

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ОРИЦИКЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ \hat{H} ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Л.Н. Ромакина

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
romakinaln@mail.ru

§ 1. Абсолют и фундаментальная группа плоскости \hat{H} . Метрические формулы

Гиперболическую плоскость \hat{H} положительной кривизны рассматриваем в проективной интерпретации Кэли – Клейна на внешней относительно овальной линии γ области проективной плоскости P_2 . Линию γ называем *абсолютом* плоскости \hat{H} (рис. 1). Группа G проективных автоморфизмов овальной линии является общей для плоскости \hat{H} и плоскости Λ^2 Лобачевского фундаментальной группой. Плоскость \hat{H} топологически эквивалентна листу Мебиуса без края [1, 2].



Рис. 1. Абсолют γ плоскости \hat{H}

Одной из реализаций плоскости \hat{H} является сфера действительного радиуса со склееными диаметрально противоположными точками в псевдоевклидовом пространстве R_1^3 (рис. 2), т. е. плоскость \hat{H} является проективной моделью плоскости де Ситтера [3–17].

Прямые плоскости \hat{H} трех типов: *гиперболические* (эллиптические), пересекающие абсолют в двух действительных различных (мнимо сопряженных) точках, и *параболические*, касательные к абсолюту.

С помощью абсолюта на гиперболических (эллиптических) прямых плоскости \hat{H} можно ввести гиперболическое (эллиптическое) измерение расстояний между точками. Параболические прямые являются изотропными на \hat{H} [18].

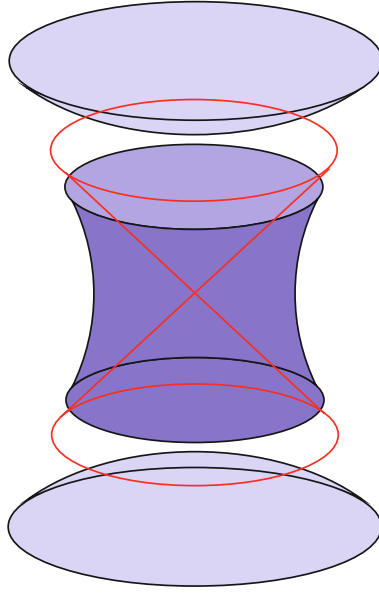


Рис. 2. Изотропный конус и сферы мнимого и действительного радиусов в псевдоевклидовом пространстве R_1^3

При введении ортогональных орициклических координат используем канонический репер R второго типа, уравнение абсолюта плоскости \widehat{H} в котором имеет вид

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0.$$

Длину $|AB|$ отрезка между точками $A(a_p)$, $B(b_p)$ эллиптической прямой (отрезка или квазиотрезка между точками $A(a_p)$, $B(b_p)$ гиперболической прямой) в репере R можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} \cos \frac{|AB|}{\rho} &= \pm \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2a_3 b_3}{2\sqrt{a_1 a_2 - a_3^2} \sqrt{b_1 b_2 - b_3^2}} \\ \left(\operatorname{ch} \frac{|AB|}{\rho} &= \pm \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2a_3 b_3}{2\sqrt{a_1 a_2 - a_3^2} \sqrt{b_1 b_2 - b_3^2}} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Если неизотропные пересекающиеся (расходящиеся) прямые a , b имеют координаты $a(a_p)$, $b(b_p)$, то величину \widehat{ab} угла между ними в репере R можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \widehat{ab} &= \pm \frac{2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 - a_3 b_3}{\sqrt{4a_1 a_2 - a_3^2} \sqrt{4b_1 b_2 - b_3^2}} \\ \left(\cos \widehat{ab} &= \pm \frac{2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 - a_3 b_3}{\sqrt{4a_1 a_2 - a_3^2} \sqrt{4b_1 b_2 - b_3^2}} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

§ 2. Овальные линии плоскости \hat{H}

ТЕОРЕМА 1. Основные геометрические коварианты и свойство линии быть выпуклой определяют восемь типов собственных овальных линий плоскости \hat{H} [19] и семь типов несобственных овальных линий (рис. 3).

