О подклассах направленных топологических пространств

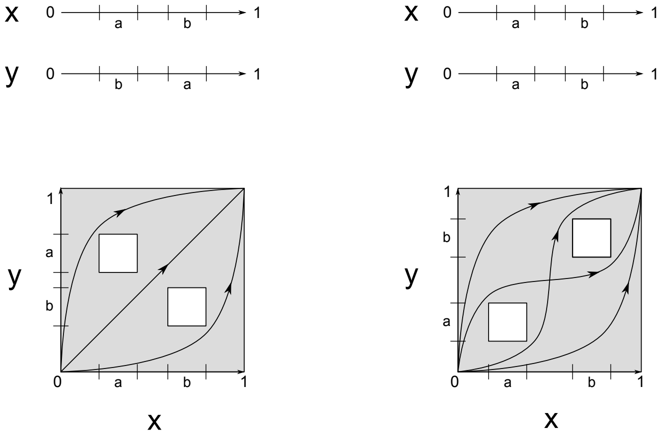
Елена Ошевская

Институт Математики им. С.Л. Соболева

Дни геометрии в Новосибирске

28-31 августа 2013

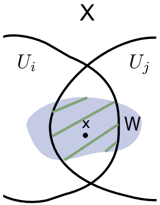
Два параллельных процесса x и y, конкурирующих за два рессурса a и b



Направленная топология (Л. Фейструп, М. Рауссен и Э. Губо, 1998:)

Направленное топологическое пространство — топологическое пространство X с открытым покрытием U, чьи элементы U_i наделены ч.п. $\leq_i$, согласованными на $U_i \cap U_j$:

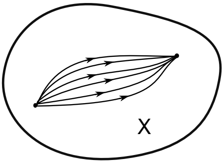
$$\forall x \in X \ \exists W \in Op(X) : \leq_i = \leq_j \ \text{ на } W \cap U_i \cap U_j.$$



Направленное отображение — непрерывное отображение, сохраняющее $\leq_i$.

Направленный путь — направленное отображение $\overrightarrow{[0,1]} \to X$.

Направленная гомотопия — гомотопия, являющаяся направленным отображением $H : [0,1] \times \overrightarrow{[0,1]} \to X$.



Полукубические множества (К.П. Рурк, Б.Дж. Сандерсон, 1971)

Полукубическое множество M состоит из набора попарно непересекающихся множеств

$$\{M_n\}_{n \geq 0}$$

и граничных отображений

$$d^0_\lambda, d^1_\mu : M_{n+1} \to M_n,$$

удовлетворяющих кубическим законам ($\lambda < \mu$ и $\alpha, \beta = 0, 1$):

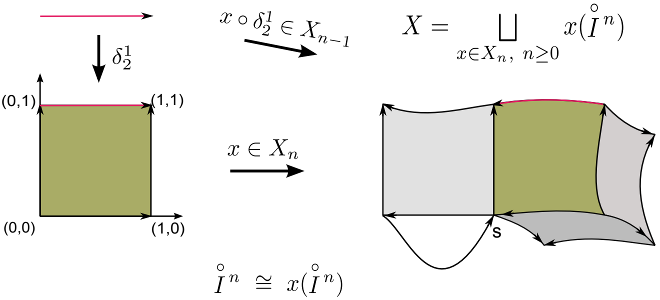
$$d^\alpha_\lambda \circ d^\beta_\mu = d^\beta_{\mu-1} \circ d^\alpha_\lambda.$$

Полукубическое отображение f из M в M' коммутирует с граничными отображениями:

$$f \circ d^\alpha_\lambda = d^\alpha_\lambda \circ f.$$

Полукубические пространства (Э. Губо, 1995)

Компактно порожденное ($A \in Cl(X) \Leftrightarrow A \cap K \in Cl(K)\ \forall K \in Compact(X)$)
Хаусдорфово пространство X называется полукубическим пространством, если

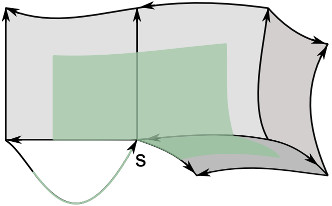


и $\|\cdot\|$ — непрерывное семейство норм на TX.

Непрерывное отображение $f : X \to X'$ называется полукубическим, если $x \in X_n$ влечет $f \circ x \in X'_n$.

