О ДЕФОРМАЦИИ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ НА МНОГООБРАЗИИ

Родионов Е.Д., Хромова О.П., Славский В.В.

Введение

Пусть на многообразии M^n определена линейная связность ∇ без кручения, заданная в локальной системе координат $\{x^1, x^2, \cdot, x^n\}$ своими коэффициентами $\left\{\Gamma^k_{ij}\right\}$ — символами Кристоффеля первого рода $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$.

В голономной системе координат отсутствие кручения равносильно выполнению условию $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. Пусть на многообразии M^n дополнительно определена риманова метрика $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j$. Тогда по аналогии с символами Кристоффеля первого рода можно определить тензор деформации связности

$$T^k_{ij} = \frac{1}{2} \bar{g}^{ks} (\bar{g}_{sj,i} + \bar{g}_{is,j} - \bar{g}_{ij,s}),$$

где $\bar{g}^{ks}$ — матрица обратная к $\bar{g}_{ij}$, а $\bar{g}_{ij,s}$ — ковариантная производная $\bar{g}_{ij}$ относительно связности ∇. Нетрудно проверить, что $\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij}$, где $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ — символами Кристоффеля первого рода для метрики $\bar{g}_{ij}$. Для тензора кривизны

$$\bar{R}^q_{lki} = \frac{\partial \bar{\Gamma}^q_{li}}{\partial x^k} + \bar{\Gamma}^q_{kp} \bar{\Gamma}^p_{li} - \frac{\partial \bar{\Gamma}^q_{ki}}{\partial x^l} - \bar{\Gamma}^q_{lp} \bar{\Gamma}^p_{ki}$$

метрики $\bar{g}_{ij}$ получим формулу (см. подробнее [2])

$$\bar{R}^q_{lki} = R^q_{lki} + Q^q_{lki}, \tag{1}$$

где R^q_{lki} — тензор кривизны связности ∇, и

$$Q^q_{lki} = T^q_{li,k} + T^q_{kp}T^p_{li} - T^q_{ki,l} - T^q_{lp}T^p_{ki}, \qquad (2)$$

который, следуя [3], назовем тензором кривизны метрики $\bar{g}_{ij}$ относительно связности ∇.

Нас будет интересовать случай, когда исходная связность $\left\{\Gamma^k_{ij}\right\}$ также является римановой относительно некоторой исходной метрики g_{ij}

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{ks}(g_{sj,i} + g_{is,j} - g_{ij,s}),$$

Определение 1. Метрику $\bar{g}_{ij}$ будем называть деформацией исходной метрики g_{ij}. В случае когда деформация зависит от параметра t;

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} + t\eta_{ij} + o(t), \text{ при } t \to 0$$

будем $\bar{g}_{ij}$ называть вариацией исходной метрики или бесконечно малой деформацией.

- $\bar{g}_{ij} = \exp(-2\sigma(x))g_{ij}$ – конформная деформация
- $\bar{g}_{ij} = g_{ij} + t(v_{i,j} + v_{j,i})$ – вариация порожденная однопараметрической группой диффеоморфизмов (v_i векторное поле, генератор подгруппы)

  (a) векторное поле v_i киллингово если $v_{i,j} + v_{j,i} \equiv 0$,

  (b) векторное поле v_i конформно-киллингово если $v_{i,j} + v_{j,i} \equiv \frac{2g^{lk}v_{l,k}}{n}g_{ij}$,

  (c) векторное поле v_i квазиконформно-киллингово если тензорное поле $q_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} - \frac{2g^{lk}v_{l,k}}{n}g_{ij}$ равномерно ограниченно

- $\bar{g}_{ij} = g_{ij} + v_i v_j$ – одноранговая деформация
- $\bar{g}_{ij} = g_{ij} - 2tR_{ij}$ – Риччи вариация (R_{ij} – тензор Риччи метрики g_{ij})

Возникает естественная задача вычисления различных тензоров кривизны метрики при деформации (вариации метрики). Для вариаций метрик данные вычисления неоднократно проводились краткий обзор полученных формул можно найти в книге А. Бессе (т.2)[1].

