

# ЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Куркина М.В., Родионов Е.Д., Славский В.В.

## Введение

Конформно-плоским метрикам ограниченной кривизны соответствуют выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского. В работе подробно разбирается одномерный случай, изучаются соответствующие одномерные конформно-плоские метрики, разбираются численные алгоритмы построения таких метрик.

**Определение 1.** Выражение вида  $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ , где  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  — положительная функция, определяет конформно-плоскую метрику в  $\mathbb{R}^n$ , одномерная секционная кривизна в направлении единичного вектора  $\xi$  которой вычисляется по формуле [2]

$$K_{1/2}(f, x, \xi) = f \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla f|^2. \quad (1)$$

Риманова кривизна в точке  $x \in \mathbb{R}^n$  в двумерном направлении  $\sigma = \xi \wedge \eta$  вычисляется по формуле

$$K_\sigma(f, x, \xi \wedge \eta) = K_{1/2}(f, x, \xi) + K_{1/2}(f, x, \eta),$$

где  $\xi, \eta$  — единичные взаимно-перпендикулярные векторы в  $\mathbb{R}^n$ . При  $n \neq 2$  конформно-плоская метрика имеет постоянную риманову (и одномерную) кривизну, если и только если функция  $f(x)$  имеет вид квадратичного полинома

$$f(x) = a \|x\|^2 + \sqrt{2} \left( x, \vec{b} \right) + c, \quad (2)$$

с одномерной кривизной равной  $K_{1/2} = 2ac - b^2$ .

Формально определение одномерной секционной кривизны справедливо и для  $n = 1$ .

**Определение 2.** Выражение вида  $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ , где  $f \in C^2(\mathbb{R}^1)$  — положительная функция, определяет одномерную конформно-плоскую метрику в  $\mathbb{R}^1$ , одномерная кривизна, которой вычисляется по формуле

$$K_{1/2}(f, x) = f \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{df}{dx} \right)^2. \quad (3)$$

С помощью стереографической замены переменной

$$x = \frac{\cos(t)}{1 - \sin(t)}, \quad dx = \frac{dt}{1 - \sin(t)},$$
$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)} = \frac{dt^2}{g^2(t)},$$

перейдем к функции  $g(t) = f \left( \frac{\cos(t)}{1 - \sin(t)} \right) (1 - \sin(t))$  заданной на единичной окружности  $S^1$  (или функции заданной на прямой  $\mathbb{R}^1$  и периода  $2\pi$ ). Формула (3) примет вид

$$K_{1/2}(g, t) = g \frac{d^2 g}{dt^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{dg}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} g^2. \quad (4)$$

Квадратичной функции  $f(x) = ax^2 + \sqrt{2}bx + c$  при этом будет соответствовать тригонометрический полином

$$g(t) = A + B \cos(t) + C \sin(t) =$$
$$= (a + c) + \sqrt{2}b \cos(t) + (a - c) \sin(t),$$

с одномерной кривизной равной:

$$K_{1/2} = 2ac - b^2 = \frac{A^2 - B^2 - C^2}{2} = -\frac{\langle w, w \rangle}{2},$$

где по аналогии с работой [ ] используется псевдоевклидово пространство  $M^{2,1}$  со скалярным произведением векторов  $w_i = [B_i, C_i, A_i] \in M^{2,1}$ ,  $i = 1, 2$  равным:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = B_1B_2 + C_1C_2 - A_1A_2. \quad (5)$$

**Определение 3.** Пусть  $\kappa > 0$ . Введем обозначения:

$$C^+ = \left\{ w = [B, C, A] \in M^{2,1} : \langle w, w \rangle = 0, A > 0 \right\},$$

$$H_\kappa = \left\{ w = [B, C, A] \in M^{2,1} : \langle w, w \rangle = -1/\kappa, A > 0 \right\},$$

где  $C^+ \subset M^{2,1}$  — положительная пола изотропного конуса, поверхность  $H_\kappa$  — положительная пола двуполустного гиперболоида (вместе с индуцированной метрикой из  $M^{2,1}$  это пространство Лобачевского кривизны  $(-\kappa)$ ).

### **$\kappa$ -нормальное изображением одномерной конформно-плоской метрики**

Сопоставим произвольной одномерной конформно-плоской метрике  $ds^2 = \frac{dx^2}{g^2(t)}$  на окружности  $S^1$  отображение

$$Z_g(t) = \frac{1}{g(t)} \left[ \cos(t), \sin(t), 1 \right] \in C^+ \quad (6)$$

и двойственное или сопряженное ему отображение

$$Z_g^*(t) = \left[ \begin{array}{l} \sin(t)g'(t) + \frac{\cos(t) [g'(t)^2 - g(t)^2]}{2g(t)}, \\ \frac{\sin(t) [g'(t)^2 - g(t)^2]}{2g(t)} - \cos(t)g'(t), \\ \frac{g'(t)^2 + g(t)^2}{2g(t)} \end{array} \right] \in C^+. \quad (7)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \langle Z_g(t), Z_g^*(t) \rangle &= -1, & \langle dZ_g(t), Z_g^*(t) \rangle &= 0, \\ \langle Z_g(t), dZ_g^*(t) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

$$\langle dZ_g(t), dZ_g(t) \rangle = \frac{dt^2}{g(t)^2}, \quad \langle dZ_g(t), dZ_g^*(t) \rangle = \frac{-K_{1/2}dt^2}{g(t)^2}$$

$$\langle dZ_g^*(t), dZ_g^*(t) \rangle = \frac{K_{1/2}^2 dt^2}{g(t)^2},$$

где:

$$K_{1/2} = g \frac{d^2g}{dt^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{dg}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}g^2.$$

Отображение  $Z_g$  — изометрично вкладывает  $\{S^1, ds^2\}$  в изотропный конус  $C^+$ . При  $g(t) \equiv 1$  введем обозначение  $Z_1(t) = [\cos(t), \sin(t), 1]$  для стандартного вложения  $S^1$  в конус  $C^+$ .

Рассмотрим отображения:

$$P_g(t, \kappa) = \frac{Z_g(t)}{2} + \frac{Z_g^*(t)}{\kappa}, \quad P_g^*(t, \kappa) = \frac{Z_g(t)}{2} - \frac{Z_g^*(t)}{\kappa}, \quad (8)$$

где  $\kappa > 0$  — фиксированная константа, тогда

$$\langle P_g(t, \kappa), P_g(t, \kappa) \rangle \equiv -\frac{1}{\kappa}, \quad \langle P_g^*(t, \kappa), P_g^*(t, \kappa) \rangle \equiv \frac{1}{\kappa}.$$

**Определение 4.** Отображение

$$P_g(\cdot, \kappa) : S^1 \rightarrow H_{\kappa}^2,$$

будем называть  $\kappa$ -нормальным изображением конформно-плоской метрики, а пару отображений  $\{P_g(\cdot, \kappa), P_g^*(\cdot, \kappa)\}$  — оснащенным  $\kappa$ -нормальным изображением конформно-плоской метрики [3].