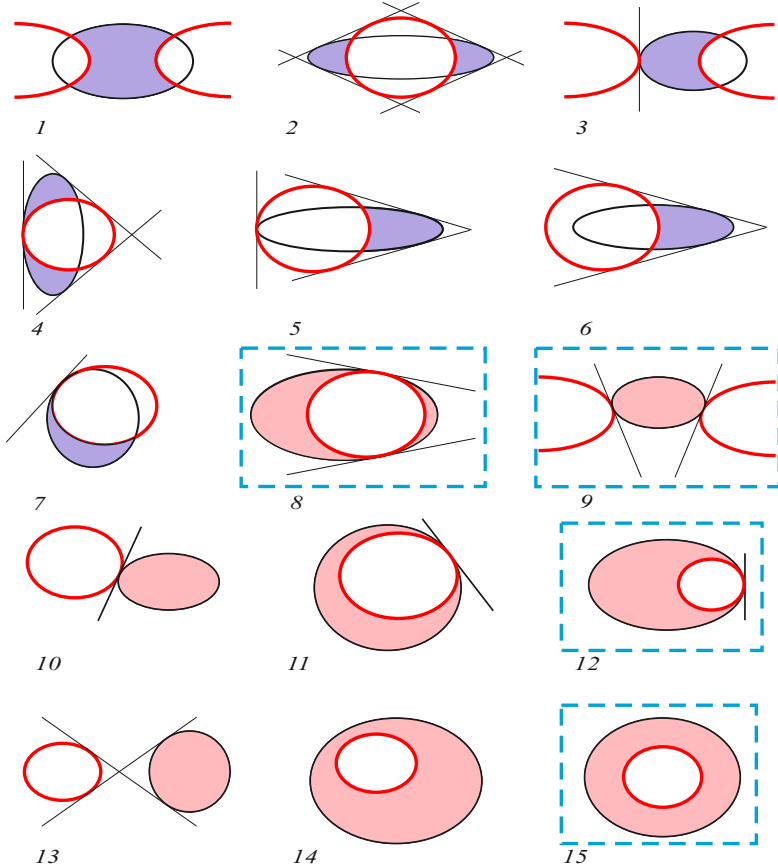


Рис. 3. Абсолют плоскости \hat{H} изображен красной овальной линией. Однополостная бигипербола (1), двуполостная бигипербола (2), однополостная двухветвевая гиперболическая парабола (3), двуполостная двухветвевая гиперболическая парабола (4), одноветвевая гиперболическая парабола (5), гипербола (6), парабола (7), гиперболический цикл (8), эллиптический цикл (9), выпуклая эллиптическая парабола (10), невыпуклая эллиптическая парабола (11), орицикл (12), выпуклый эллипс (13), невыпуклый эллипс (14), гиперцикл (15)

Циклы плоскости \hat{H} из всех овальных линий выделим следующим свойством: для каждой точки M цикла σ плоскости \hat{H} существует такое преобразование f группы G , что для любого натурального значения n $f^n(M) \in \sigma$.

Изображения циклов плоскости \hat{H} приведены Ф. Клейном в книге «Неевклидова геометрия» (стр. 196, черт. 117–119; стр. 247, черт. 148–150).

§ 3. Орицикл

Позиционное определение. Орициклом плоскости \hat{H} называем овальную линию, касающуюся абсолюта в четырех слившихся точках.

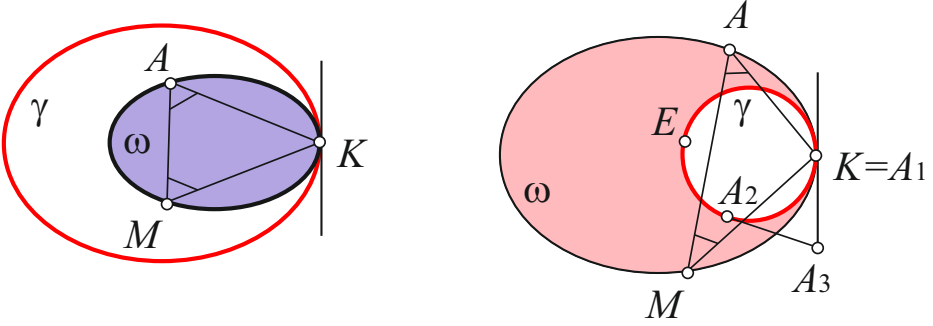


Рис. 4. Орициклы плоскости Лобачевского и плоскости \hat{H}

Линия, заданная в репере R уравнением

$$qx_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 = 0, \quad q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 0, \quad (3.1)$$

касается абсолюта в четырежды взятой точке A_2 . При $q < 0$ ($q > 0$) все точки линии (3.1), за исключением точки касания, находятся внутри (вне) абсолюта. Следовательно, при $q < 0$ линия (3.1) является орициклом плоскости Лобачевского, а при $q > 0$ — орициклом плоскости \hat{H} .