Деформации римановых метрик ранга один

Определение 2. Пусть θ — произвольная функция на многообразии M класса C^∞. Будем говорить, что метрика $d\bar{s}^2$ получена деформацией ранга один из метрики ds^2, если

$$d\bar{s}^2 = ds^2 + d\theta \otimes d\theta,$$

или в координатах $\bar{g}_{ij} = g_{ij} + \theta_i \theta_j$.

Лемма 1. *[3] При деформации ранга один $d\bar{s}^2$ метрики ds^2 имеют место следующие формулы для тензоров кривизны, Риччи, скалярной кривизны*

$$\bar{R}_{lkis} = R_{lkis} + \frac{\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl}}{1 + |\nabla\theta|^2}, \tag{3}$$

$$\bar{r}_{ki} = r_{ki} + \frac{\theta_h \theta^l (\theta_l^h \theta_{ki} - \theta_k^h \theta_{li})}{(1 + |\nabla\theta|^2)^2} + \frac{\theta_{li}\theta_k^l - \theta_{ki}\theta_l^l}{1 + |\nabla\theta|^2} + \frac{\theta^l \theta_p R_{kli}{}^p}{1 + |\nabla\theta|^2}, \tag{4}$$

$$\bar{s} = s + 2\frac{\theta_h \theta^l (\theta_l^h \theta_k^k - \theta^{kh}\theta_{lk})}{(1 + |\nabla\theta|^2)^2} - 2\frac{r_{ik}\theta^i\theta^k}{1 + |\nabla\theta|^2} + \frac{\theta_{ls}\theta^{ls} - \theta_l^l \theta_s^s}{1 + |\nabla\theta|^2}, \tag{5}$$

где θ_{li} — ковариантные производные ковектора θ_l относительно метрики ds^2, $|\nabla\theta|^2 = g^{ij}\theta_i\theta_j$ — квадрат длины ковектора θ_l относительно метрики ds^2.

Замечание. Формулу (3) можно рассматривать как формулу Гаусса для поверхности, получаемой вложением многообразия M^n в прямое произведение $(M^n, ds^2)\times R^1$ риманова многообразия (M^n, ds^2) и евклидова пространства R^1

$$1_{M^n}\times\theta : M^n \to (M^n, ds^2)\times R^1.$$

Замечание. Формула (3) остается справедливой если рассматривать θ_i как компоненты замкнутой коформы $\theta_i dx^i$.

Замечание. Пусть $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1,\dots,p}$ набор функций класса $C^\infty(M)$, определим на многообразии M метрику формулой

$$d\bar{s}^2 = g_{ij}dx^i dx^j + \sum_{\alpha=1}^{p}\theta_i^\alpha\theta_j^\alpha dx^i dx^j.$$

Тогда справедлива формула

$$\bar{R}_{lkis} = R_{lkis} + h_{\alpha\beta}\left(\theta_{li}^\alpha\theta_{sk}^\alpha - \theta_{ki}^\alpha\theta_{sl}^\alpha\right)$$

где $h_{\alpha\beta}$ – матрица обратная к матрице $h^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} + g^{ij}\theta_i^\alpha\theta_j^\beta$, которая является формулой Гаусса поверхности $M \to M\times R^p$, естественно назвать метрику $d\bar{s}^2$ **p-ранговой** деформацией исходной метрики ds^2.

Замечание. Формулы (3-5) значительно упростятся если потребовать:

$$\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl} \equiv 0, \quad \forall l, i, s, k$$

эквивалентно требованию, чтобы матрица Гессиана $\|\theta_{i,j}\|$ имела ранг 1, то есть имела вид $\theta_{i,j} = f_i f_j$. В этом случае:

$$\bar{R}_{lkis} = R_{lkis},$$
$$\bar{r}_{ki} = r_{ki} + \frac{\theta^l \theta_p R_{kli}{}^p}{1 + |\nabla\theta|^2},$$
$$\bar{s} = s - 2\frac{r_{ik}\theta^i\theta^k}{1 + |\nabla\theta|^2},$$