### **$\kappa$ -нормальное изображение одномерной конформно-плоской метрики в модели Клейна**

Проективное преобразование  $w = [B, C, A] \in M^{2,1} \rightarrow [x, y] \in R^2$  определенное формулой:

$$x = \frac{B}{A}, \quad y = \frac{C}{A},$$

отображает пространства  $M^{2,1}$  на плоскость  $R^2$ . Образы точек  $Z_g, Z_g^*, P_g, P_g^*$  при данном проективном отображении будем обозначать как  $z_g, z_g^*, p_g, p_g^*$ , если из контекста ясно, то  $g$  будем опускать. Так как векторы  $Z, Z^*, P, P^*$  лежат в одном подпространстве  $M^{2,1}$ , то точки  $z, z^*, p, p^*$  будут лежать на одной прямой плоскости  $R^2$ , пересекающей единичную окружность в точках  $z$  и  $z^*$  см. рисунок 1. При этом отображении, поверхность  $H_{\kappa}^2$  переходит во внутренность единичного круга  $B^2$  с центром в начале координат (модель Клейна для плоскости Лобачевского).

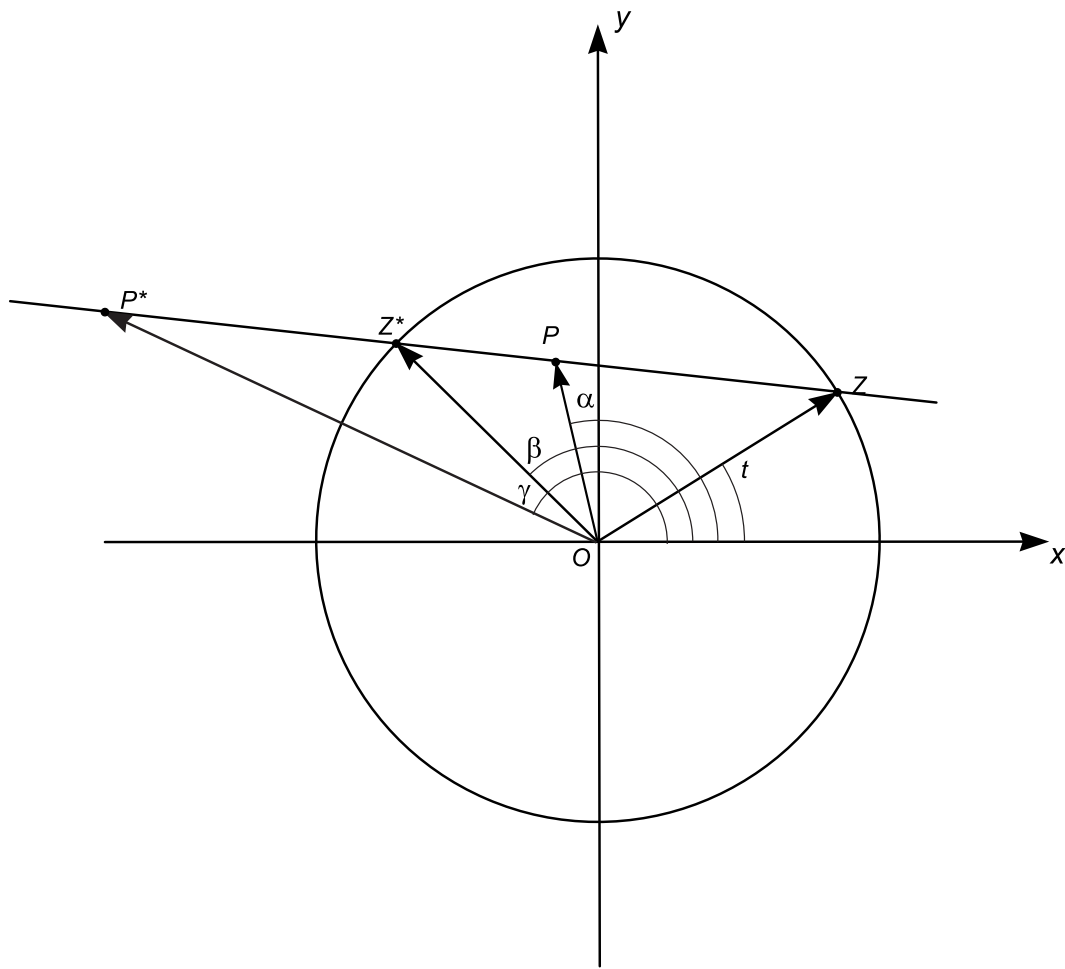


Рис. 1: Образы точек  $z$ ,  $z^*$ ,  $p$ ,  $p^*$ .

Используя матричные обозначения для векторов будем иметь равенства:

$$z = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z^* = z - \frac{2g(t)}{g'(t)^2 + g(t)^2} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{bmatrix},$$

$$p = z - \frac{2g(t)}{g'(t)^2 + g(t)^2 + \kappa} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{bmatrix},$$

$$p^* = z - \frac{2g(t)}{g'(t)^2 + g(t)^2 - \kappa} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{bmatrix}.$$

**Теорема 1.** Отсюда получим

$$(p, p^*) = 1, \quad \left( \frac{dp}{dt}, p^* \right) = 0, \quad \left( \frac{dp^*}{dt}, p \right) = 0,$$

$$\left( \frac{dp}{dt}, \frac{dp^*}{dt} \right) = \frac{(\kappa - 2K(t))(\kappa + 2K(t))}{\kappa^2 - (g'(t)^2 + g(t)^2)^2}$$

$$|p|^2 = 1 - \frac{4\kappa g(t)^2}{(g'(t)^2 + g(t)^2 + \kappa)^2},$$

$$|p^*|^2 = 1 + \frac{4\kappa g(t)^2}{(g'(t)^2 + g(t)^2 - \kappa)^2},$$

для любого  $\kappa > 0$  и любого  $t$

$$\frac{g'(t)^2}{g'(t)^2 + g(t)^2} \leq |p|^2 \leq 1$$

**Теорема 2.** Сложное отношение:  $[ZZ^*, PP^*] = -1$ ,

или

$$\frac{\sin(\alpha - t)}{\sin(\alpha - \beta)} \div \frac{\sin(\gamma - t)}{\sin(\gamma - \beta)} = -1$$