Метрически характеризовать орицикл плоскости \hat{H} можно по аналогии с орициклом плоскости Лобачевского.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A — собственная точка плоскости \hat{H} , K — точка абсолюта. Орицикл с несобственной точкой K , проходящий через точку A , является множеством ω всех точек M плоскости \hat{H} , для которых

$$\angle AMK \cong \angle MAK.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем уравнение множества ω . Фиксируя один параметр, построим двухпараметрическое семейство U^2 канонических реперов второго типа с первой вершиной в точке K . Еще один параметр подберем так, чтобы вторая вершина реперов из U^2 попала на прямую AK . В каждом репере полученного семейства U^1 точки A, K имеют координаты: $K(1 : 0 : 0)$, $A(q : -1 : 0)$, где $q > 0$, так как точка A является внешней по отношению к абсолюту. Выберем некоторый репер R из U^1 . Точке M присвоим в R координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$, тогда прямые AK, KM, AM можно задать в R координатами:

$$AK(0 : 0 : 1), \quad KM(0 : -x_3 : x_2), \quad AM(-x_3 : -qx_3 : x_1 + qx_2).$$

При $x_2 \neq 0$ прямые AK, KM гиперболические, значит, AMK, MAK — углы одного типа. Записывая по формуле (1.2) условие

$$\widehat{AMK} = \widehat{MAK}$$

в координатах, получим уравнение

$$qx_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 = 0, \quad (3.2)$$

которому удовлетворяют координаты каждой точки множества ω .

Координаты каждой точки T , удовлетворяющие уравнению (3.2), можно записать в виде $(t^2 - q : 1 : t)$, где $t \in \mathbb{R}$. В репере R прямые AK , KT , AT заданы координатами:

$$AK(0 : 0 : 1), \quad KT(0 : -t : 1), \quad AT(1 : q : -t).$$

Прямые AK , KT гиперболические, значит, углы ATK , TAK одного типа. По формуле (1.2) получим равенство

$$\widehat{\text{ch } ATK} = \widehat{\text{ch } TAK}.$$

Следовательно, $\angle ATK \cong \angle TAK$. Значит, каждая точка T , координаты которой удовлетворяют уравнению (3.2), принадлежит множеству ω .

Итак, уравнение (3.2) задает в репере R множество ω .

При допустимых значениях параметра q уравнение (3.2) является каноническим уравнением (3.1) орицикла плоскости \hat{H} .

Таким образом, орицикл плоскости \hat{H} является введенным в условии теоремы множеством ω .

Что и требовалось доказать.

Центром орицикла назовем его общую с абсолютом точку. Параболическую прямую, проходящую через центр орицикла, назовем *базой* орицикла, а каждую проходящую через центр орицикла гиперболическую прямую назовем его *осью*.

В следующих теоремах сформулируем основные свойства орициклов плоскости \hat{H} .

ТЕОРЕМА 3. *Орицикл плоскости \hat{H} симметричен относительно каждой своей оси.*

ТЕОРЕМА 4. *В каждой собственной точке орицикла плоскости \hat{H} существует эллиптическая касательная, ортогональная оси орицикла, проведенной через данную точку.*

Согласно теореме 4 орицикл плоскости \hat{H} обладает следующим оптическим свойством: *каждый луч, исходящий из несобственной точки орицикла по собственным для плоскости \hat{H} ветвям гиперболических прямых, отражается внешним образом от орицикла в себя.*

ТЕОРЕМА 5. *Касательная к орициклу плоскости \hat{H} в каждой его точке разделена точкой касания и базой орицикла пополам.*

ТЕОРЕМА 6. *Ось орицикла плоскости \hat{H} , проходящая через его точку M , является полярной относительно абсолюта общей точки базы орицикла и касательной к нему в точке M .*

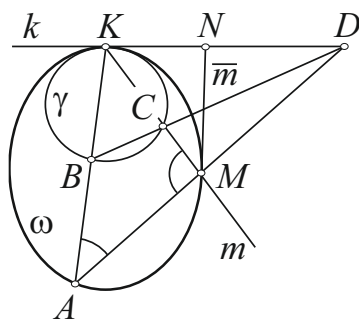


Рис. 5. Оси и касательная к орициклу плоскости \hat{H}

ТЕОРЕМА 7. Любые две оси орицикла плоскости \hat{H} высекают на орицикле и на абсолюте хорды, принадлежащие прямому пучку, содержащего базу данного орицикла.