Замечание. Формулы (3-5) также будут проще если дополнительно требовать $|\nabla\theta|^2 = g^{ij}\theta_i\theta_j \equiv const$. В этом случае:

$$\theta^l\theta_{li} = 0, \quad \bar{R}_{ki}\theta^i = R_{ki}\theta^i, \quad \bar{R}_{lkis}\theta^s = R_{lkis}\theta^s,$$
$$\bar{R}_{lkis} = R_{lkis} + \frac{\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl}}{1 + |\nabla\theta|^2},$$

$$\bar{r}_{ki} = r_{ki} + \frac{\theta_{li}\theta^l_k - \theta_{ki}\theta^l_l}{1 + |\nabla\theta|^2} + \frac{\theta^l\theta_p R_{kli}{}^p}{1 + |\nabla\theta|^2},$$
$$\bar{s} = s - 2\frac{r_{ik}\theta^i\theta^k}{1 + |\nabla\theta|^2} + \frac{\theta_{ls}\theta^{ls} - \theta^l_l\theta^s_s}{1 + |\nabla\theta|^2},$$

Следствие 1. *Пусть (M, ds^2) — n-мерное евклидово пространство. Тогда секционная кривизна двумерной*

площадки $\xi \wedge \eta$ при деформации ранга один метрики ds^2 имеет вид

$$\bar{R}_{lkis}\xi^l\eta^k\xi^i\eta^s = \frac{\left(\theta_{li}\xi^l\xi^i\right)\left(\theta_{sk}\eta^s\eta^k\right) - \left(\theta_{ki}\eta^k\xi^i\right)^2}{1+|\nabla\theta|^2}, \tag{6}$$

Следствие 2. *Конечномерные евклидовы пространства допускают одноранговые деформации метрик положительной секционной кривизны, не существует p-ранговые деформации метрик отрицательной секционной кривизны при $p \leq n-2$ (Картан).*

Теорема 1. *[3] Пусть на компактном многообразии M^n определена риманова метрика $ds^2 = g_{ij}dx^idx^j$, имеющая в каждой точке $x \in M^n$ двумерную площадку нулевой секционной кривизны. Тогда для любой деформации метрики ранга 1 найдется точка $x_0 \in M^n$ и двумерная площадка в этой точке, имеющая неположительную секционную кривизну, а также точка $x_1 \in M^n$ и двумерная площадка в этой точке,имеющая неотрицательную кривизну.*

Теорема 2. *[3] Пусть многообразие (M^n, ds^2) есть прямое произведение компактных римановых многообразий. Тогда для любой метрики $d\bar{s}^2$, полученной деформацией ранга 1 из метрики ds^2, найдется точка и двумерная площадка в этой точке имеющая неположительную секционную кривизну, а также точка и двумерная площадка в этой точке имеющая неот-*

рицательную секционную кривизну

Теорема 3. *[3] Если метрика $d\bar{s}^2$, полученная деформацией ранга 1 из однородной римановой метрики ds^2 односвязного компактного пространства G/H, имеет положительную секционную кривизну, то однородное пространство G/H либо диффеоморфно КРОСПу, либо одному из многообразий Берже-Уоллача:*

$$Sp(2)/SU(2), \quad SU(5)/Sp(2)\times S^1, \quad SU(3)/T_{\max},$$
$$Sp(3)/Sp(1)^3, \quad F_4/Spin(8).$$

Теорема 4. *[3] Если метрика $d\bar{s}^2$, полученная деформацией ранга 1 из левоинвариантной римановой метрики ds^2 компактной группы G, имеет положительную секционную кривизну, то группа G локально изоморфна группе $SU(2)$.*

Преобразование тензора Вейля при деформации римановых метрик ранга один

При делении тензора кривизны на метрический тензор, в смысле произведения Кулкарни-Номидзу, получаем разложение [1]

$$R = W + A \owedge g, \tag{7}$$

целая часть A и остаток W от деления R на g называются соответственно тензором одномерной кривизны (или тензором Схоутена) и тензором Вейля (или тензором конформной кривизны) и вычисляются по фор-

мулам

$$A_{ik} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ik} - \frac{sg_{ik}}{2(n-1)}\right), \tag{8}$$

$$W_{lkit} = R_{ijkt} + A_{kj}g_{li} + A_{li}g_{kj} - A_{ki}g_{lj} - A_{lj}g_{ki}. \tag{9}$$

Здесь r_{ik} — тензор Риччи, s — скалярная кривизна.