**Пример 1.** Возьмем одномерную конформно-плоскую метрику  $ds^2 = \frac{dt^2}{g^2(t)}$ , где

$$g(t) = -\sin(t + 2) + \cos^2(t) + \frac{3}{2} \quad (9)$$

Одномерная кривизна равна:

$$K_{1/2}(t) = \frac{1}{16}(24 \sin(2 - t) + \\ + 8 \sin(3t + 2) - 48 \cos(2t) - 3 \cos(4t) + 13).$$

Минимальное значение  $\min K_{1/2}(t) = -4.19359$  при  $t_1 = 3.14159$ ,  $\max K_{1/2}(t) = 4.45729$  при  $t_2 = 1.5708$ , график функции  $K_{1/2}(t)$  изображен на Рис.2

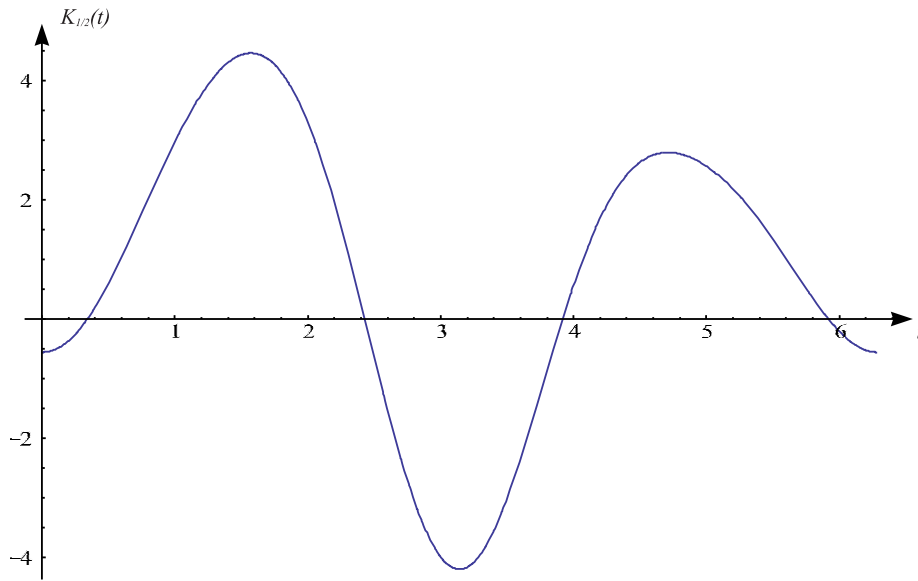


Рис. 2: График одномерной секционной кривизны метрики (9).

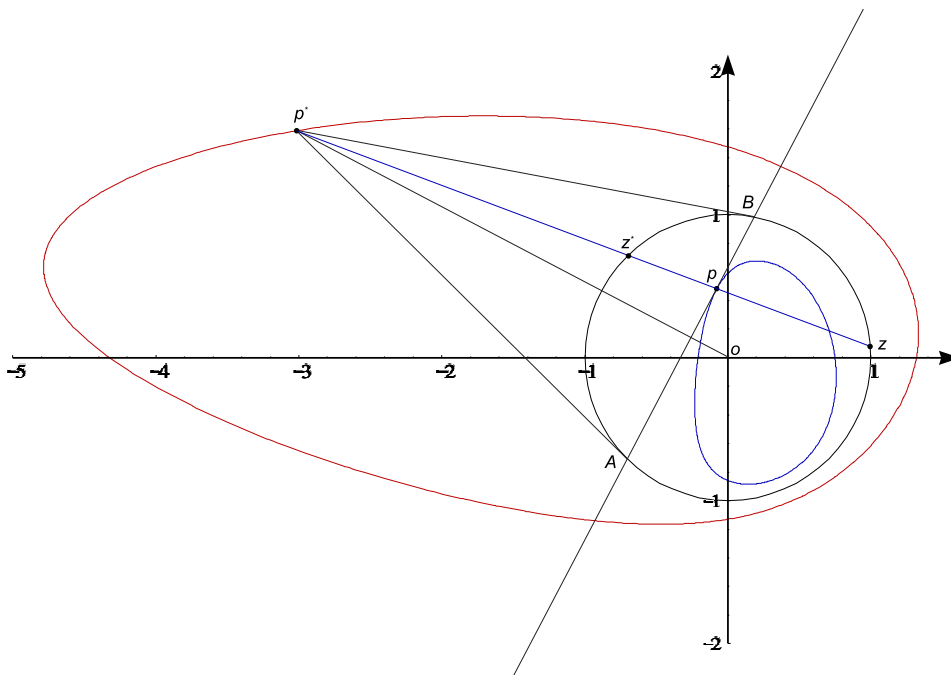


Рис. 3: Оснащенное  $\kappa$ -сферическое изображение одномерной конформно-плоской метрики (9) при  $\kappa = 18$ .

## Одномерные конформно-плоские метрики постоянной кривизны

Рассмотрим случай конформно-плоской одномерной метрики постоянной кривизны

$$g(t) = A + B \cos(t) + C \sin(t), \quad (10)$$



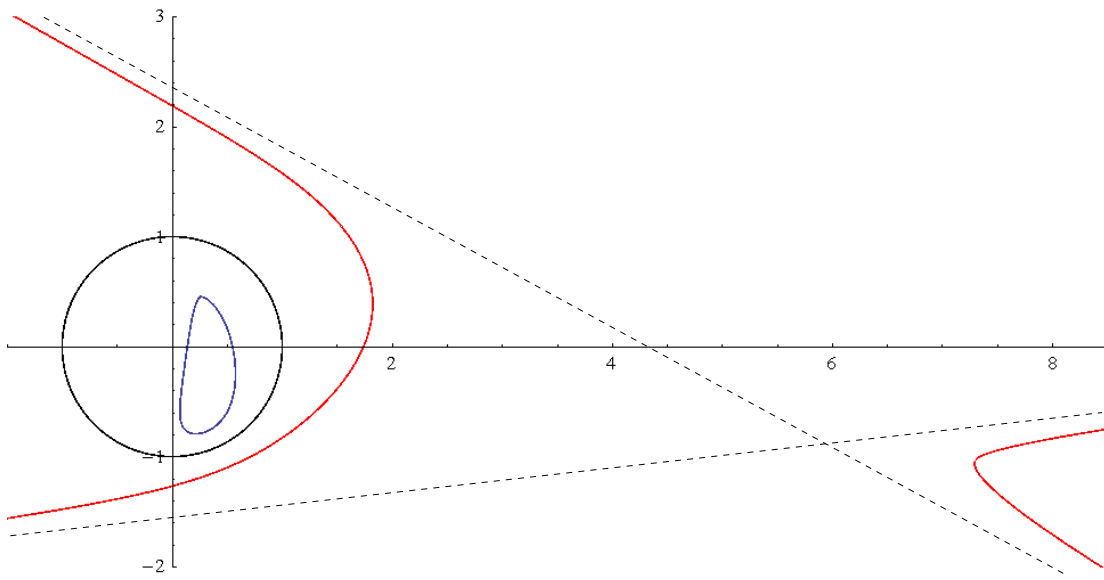


Рис. 4: Оснащенное  $\kappa$ -сферическое изображение одномерной конформно-плоской метрики (9) при  $\kappa = 9$ .

