РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОТОБРАЖЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ

Анастасия Олеговна Молчанова

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор С. К. Водопьянов

г. Новосибирск, 30 августа 2013 г.

Краевая задача для стационарной теории упругости

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ T_R(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ T_R(x)n = g(x), & x \in \Gamma_1, \\ \varphi(x) = \varphi_0(x), & x \in \Gamma_0, \end{cases}$$

$T_R(x)$ — первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа,
$f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ — массовые силы,
$g : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ — поверхностные силы,
$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$.

Задача минимизации функционала

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi), \; \varphi \in \mathcal{A}$$

Задача минимизации функционала

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi), \ \varphi \in \mathcal{A}$$

$$I(x, \psi) = \int_{\Omega} W(x, D\psi(x))\, dx - \left(\int_{\Omega} f\psi\, dx + \int_{\Gamma_1} g\psi\, ds \right)$$

Поливыпуклость

$\mathbb{M}^n$ — множество $(n \times n)$-матриц.

Функция $W : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ называется **поливыпуклой,** если существует выпуклая функция $G : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$ выполнено равенство

$$G(F, \operatorname{Adj} F, \det F) = W(F)$$

$\mathbb{M}^n$ — множество $(n \times n)$-матриц.

Функция $W : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ называется **поливыпуклой,** если существует выпуклая функция $G : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$ выполнено равенство

$$G(F, \operatorname{Adj} F, \det F) = W(F)$$

$$W(F) = \det F$$

Поливыпуклость

$\mathbb{M}^n$ — множество $(n \times n)$-матриц.

Функция $W : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ называется **поливыпуклой,** если существует выпуклая функция $G : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$ выполнено равенство

$$G(F, \operatorname{Adj} F, \det F) = W(F)$$

$$W(F) = \det F$$

$$W(F) = \operatorname{tr} \operatorname{Adj} F^T F$$

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

Неравенство коэрцитивности

φ

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

Неравенство коэрцитивности

Поливыпуклость

φ

$$I(\varphi) \leq \varliminf_{k\to\infty} I(\varphi_k)$$

Метод Болла

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

Неравенство коэрцитивности	φ
Поливыпуклость	$I(\varphi) \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} I(\varphi_k)$
Барьерность	$\varphi \in \mathcal{A}$

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

Неравенство коэрцитивности	φ
Поливыпуклость	$I(\varphi) \leq \varliminf_{k\to\infty} I(\varphi_k)$
Барьерность	$\varphi \in \mathcal{A}$
Гомеоморфизм на границе и барьерность	φ — гомеоморфизм

Теорема Дж. Болл, 1981

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей, $W : \Omega \times \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии, которая обладает следующими свойствами:

Теорема Дж. Болл, 1981

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей, $W : \Omega \times \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии, которая обладает следующими свойствами:

(a) Поливыпуклость:

существует выпуклая функция $G(x, \cdot) : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$, выполнено равенство

$$G(x, F, \operatorname{Adj} F, \det F) = W(x, F)$$

почти всюду в Ω.

(b) Коэрцитивность:

существуют постоянные $\alpha > 0$, $p > n$, $q > n$, $r > 1$, $s > \frac{(n-1)q}{q-n}$ и функция $g \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$W(x, F) \geq \alpha(||F||^p + ||\operatorname{Adj} F||^q + (\det F)^r + (\det F)^{-s}) + g(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$.

Пусть $\Gamma = \partial\Omega,\ \varphi_0 \in W^1_p(\Omega),\ \varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — гомеоморфизм, множество

$$\mathcal{A} = \{\psi \in W^1_p(\Omega),\ \mathrm{Adj}\, D\psi \in L_q(\Omega),\ J(x,\psi) \in L_r(\Omega),$$
$$\psi|_\Gamma = \varphi_0|_\Gamma \text{ п. вс. на } \Gamma,\ J(x,\psi) > 0 \text{ п. вс. в } \Omega\}$$

непусто.

Теорема Дж. Болл, 1981

Определим функционал

$$I(\psi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\psi(x))\, dx$$

и предположим, что $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Теорема Дж. Болл, 1981

Определим функционал

$$I(\psi) = \int_{\Omega} W(x, D\psi(x))\, dx$$

и предположим, что $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Тогда существует по крайней мере одна функция $\varphi \in \mathcal{A}$ такая, что

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi).$$

Теорема Дж. Болл, 1981

Определим функционал

$$I(\psi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\psi(x))\,dx$$

и предположим, что $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Тогда существует по крайней мере одна функция $\varphi \in \mathcal{A}$ такая, что

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi).$$

Причем, $\varphi : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — гомеоморфизм.

Материалы Огдена

$$W(F) = \sum_{i=1}^{M} a_i \operatorname{tr}\left(F^T F\right)^{\frac{\gamma_i}{2}} + \sum_{j=1}^{N} b_j \operatorname{Adj}(F^T F)^{\frac{\delta_j}{2}} + \Gamma(\det F),$$

где $a_i > 0,\ b_j > 0,\ \gamma_i \geq 1,\ \delta_j \geq 1,$
$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция.

