ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЫ О БИАЛГЕБРАХ

Михаил Овчинников

Челябинский государственный университет

August 30, 2013

Биалгебра

Биалгебра – это линейное пространство A, снабженное четырьмя операциями, связанными естественными соотношениями.

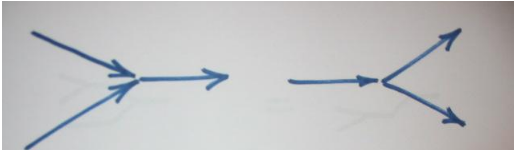
$$\bigtriangledown : A \otimes A \to A$$

$$\bigtriangleup : A \to A \otimes A$$

$$\eta : R \to A$$

$$\varepsilon : A \to R$$

Постановка задачи использует только умножение и коумножение.



Соотношения

Естественные соотношения это соотношения ассоциативности умножения и коассоциативности коумножения.

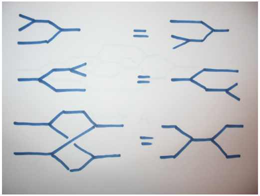
$$(\bigtriangledown \otimes Id) \circ \bigtriangledown = (Id \otimes \bigtriangledown) \circ \bigtriangledown$$

$$\bigtriangleup \circ (\bigtriangleup \otimes Id) = \bigtriangleup \circ (Id \otimes \bigtriangleup)$$

Умножение и коумножение связаны соотношением

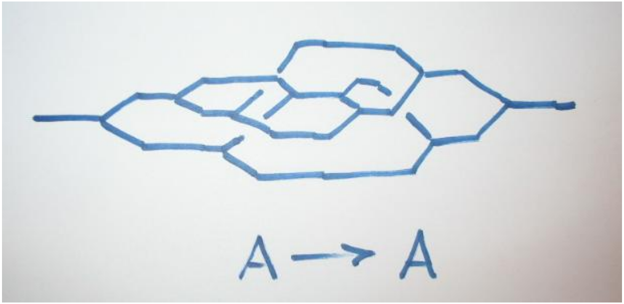
$$\bigtriangledown \circ \bigtriangleup = (\bigtriangleup \otimes \bigtriangleup) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\bigtriangledown \otimes \bigtriangledown),$$

где τ – перестановка сомножителей в произведении $A \otimes A$, и суперпозиции выполняются слева направо.



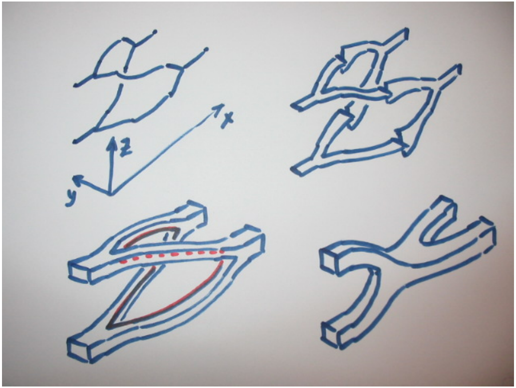
Граф схемы умножений-коумножений

Пусть такая схема осуществляет отображение $A \to A$. Схема умножений и коумножений, составляющих это отображение, представляет собой ориентированный граф, у которого две вершины валентности 1 и остальные – валентности 3. Каждая вершина валентности 3 соответствует умножению или коумножению.



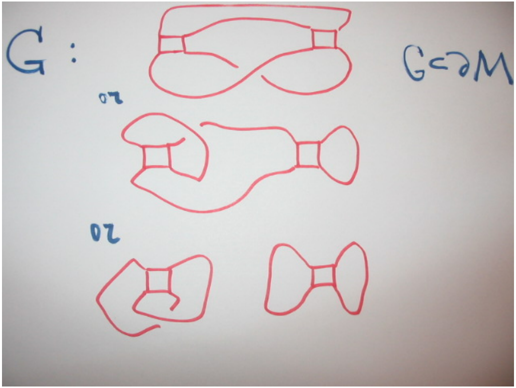
Полный крендель с узором

Рассматривается следующий способ построения трехмерного многообразия по графу схемы умножений-коумножений. Для иллюстрации применим эту процедуру к обеим частям соотношения для умножений и коумножений. После приклейки 2-ручки вдоль замкнутой кривой конструкции становятся эквивалентными.