тогда получим формулы для отображений  $p, p^* : t \in S^1 \rightarrow (x, y) \in R^2$

$$x = \frac{\cos(t) (-A^2 - B^2 + C^2 \pm \kappa) - 2B(A + C \sin(t))}{A^2 + 2AB \cos(t) + 2AC \sin(t) + B^2 + C^2 \pm \kappa},$$

$$y = \frac{\sin(t) (-A^2 + B^2 - C^2 \pm \kappa) - 2C(A + B \cos(t))}{A^2 + 2AB \cos(t) + 2AC \sin(t) + B^2 + C^2 \pm \kappa}$$

**Замечание.** Образом при отображениях  $p, p^*$  будут кривые 2-го порядка. На рисунке Рис.5 изображено оснащенное  $\kappa$ -нормальное изображение одномерной конформно-плоской метрики постоянной кривизны с функцией  $g(t) = 3 + \cos(t)$  и центры кривых  $p[S^1], p^*[S^1]$ .

**Следствие 1.** Для произвольной метрики (10) кривая  $p[S^1]$  – эллипс (возможно вырожденный) лежащий внутри единичного круга. В общем случае не любой эллипс лежащий в единичном круге соответствует одномерной конформной метрике постоянной кривизны.

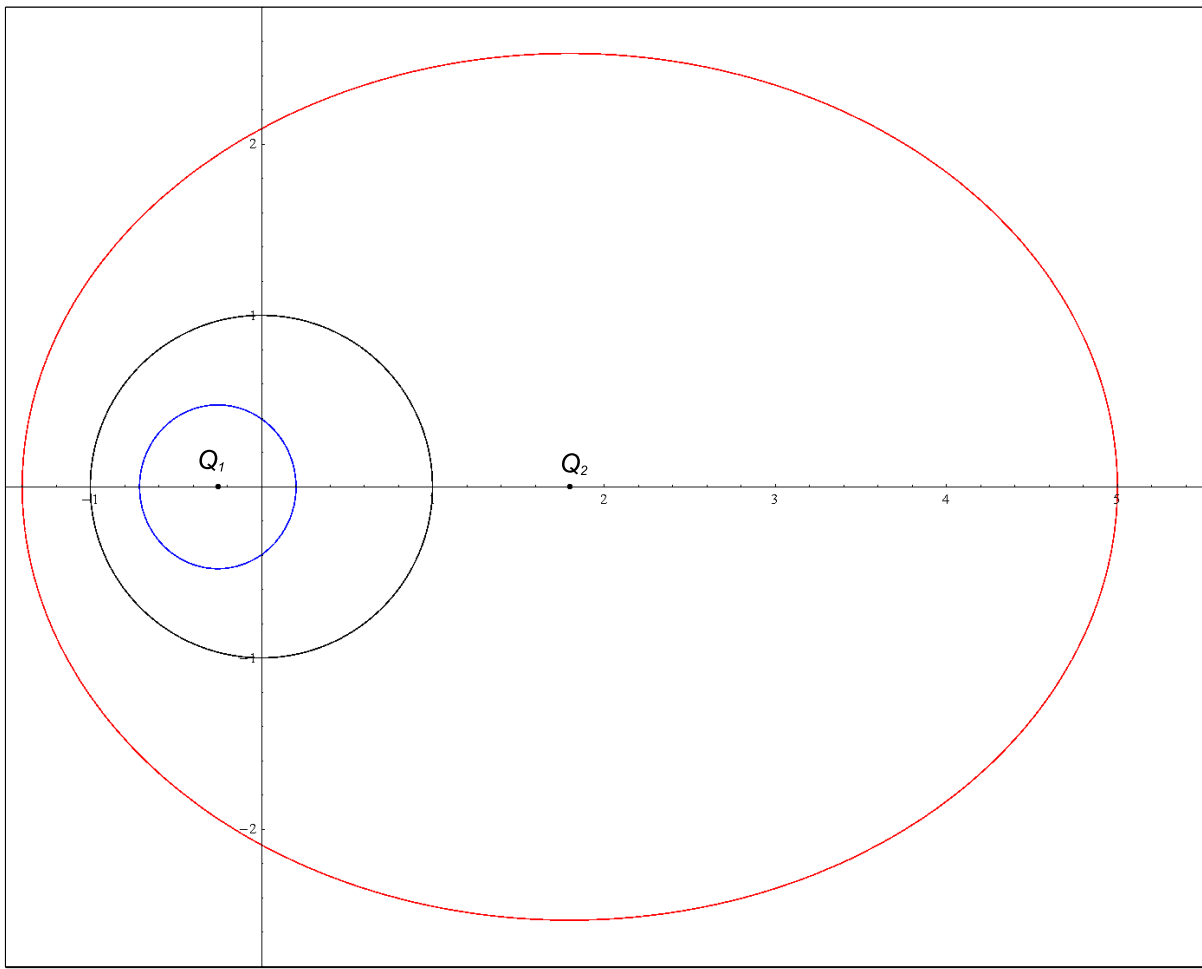


Рис. 5: Оснащенное  $\kappa$ -нормальное изображение одномерной конформно-плоской метрики  $g(t) = 3 + \cos(t)$  при  $\kappa = 24$ .