Введем обозначения

$$D_{ki} = \frac{\theta_h\theta^l(\theta_l^h\theta_{ki} - \theta_k^h\theta_{li})}{(1+|\nabla\theta|^2)^2} + \frac{\theta_{li}\theta^l_k - \theta_{ki}\theta^l_l}{1+|\nabla\theta|^2} + \frac{\theta^l\theta_p R_{kli}^{\ \ \ p}}{1+|\nabla\theta|^2}, \tag{10}$$

$$C = 2\frac{\theta_h\theta^l(\theta_l^h\theta_k^k - \theta^{kh}\theta_{lk})}{(1+|\nabla\theta|^2)^2} - 2\frac{r_{ik}\theta^i\theta^k}{1+|\nabla\theta|^2} + \frac{\theta_{ls}\theta^{ls} - \theta_l^l\theta_s^s}{1+|\nabla\theta|^2}, \tag{11}$$

При этом формулы (4) и (5) примут соответственно вид

$$\bar{r}_{ki} = r_{ki} + D_{ki}, \quad \bar{s} = s + C,$$

Определение 3. По аналогии с произведением Кулкарни-Номидзу для произвольных тензоров P_{lk} и H_{ij}

$$(P \owedge H)_{lkij} = P_{kj}H_{li} + P_{li}H_{kj} - P_{ki}H_{lj} - P_{lj}H_{ki} \tag{12}$$

положим

$$\omega(P_{lk}, \theta_i, \theta_j) = P_{kj}\theta_l\theta_i + P_{li}\theta_k\theta_j - P_{ki}\theta_l\theta_j - P_{lj}\theta_k\theta_i. \tag{13}$$

Лемма 2. *При деформации ранга один $d\bar{s}^2$ метрики ds^2 имеют место следующие формулы для тензоров*

одномерной кривизны и Вейля

$$\bar{A}_{ki} = A_{ki} + \frac{1}{n-2}\left(D_{ki} - \frac{Cg_{ki} + (s+C)\theta_k\theta_i}{2(n-1)}\right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\overline{W}_{lkij} &= W_{lkij} + \frac{\theta_{li}\theta_{jk} - \theta_{ki}\theta_{lj}}{1+|\nabla\theta|^2} + \\ &+ \frac{(g \owedge D)_{lkij} + \omega(D_{lk}, \theta_i, \theta_j)}{n-2} \\ &+ \omega(A_{lk}, \theta_i, \theta_j) - \\ &- \frac{2C(g_{li}g_{kj} - g_{lj}g_{ki}) + (s+2C)\omega(g_{lk}, \theta_i, \theta_j)}{2(n-1)(n-2)}\end{aligned} \quad (15)$$

Обобщенные одноранговые деформации

Определение 4. Пусть θ — произвольная функция на многообразии M класса C^∞. Будем говорить, что метрика $d\bar{s}^2$ получена обобщенной деформацией ранга один из метрики ds^2, если

$$d\bar{s}^2 = \mu ds^2 + \lambda d\theta \otimes d\theta,$$

или в координатах $\bar{g}_{ij} = \mu g_{ij} + \lambda\theta_i\theta_j$, где $\mu, \lambda \in C^\infty(M)$

Лемма 3. *Матрица обратная к матрице* $\|\bar{g}_{ij}\| = \|\mu g_{ij} + \lambda\theta_i\theta_j\|$ *имеет вид*

$$\|\bar{g}^{ij}\| = \left\|\frac{1}{\mu}\left(g^{ij} - \frac{\lambda\theta^i\theta^j}{\mu + \lambda|\nabla\theta|^2}\right)\right\|, \quad (16)$$

где $|\nabla\theta|^2 = g^{ij}\theta_i\theta_j$ *— квадрат длины ковектора* θ_i *относительно метрики* ds^2.

Рассмотрим случай. $\mu = const, \lambda = const \in \mathbb{R}$.

Лемма 4. *При обобщенной деформации ранга один* $d\bar{s}^2 = \mu ds^2 + \lambda d\theta \otimes d\theta$, *где* $\mu = const, \lambda = const \in \mathbb{R}$, *метрики* ds^2 *тензор деформации связности равен*

$$T^k_{ij} = \frac{\lambda \theta^k \theta_{ij}}{\mu + \lambda |\nabla \theta|^2}, \tag{17}$$

где θ_{ij} *— ковариантные производные ковектора* θ_i *относительно метрики* ds^2, $|\nabla\theta|^2 = g^{ij}\theta_i\theta_j$ *— квадрат длины ковектора* θ_i *относительно метрики* ds^2.