Трехмерное многообразие с узором

Вдоль замкнутых кривых приклеиваются ручки индекса 2. Поскольку мы ограничились схемой для $A \to A$, то у нас получается некоторое трехмерное многообразие M с узором G в крае многообразия, состоящим из двух квадратов и четырех соединяющих дуг.



Вопрос

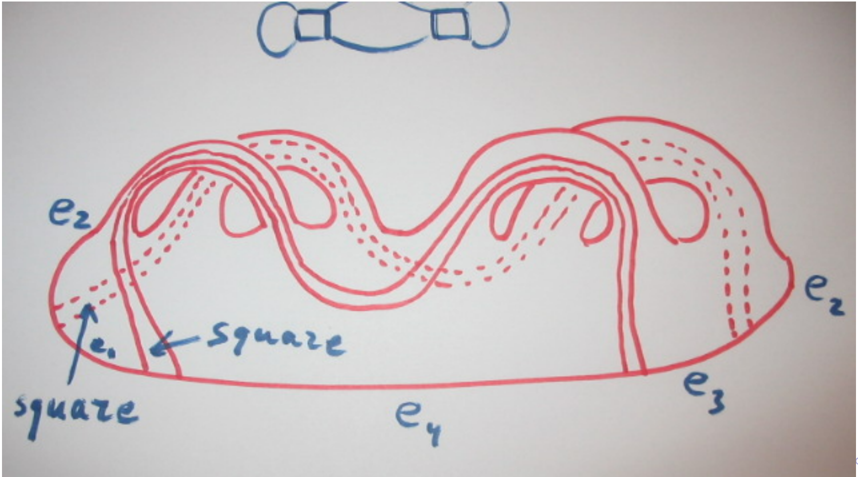
Схемы, эквивалентные в силу соотношений в биалгебре, дают гомеоморфные пары вида (многообразие, узор). Вопрос: могут ли неэквивалентные схемы привести к одной и той же паре ?

Теорема

Две операции эквивалентны тогда и только тогда, когда отвечающие им многообразия с узорами гомеоморфны (как пары).

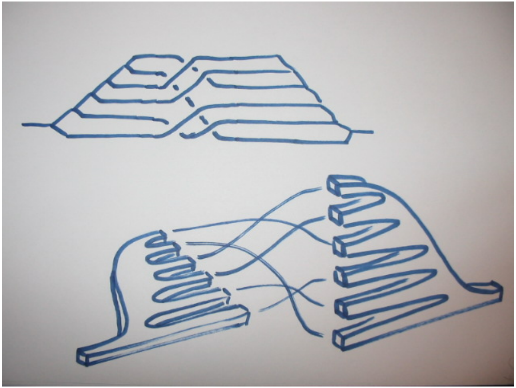
Утверждение

Многообразие M гомеоморфно $F \times I$, где F – собственная поверхность в M с краем, состоящим из четырех “соединительных” ребер графа G и четырех ребер, входящих в квадраты. Квадраты лежат по разные стороны от поверхности F.



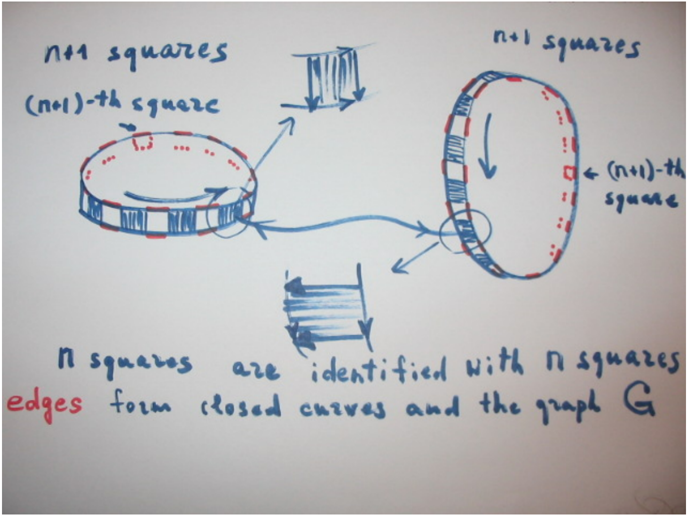
Сведение к перестановке

Благодаря трем соотношениям обеспечиваем: вначале только коумножения, потом перестановки, потом – умножения.