**Замечание.** Оснащенное  $\kappa$ -нормальное изображение одномерных метрик кривизна которых кусочно-постоянная:

$$K_{1/2} = g \frac{d^2g}{dt^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{dg}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} g^2 = \pm \frac{\kappa}{2}$$

представляет собой выпуклый многоугольник и полярный к нему многоугольник рис. 7

**Определение 5.** Пусть  $P$  – выпуклое замкнутое подмножество единичного круга (в общем случае шара), сопоставим каждой опорной прямой (плоскости) множества  $P$  точку, полярю этой прямой относительно окружности. Совокупность всех таких точек образует множество  $P^*$ , которое будем называть полярным

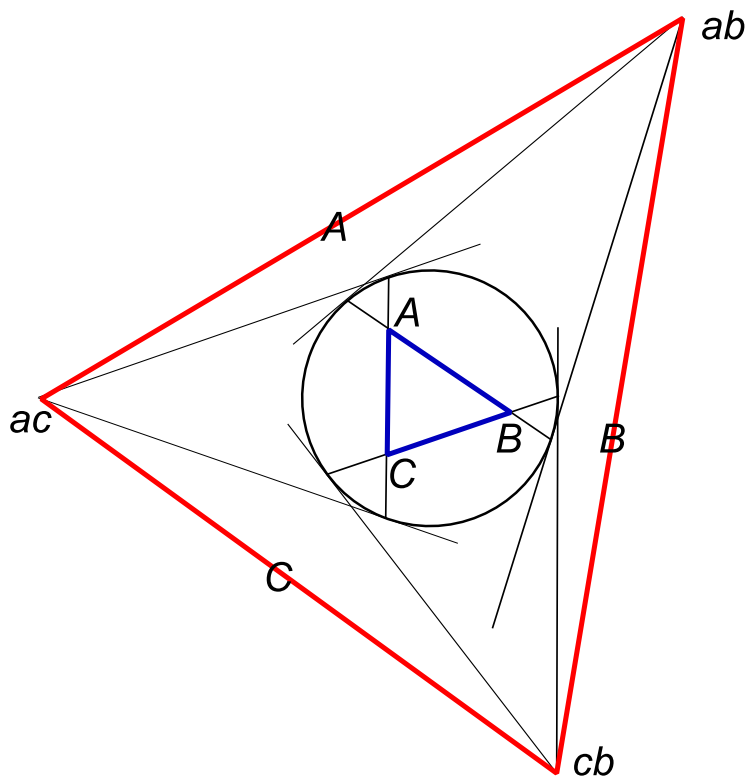


Рис. 6: Оснащенное  $\kappa$ -нормальное изображение одномерной метрики кривизны  $\pm\kappa/2$ .

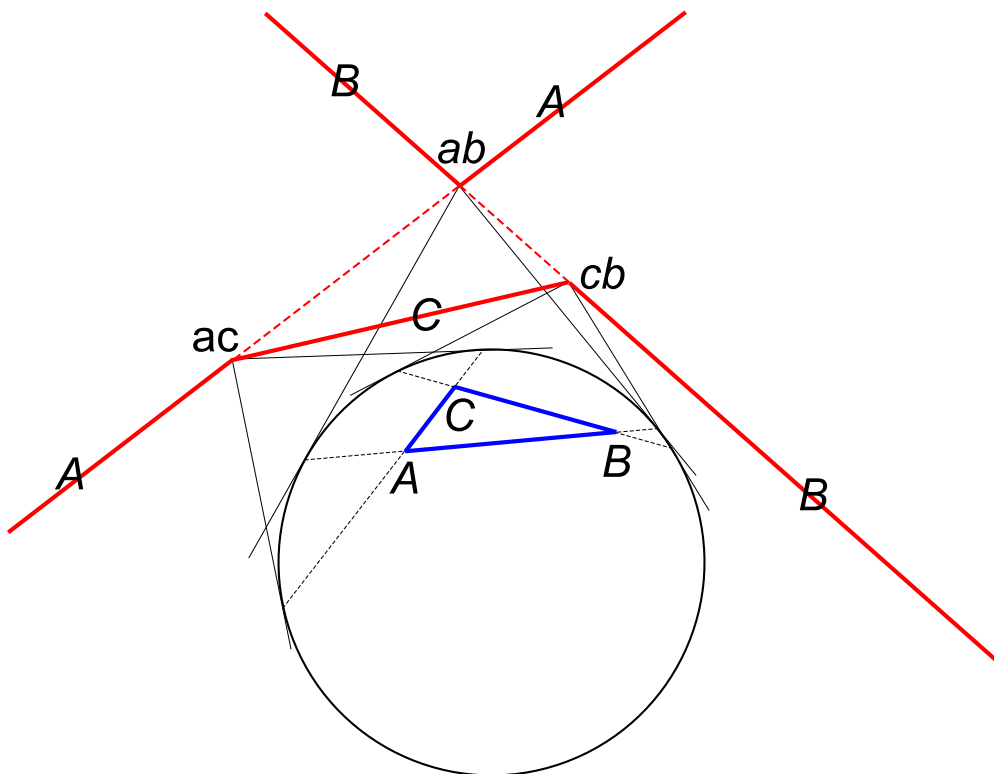


Рис. 7: Оснащенное  $\kappa$ -нормальное изображение одномерной метрики кривизны  $\pm\kappa/2$ .

преобразование множества  $P$ .

## Об одномерных конформных-плоских сплайнах

В работах [7, 8] было введено понятие конформно-плоских сплайнов, в работе [3] были разработаны соответствующие численные алгоритмы для системы MatLab. В данной работе более подробно исследуется одномерный случай. Выводятся аналитические формулы для опорной функции отрезка на плоскости Лобачевского. Определяется класс конформно-выпуклых ломанных, аналогичный классу кусочно-линейных выпуклых вниз функций.

Отрезок  $\Delta = [P_1, P_2] \subset H_\kappa^2$  на плоскости Лобачевского  $H_\kappa^2$  кривизны  $(-\kappa)$  ( $\kappa > 0$ ) определяется указанием его концов – двух точек, им соответствуют две параболы:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= a_1x^2 + \sqrt{2}xb_1 + c_1, \\f_2(x) &= a_2x^2 + \sqrt{2}xb_2 + c_2,\end{aligned}$$

или два вектора  $w_1 = [b_1, a_1, c_1]$ ,  $w_2 = [b_2, a_2, c_2]$  псевдоевклидова пространства  $M^{2,1}$  [7]. Скалярные квадраты этой пары векторов равны:

$$\begin{aligned}\langle w_1, w_1 \rangle &= g_{11} = b_1^2 - 2a_1c_1 = -\frac{\kappa}{2}, \\ \langle w_2, w_2 \rangle &= g_{22} = b_2^2 - 2a_2c_2 = -\frac{\kappa}{2}.\end{aligned}$$

