сфер S_1, S_2. Для этого воспользуемся приемом, который называется "перестройка по самой внутренней окружности". Здесь возможны два случая:

- Узел G не пересекает диск D, такой диск назовем чистым
- Узел G пересекает диск D

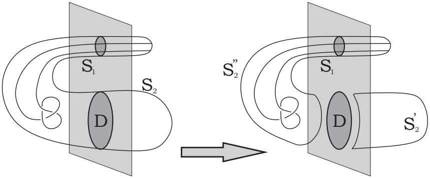


Рис. : **Пример: Перестройка по самой внутренней окружности**

Доказательство теоремы

После "перестройки по самой внутренней окружности"нашлась новая пара сфер S_1, S_2'', число окружностей в пересечении которой меньше, чем у пары S_1, S_2. Что противоречит нашему предположению о сферах S_1, S_2.

Рассмотрим случай, когда чистых дисков нет. Аналогично первому случаю совершим "перестройку по самой внутренней окружности". Тогда найдется пара сфер S_1, S_2'', число окружностей в пересечении у которой будет меньше, чем у пары S_1, S_2.

Доказательство теоремы

Вывод: Получили противоречие с выбором сфер, значит, узел G является регулярным, т.е. имеет единственное разложение на примарные слагаемые.
На этом теорема доказана.

Спасибо за внимание!