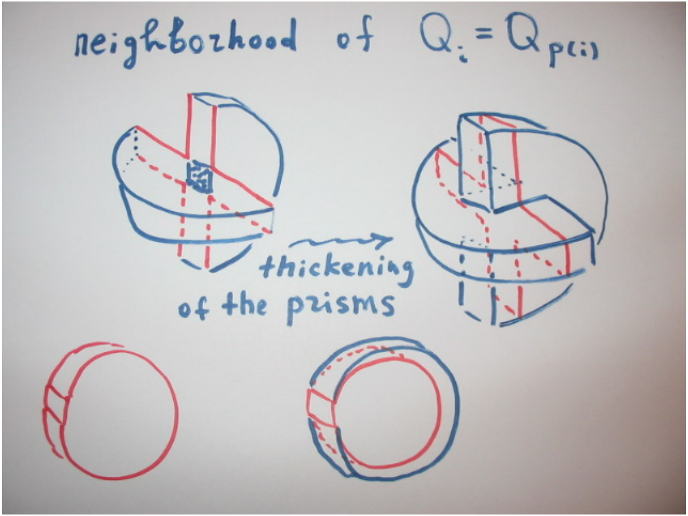
Склейка призм

Геометрически тот же результат получается склейкой призм.



Раздутие призм

Чтобы увидеть поверхность F внутри многообразия M, раздуем призмы...



Деформация призм в параллелепипеды

А затем придадим призмам вид толстых полос.
Отождествление полос дает “толстую” поверхность $F_0 \times I$.
Приклейка 2-ручек – это заклейка некоторых дыр у этой поверхности – получаем искомое представление $F \times I$.

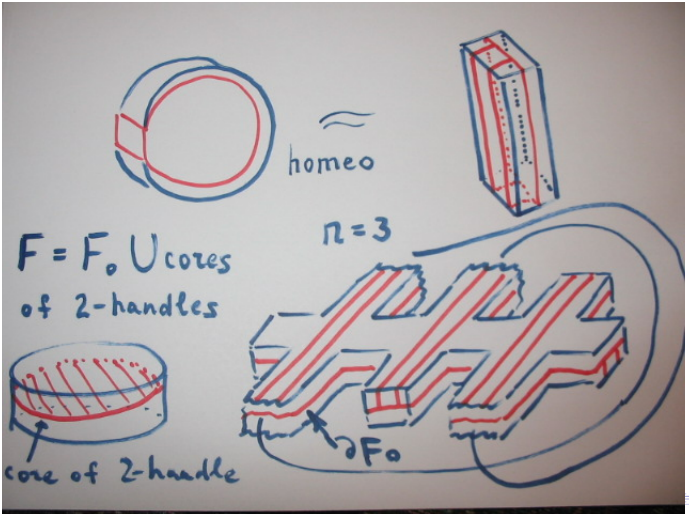


Схема доказательства теоремы

Если поверхность F восстановить, то условие на ориентации при отождествлении n пар квадратов позволяет однозначно спроектировать $\mathbf{n+1}$-е квадраты на поверхность F, и пересечения их проекций дадут искомые квадраты. Как восстановить F ? Граф G дает всего два потенциальных варианта для края поверхности F . Опасность, что оба варианта допускают каждый свою структуру вида $F \times I$. Оказывается, второй вариант такую структуру дать не может. Рассуждение состоит в небольшом дополнительном построении и рассмотрении фундаментальной группы возникающего пространства. Для случая настоящей F фундаментальная группа оказывается тривиальной, а во втором варианте – нетривиальной.

Дополнительное построение

Приклеиваем 2-ручки вдоль всех краев поверхности F. Для “настоящей” F goлучается утолщенная ориентируемая замкнутая поверхность.
Для “ненастоящей” – можно показать: получается утолщенная замкнутая поверхность и две 2-ручки по разные стороны от поверхности, с подошвами, имеющими индекс пересечения больше единицы. Возьмем конус над одним краем полученного многообразия. Для “настоящей” F фундаментальная группа тривиальная. А для “ненастоящей” – нетривиальная циклическая. Значит, второй вариант не дает “альтернативную” структуру. По данному многообразию с данным узором не остается возможности восстановить другую схему склейки призм.

Спасибо за внимание