Задание направления на полукубических пространствах

$$X \subseteq \bigcup_{s\text{ — вершина } X} St_{\frac{2}{3}}(s, X)$$

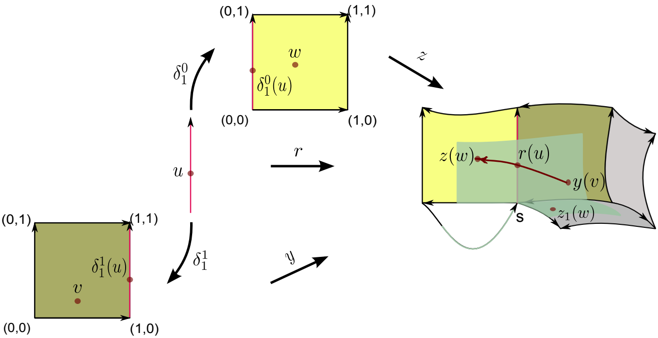


На каждом $St_{\frac{2}{3}}(s, X)$ существует ч.п. $\leq_s$:

$$y(v) \leq_s z(w) \;\Leftrightarrow\; \exists r(u) \in St_{\frac{2}{3}}(s, X) \text{ т.ч.}$$

$$v \leq \delta^1_{\lambda_k} \circ \cdots \circ \delta^1_{\lambda_1}(u) \;\text{ и }\; \delta^0_{\mu_n} \circ \cdots \circ \delta^0_{\mu_1}(u) \leq w$$

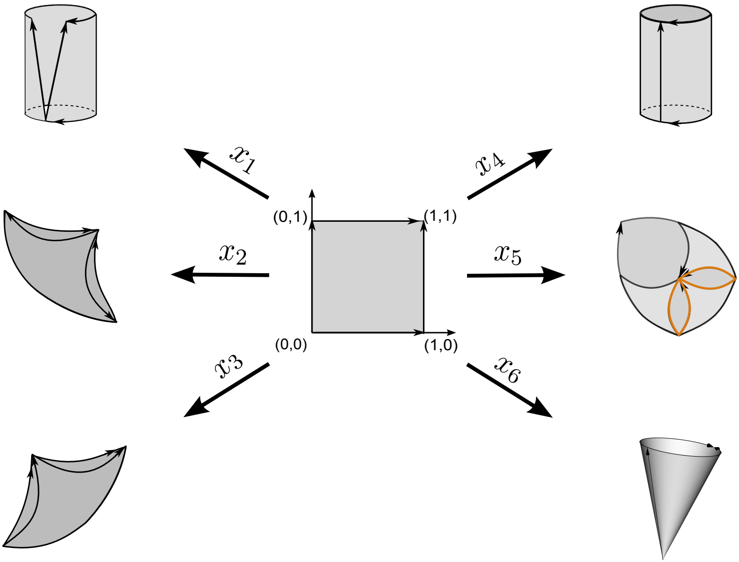
Пример направления на полукубических пространствах



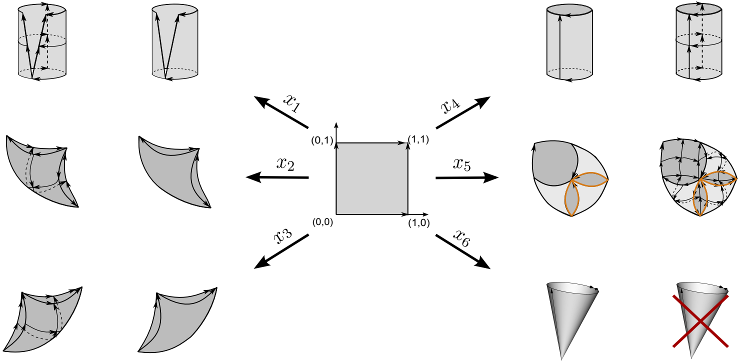
$$y(v) \leq_s z(w) \;\Leftrightarrow\; \exists r(u) \in St_{\frac{2}{3}}(s, X) \text{ т.ч.}$$

$$v \leq \delta_1^1(u) \;\text{ и }\; \delta_1^0(u) \leq w \;\text{ покоординатно}$$

Самопересечения на полукубических пространствах на примере квадрата



Самопересечения на полукубических пространствах на примере квадрата



Основные теоремы

Теорема 1. Невырожденные полукубические пространства, обладающее топологией CW-комплекса, представимы в виде направленных топологических пространств, а полукубические отображения — в виде направленных отображений.

Теорема 2. Невырожденные полукубические множества представимы в виде направленных топологических пространств, а полукубические отображения — в виде направленных отображений.

Спасибо за внимание