Так как кривизна  $\kappa$  фиксирована, то удобнее задавать параболу  $ax^2 + \sqrt{2}xb + c$  указанием ее вершины

$M(x_0, y_0)$ . Тогда

$$a = \frac{\kappa}{4y_0}, \quad b = -\frac{\kappa x_0}{2\sqrt{2}y_0}, \quad c = \frac{\kappa x_0^2 + 4y_0^2}{4y_0}. \quad (11)$$

Соответственно квадратичные полиномы  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  примут вид:

$$f_1(x) = \frac{\kappa}{4y_1}x^2 - \frac{\kappa x_1}{2y_1}x + \frac{\kappa x_1^2 + 4y_1^2}{4y_1},$$

$$f_2(x) = \frac{\kappa}{4y_2}x^2 - \frac{\kappa x_2}{2y_2}x + \frac{\kappa x_2^2 + 4y_2^2}{4y_2},$$

где  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  – вершины соответствующих парабол. Отсюда матрица Грамма  $g = \|g_{ij}\| = \|\langle w_i, w_j \rangle\|$  и обратная к ней матрица  $G = \|g^{ij}\|$  примут вид:

$$g = -\frac{\kappa}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta_1 + \delta_2}{16y_1y_2} \\ \frac{\delta_1 + \delta_2}{16y_1y_2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = -\frac{128y_1^2y_2^2}{\kappa\delta_1\delta_2} \begin{pmatrix} -1 & \frac{\delta_1 + \delta_2}{16y_1y_2} \\ \frac{\delta_1 + \delta_2}{16y_1y_2} & -1 \end{pmatrix},$$

здесь

$$\delta_1 = \kappa(x_2 - x_1)^2 + 4(y_2 - y_1)^2,$$

$$\delta_2 = \kappa(x_2 - x_1)^2 + 4(y_2 + y_1)^2.$$

Формула для опорной функции прямой проходящей через точки  $P_1, P_2$  теоремы 3.7. [8] примет вид:

$$\delta_{\{f_1, f_2\}}(x) = \sqrt{f_j(x) f_k(x) g^{jk} \frac{-\kappa}{2}} = |ax^2 + \sqrt{2}bx + c|,$$

где коэффициенты вектора  $w = [b, a, c]$  находятся из равенств:

$$b = \sqrt{\frac{\kappa}{\delta_1 \delta_2} \frac{\kappa(x_2^2 - x_1^2) + 4(y_2^2 - y_1^2)}{\sqrt{2}}},$$

$$a = \sqrt{\frac{\kappa}{\delta_1 \delta_2}} \kappa(x_1 - x_2),$$

$$c = \sqrt{\frac{\kappa}{\delta_1 \delta_2}} \left( \kappa x_1 x_2 (x_1 - x_2) + 4x_2 y_1^2 - 4x_1 y_2^2 \right).$$

Подставляя получим явную формулу:

$$\delta_{\{f_1, f_2\}}(x) = \sqrt{\frac{\kappa}{\delta_1 \delta_2}} \times \\ \times \left| \kappa(x_1 - x_2)(x - x_1)(x - x_2) - \right. \\ \left. - 4(x - x_2)y_1^2 + 4(x - x_1)y_2^2 \right|$$

Функции  $f^j = G^{ji} f_i$  равны

$$f^1 = -\frac{128y_1^2 y_2^2}{\kappa \delta_1 \delta_2} \left( -f_1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{16y_1 y_2} f_2 \right),$$

$$f^2 = -\frac{128y_1^2 y_2^2}{\kappa \delta_1 \delta_2} \left( \frac{\delta_1 + \delta_2}{16y_1 y_2} f_1 - f_2 \right).$$

Так как важен лишь знак  $f^1, f^2$  то можно использовать

$$\tilde{f}^1 = f_1 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{16y_1 y_2} f_2, \quad \tilde{f}^2 = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{16y_1 y_2} f_1 + f_2.$$

В результате получаем явную формулу для сплайна

$h_{\Delta}$ :

$$h_{M_1, M_2, \kappa}(x) = \begin{cases} \delta_{\{f_1, f_2\}}(x) & \text{если } \tilde{f}^1 \geq 0, \tilde{f}^2 \geq 0 \\ \min \{f_1(x), f_2(x)\} & \text{иначе,} \end{cases} \quad (12)$$

где  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  – вершины соответствующих парабол,  $\kappa$  – кривизна плоскости Лобачевского.

**Определение.** Пусть  $M_i(x_i, y_i)$   $i = 1, \dots, n$  упорядоченная последовательность вершин парабол, т.е.  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,  $y_i > 0$  и число  $\kappa > 0$  такие, что соответствующая последовательность точек  $P_i$   $i = 1, \dots, n$  в плоскости Лобачевского  $H_{\kappa}^2$  составляет локально выпуклую ломанную. Функцию

$$f(x) = \min_{i=1, \dots, n-1} \{h_i(x)\} \quad (13)$$

где  $h_i(x) = h_{M_i, M_{i+1}, \kappa}(x)$   $i = 1, \dots, n-1$ , назовем конформно-выпуклой ломанной. В отличие от обычной кусочно-линейной выпуклой функции эта функция будет класса  $C^{1,1}$ .

**Определение.** Тройку точек  $P_1P_2P_3$  на плоскости Лобачевского назовем положительно ориентированной, если определитель

$$D = \det \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{bmatrix} > 0,$$

где  $[b_i, a_i, c_i]$  соответствующие векторы псевдоевклидова пространства  $M^{2,1}$ . Используя формулы (11) можно

определитель  $D$  выразить, через координаты вершин парабол:

$$D = \frac{\kappa^3 (x_2 - x_1) (x_3 - x_1) (x_3 - x_2)}{32\sqrt{2}y_1y_2y_3} + \frac{\kappa^2 (4y_1^2(x_3 - x_2) + 4y_2^2(x_1 - x_3) + 4y_3^2(x_2 - x_1))}{32\sqrt{2}y_1y_2y_3}.$$

Отсюда получаем условие на кривизну  $\kappa$

$$\kappa > \frac{4y_1^2(x_3 - x_2) + 4y_2^2(x_1 - x_3) + 4y_3^2(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1) (x_3 - x_1) (x_3 - x_2)}. \quad (14)$$

**Следствие.** Для любой упорядоченной последовательности вершин  $M_i(x_i, y_i)$   $i = 1, \dots, n$  вершин парабол, определено число  $\kappa_0 > 0$  такое, что при  $\kappa \geq \kappa_0$  функция (13) будет конформно-выпуклой ломанной.