Гиперупругие материалы

Материалы Огдена

$$W(F) \; = \; \sum_{i=1}^{M} a_i \,\mathrm{tr}\, (F^T F)^{\frac{\gamma_i}{2}} + \sum_{j=1}^{N} b_j \; \mathrm{Adj}(F^T F)^{\frac{\delta_j}{2}} + \Gamma(\det F),$$

где $a_i > 0,\ b_j > 0,\ \gamma_i \geq 1,\ \delta_j \geq 1,$
$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция.

Материал Сен-Венана—Кирхгофа

$$W(E) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}E)^2 + \mu \mathrm{tr}E^2,$$

$I + 2E = F^T F,\ \lambda,\ \mu$ — коэффициенты Ламэ.

$\psi \in W_p^1(\Omega),\ p > n$

$\psi \in W_n^1(\Omega)$

$\psi \in W_p^1(\Omega),\ p > n$

$\operatorname{Adj} D\psi \in L_q(\Omega),\ q > n$

$\psi \in W_n^1(\Omega)$

$\psi \in W_p^1(\Omega),\ p > n$

$\operatorname{Adj} D\psi \in L_q(\Omega),\ q > n$

$J(x, \psi) > 0$ п. вс. в Ω

$\psi \in W_n^1(\Omega)$

$J(x, \psi) \geq 0$ п. вс. в Ω

$\psi \in W_p^1(\Omega),\ p > n$

$\operatorname{Adj} D\psi \in L_q(\Omega),\ q > n$

$J(x,\psi) > 0$ п. вс. в Ω

$\lim\limits_{\det F \to 0_+} W(x,F) = \infty$

$\psi \in W_n^1(\Omega)$

$J(x,\psi) \geq 0$ п. вс. в Ω

$\psi \in W_p^1(\Omega),\ p > n$

$\operatorname{Adj} D\psi \in L_q(\Omega),\ q > n$

$J(x, \psi) > 0$ п. вс. в Ω

$\lim\limits_{\det F \to 0_+} W(x, F) = \infty$

$$W(x, F) \geq \alpha(||F||^p + \\ + ||\operatorname{Adj} F||^q + \\ + (\det F)^r + (\det F)^{-s})$$

$\psi \in W_n^1(\Omega)$

$J(x, \psi) \geq 0$ п. вс. в Ω

$$W(x, F) \geq \alpha(||F||^n + \\ + (\det F)^r)$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{|D\psi(x)|^n}{J(x,\psi)} \right)^s dx < M, \; s > n-1$$

Теорема

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей. Рассмотрим функционал

$$I(\psi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\psi(x))\, dx.$$

$W : \Omega \times \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии, которая обладает следующими свойствами:

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей. Рассмотрим функционал

$$I(\psi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\psi(x))\, dx.$$

$W : \Omega \times \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии, которая обладает следующими свойствами:

(a) Поливыпуклость:

существует выпуклая функция $G(x, \cdot) : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F \geq 0$, выполнено равенство

$$G(x, F, \operatorname{Adj} F, \det F) = W(x, F)$$

почти всюду в Ω.

(b) Коэрцитивность:

существуют постоянные $\alpha > 0,\ r > 1$ и функция $g \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$W(x, F) \geq \alpha(||F||^n + (\det F)^r) + g(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F \geq 0$.

Теорема

Пусть $\Gamma = \partial\Omega,\ \varphi_0 \in W_n^1(\Omega)$

$$\mathcal{A} = \{\psi \in W_n^1(\Omega),\ J(x,\psi) \in L_r(\Omega),\ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|D\psi(x)|^n}{J(x,\psi)} \right)^s dx < M,$$

$$s > n-1,\ \psi|_\Gamma = \varphi_0|_\Gamma \text{ п. вс. на } \Gamma,\ J(x,\psi) \geq 0 \text{ п. вс. в } \Omega\}$$

Теорема

Пусть выполнены условия **(a)** и **(b)** на функцию $W(x, F)$, $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — гомеоморфизм, множество $\mathcal{A}$ непусто и $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Теорема

Пусть выполнены условия **(a)** и **(b)** на функцию $W(x, F)$, $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — гомеоморфизм, множество $\mathcal{A}$ непусто и $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Тогда существует по крайней мере одно отображение $\varphi \in \mathcal{A}$ такое, что

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi).$$

Теорема

Пусть выполнены условия **(a)** и **(b)** на функцию $W(x, F)$, $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — гомеоморфизм, множество $\mathcal{A}$ непусто и $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Тогда существует по крайней мере одно отображение $\varphi \in \mathcal{A}$ такое, что

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi).$$

Причем, $\varphi : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — гомеоморфизм.

Пример

$$W(F) = a\,\mathrm{tr}\,(F^T F)^{\frac{3}{2}} + c\,(\det F)^r,$$

$$a > 0,\ c > 0,\ r > 1.$$

Пример

$$W(F) = a\,\mathrm{tr}\,(F^T F)^{\frac{3}{2}} + c\,(\det F)^r,$$

$$a > 0,\ c > 0,\ r > 1.$$

W — поливыпукла,

$$W(F) \geq \alpha ||F||^3 + c(\det F)^r.$$

Спасибо за внимание!