Теорема 5. *При обобщенной деформации ранга один* $d\bar{s}^2 = \mu ds^2 + \lambda d\theta \otimes d\theta$, *где* $\mu = const, \lambda = const \in \mathbb{R}$, *метрики* ds^2 *имеют место следующие формулы для тензоров кривизны, Риччи, скалярной кривизны*

$$\bar{R}_{lkis} = \mu R_{lkis} + \frac{\lambda\mu(\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl})}{\mu + \lambda|\nabla\theta|^2}, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_{ki} =& r_{ki} + \frac{\lambda(\theta^s_i\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta^s_s)}{\mu + \lambda|\nabla\theta|^2} - \\ & - \frac{\lambda^2\theta^l\theta^s(\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl})}{(\mu + \lambda|\nabla\theta|^2)^2} - \frac{\lambda\theta^l\theta^s R_{lkis}}{\mu + \lambda|\nabla\theta|^2}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\bar{s} = \frac{1}{\mu}\left(s - 2\frac{\lambda^2\theta^l\theta^s(\theta^k_l\theta_{sk} - \theta^k_k\theta_{sl})}{(\mu + \lambda|\nabla\theta|^2)^2} - 2\frac{\lambda\theta^k\theta^i r_{ki}}{\mu + \lambda|\nabla\theta|^2}\right), \tag{20}$$

где θ_{li} *— ковариантные производные ковектора* θ_l *относительно метрики* ds^2, $|\nabla\theta|^2 = g^{ij}\theta_i\theta_j$ *— квадрат длины ковектора* θ_l *относительно метрики* ds^2.

Замечание. Аналитические формулы (-20) позволяют исследовать предельные римановые метрики при $\lambda \to \infty$. В частности если фиксировать $\mu = 1$, то в пределе при $\lambda \to \infty$ получим :

$$\bar{R}_{lkis} = R_{lkis} + \frac{(\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl})}{|\nabla\theta|^2},$$

$$\begin{aligned}\bar{r}_{ki} =& r_{ki} + \frac{(\theta^s_i\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta^s_s)}{|\nabla\theta|^2} - \\ & - \frac{\theta^l\theta^s(\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl})}{(|\nabla\theta|^2)^2} - \frac{\theta^l\theta^s R_{lkis}}{|\nabla\theta|^2},\end{aligned}$$

$$\bar{s} = s - 2\frac{\theta^l\theta^s(\theta^k_l\theta_{sk} - \theta^k_k\theta_{sl})}{(|\nabla\theta|^2)^2} - 2\frac{\theta^k\theta^i r_{ki}}{|\nabla\theta|^2},$$

Наибольший интерес данные рассуждения приобретут, когда форма $\theta_i dx^i$ не является замкнутой (все вычисления в данной работе проведены в предположении замкнутости данной формы). Для незамкнутой формы предельная метрика не будет римановой, а будет метрикой Карно-Каратеодори.

Планы по дальнейшим исследованиям обобщенных однoранговых деформаций римановых метрик

- Вывод формул преобразований тензоров кривизны в случае когда форма $\theta_i dx^i$ не является замкнутой
- Исследование пределов обобщенных однoранговых деформаций левоинвариантных римановых метрик на группах Ли (левоинвариантных метрик Карно-Каратеодори на группах Ли)
- Исследование обобщенных однoранговых деформаций римановых метрик при дополнительных требованиях (например: с условием ортогональности тривиальным вариациям)

Список литературы

[1] Бессе, А. Многообразия Эйнштейна: В 2 т. Т. 1. Пер. с англ. – М. : Мир, 1990. – 318 с.

[2] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М. : Наука, 1967. – 664 с.

[3] Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформные и однoранговые деформации римановых метрик с площадками нулевой кривизны на компактном многообразии // Труды конференции «Геометрия и приложения», посвященной 70-летию В. А. Топоногова, г. Новосибирск, 13-16 марта 2000 г. : материалы временных коллективов. – 2001. – С. 171–182

[4] Фейнман Р.Ф., Мориниго Ф.Б., Вагнер У.Г. Фейнмановские лекции по гравитации. Перев. с англ. А.Ф.Захарова.– М.: Янус-К, 2000. – 296 с.