**Пример.** Рассмотрим ломанную определяемую 5 пятью вершинами парабол см. таблицу 1:

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$
$x$	-1	0	1	2	3
$y$	1/3	1/10	1	1/3	1/7

Таблица 1: Данные

Тогда  $\kappa_0 = \frac{1691}{450}$ . На рисунках 8 и 9 с помощью пакета Mathematica построены графики сплайнов  $h_1, h_2, h_3, h_4$  соответствующие четырем звеньям данной ломанной. На рисунке 10 изображена соответствующая конформно-выпуклая ломанная.

**Замечание.** Из определения конформно-выпуклой ломанной  $f(x)$  следует, что

$$\min_x f(x) = \min_{i=1, \dots, n} \{y_i\} \quad (15)$$



где  $y_i$  – ординаты вершин парабол отвечающих вершинам ломанной. Данное свойство конформно-выпуклых ломанных аналогично свойству кусочно-линейных выпуклых вниз функций и может быть использовано в задачах оптимального управления.

**Приложение.** Ниже на языке математического пакета Mathematica указаны процедуры использованные в статье. Сначала определяются вспомогательные функции:

```
scal[z_,w_]:=z[[1]]*w[[1]]-z[[2]]*w[[3]]-z[[3]]*w[[2]];
HG[x_,y_,k_]:={-((k x)/(2 Sqrt[2] y)),k/(4 y),
(k x^2+4 y^2)/(4 y)};
DHG[m_,k_]:=Simplify[Det[{Apply [HG,Join[m[[1]],{k}],
Apply [HG,Join[m[[2]],{k}],
Apply [HG,Join[m[[3]],{k}]}]}];
tt={Sqrt[2]t,-1,-t^2};
z1=HG[x1,y1,k];
z2=HG[x2,y2,k];
d1=(k x1^2-2 k x1 x2+k x2^2+4 y1^2-8 y1 y2+4 y2^2);
d2=(k x1^2-2 k x1 x2+k x2^2+4 y1^2+8 y1 y2+4 y2^2);
gg=Sqrt[k/(d1*d2)]*(k*(x1-x2)*(t-x1)*(t-x2)
-4*(t-x2)*y1^2+4*(t-x1)*y2^2);
gg1=D[gg,t];
f1=scal[z1,tt];
f2=scal[z2,tt];
f1d=D[f1,t];
f2d=D[f2,t];
Ff=FullSimplify[({{1,-(d1+d2)/(16*y1*y2)},
{-(d1+d2)/(16*y1*y2),1}}).{f1,f2}];
```

Затем сама процедура вычисления сплайна, на выходе она выдает значение conf сплайна и его производной conf1 в заданной точке:

```
FCON[xx1_,yy1_,xx2_,yy2_,kk_,tt_]:=
Module[{pods,F11,F12,ff1,ff2,g0,ggg,ggg1,conf,conf1},
pods={x1->xx1,y1->yy1,x2->xx2,y2->yy2,t->tt,k->kk};
F11=Ff[[1]]/.pods;
F12=Ff[[2]]/.pods;
ff1=f1/.pods;
ff2=f2/.pods;
g0=gg/.pods;
```

```
ggg=Abs [g0] ;  
ggg1=If [g0>0,gg1/.pods,-gg1/.pods] ;  
conf1=If [(F11<0)&&(F12<0),ggg1,  
If [ff1<ff2,f1d/.pods,f2d/.pods]] ;  
conf=If [(F11<0)&&(F12<0),ggg,Min [ff1,ff2]] ;{conf,conf1} ;
```

## Список литературы

- [1] Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В. Об одномерных конформных-плоских сплайнах // Материалы международной школы-семинара “Ломоносовские чтения на Алтае 2012” Барнаул: 22-23 ноября, 2012, Ч1. С. 306-312.
- [2] Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В. Конформные сплайн-функции // “Современные проблемы математики и механики”, том VI, выпуск 2, 2011. Издательство Московского Университета. С. 112-129.
- [3] *Куркина М.В., Родионов Е.Д., Славский В.В.* Численные методы интерполяции основанные на выпуклой геометрии в пространстве Лобачевского // Вестник НГУ: Математика, механика, информатика. Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 13:1 (2013), 76-90
- [4] Родионов Е. Д., Славский В. В. Конформно-плоские римановы пространства и их обобщения // Труды международной конференции “Дни геометрии в Новосибирске, 2011”, Новосибирск: 2012. С. 45-94.

- [5] Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии // Учебное пособие для вузов, М., Высшая школа. 1967. С. 655.
- [6] Куркина М.В., Родионов Е.Д., Славский В.В. Об одномерных конформных-плоских сплайнах / Материалы международной школы-семинара “Ломоносовские чтения на Алтае 2012” Барнаул, 22-23 ноября, 2012, Ч1. С. 306-312.
- [7] Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформные сплайн-функции / “Современные проблемы математики и механики”, том VI, выпуск 2, 2011. Издательство Московского Университета. ISBN 978-5-211-05652-7, С.112-129.
- [8] Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформно-плоские римановы пространства и их обобщения / Труды международной конференции “Дни геометрии в Новосибирске, 2011”, Новосибирск – 2012. С.45-94.

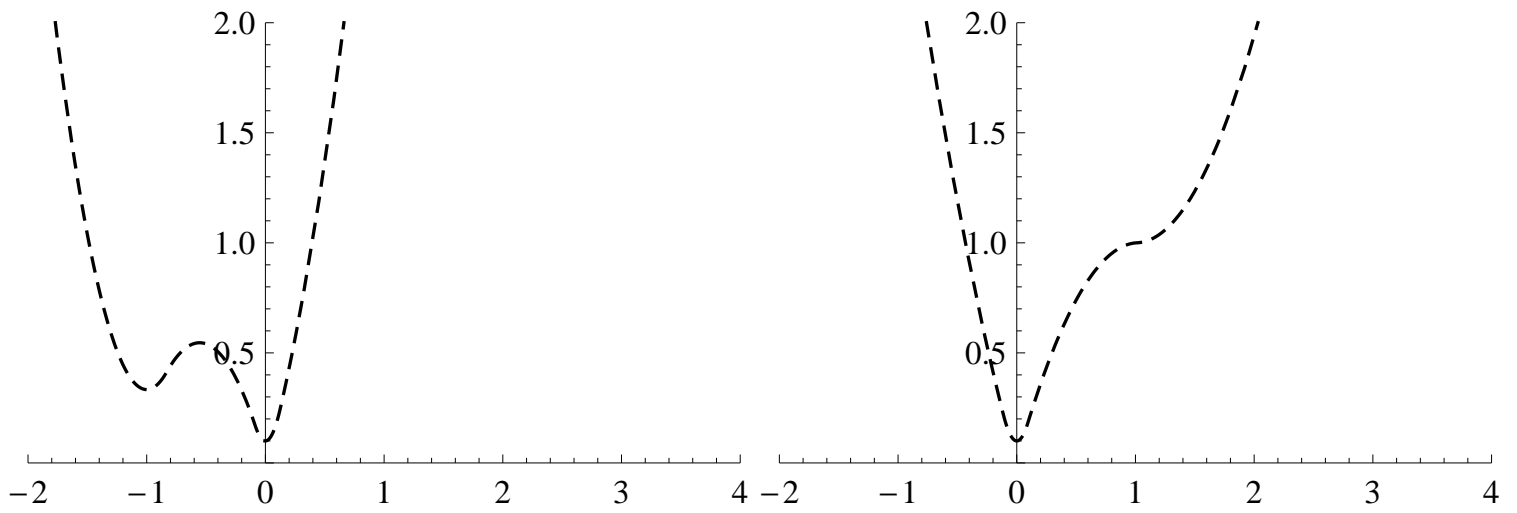


Рис. 8: Сплаины  $h_1, h_2$ .

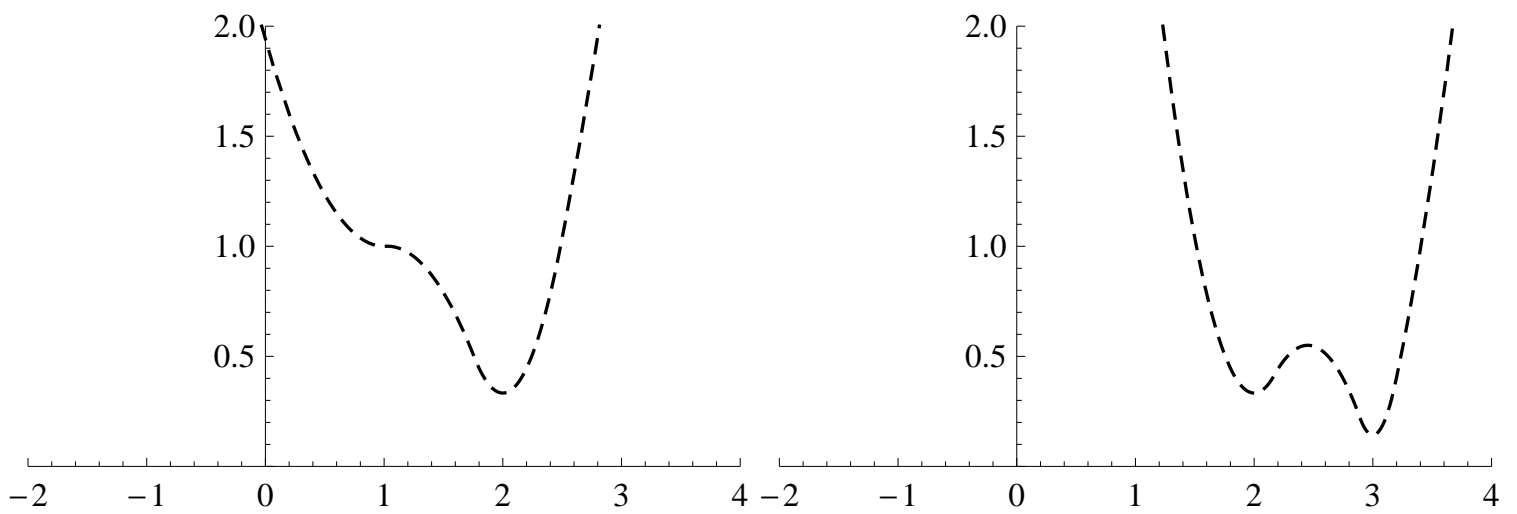


Рис. 9: Сплаины  $h_3, h_4$ .

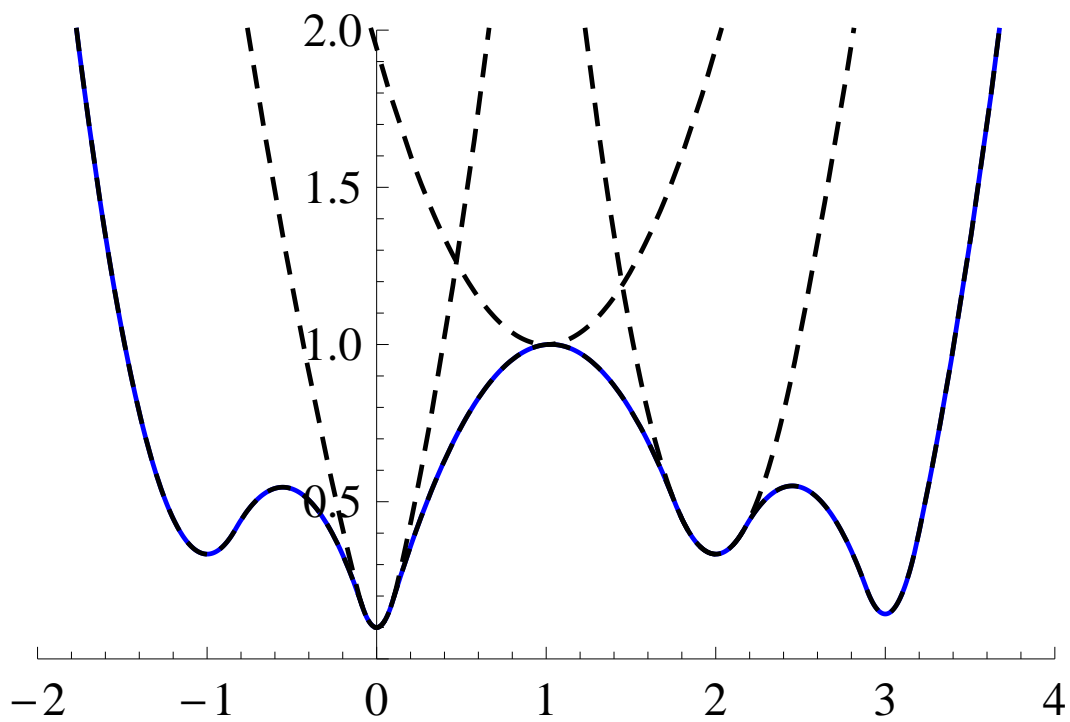


Рис. 10: Функция  $f(x) = \min_{i=1, \dots, 4} \{h_i(x)\}$ .