Теорема 7 дает простой способ построения точек орицикла, который может быть использован при построении образа точки плоскости H^2 при параболическом сдвиге.

ТЕОРЕМА 8. Каждый орицикл на \hat{H} определен однозначно заданием двух своих точек, одна из которых является несобственной точкой орицикла.

ТЕОРЕМА 9. Каковы бы ни были две собственные точки плоскости \hat{H} , существует точно два орицикла этой плоскости, проходящих через данные точки (рис. 6, а).

ТЕОРЕМА 10. Пусть N — общая точка базы орицикла ω и касательной k в его точке M , а L_1, L_2 — точки пересечения орицикла ω параболической прямой, проходящей через точку N и отличной от базы орицикла (рис. 6, б), тогда внутренние относительно ω хорды ML_1, ML_2 равны трети эллиптической прямой, т. е. $|ML_1| = |ML_2| = \pi\rho/3$.

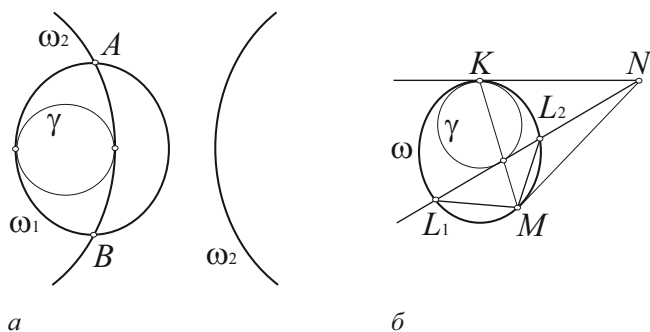


Рис. 6. Орициклы ω_1, ω_2 с общими точками A, B (а), хорды орицикла (б)

Орициклы можно использовать при построении различных разбиений плоскости \hat{H} . На рис. 7 представлены ленты орициклической ломаной, порождающей разбиения плоскости \hat{H} , инвариантные при сдвиге вдоль параболической прямой, описанные в работе [20]. Вершины одного порядка в таких разбиениях принадлежат одному орициклу.

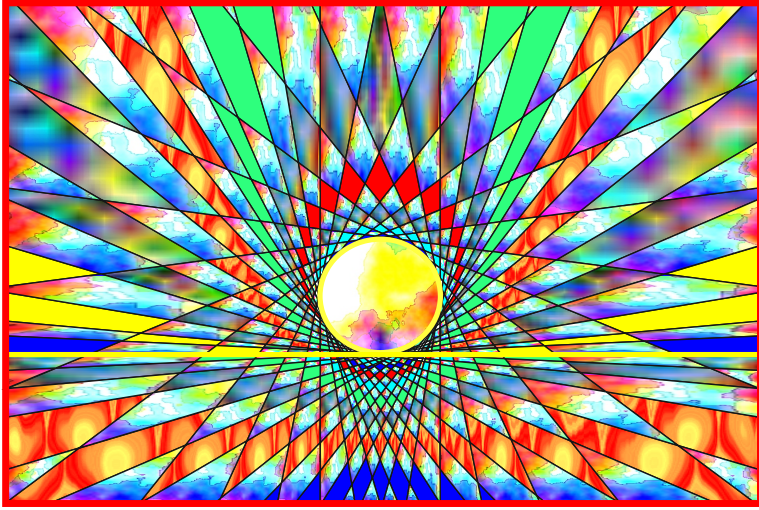


Рис. 7. Ленты орициклической ломаной

§ 4. Ортогональные орициклические координаты

Пусть в репере R точка M задана проективными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$. Собственными координатами точки M на плоскости \hat{H} в репере R назовем определенную с точностью до знака упорядоченную тройку чисел:

$$\bar{x}_1 = \pm \frac{\rho x_1}{\sqrt{x_3^2 - x_1 x_2}}, \quad \bar{x}_2 = \pm \frac{\rho x_2}{\sqrt{x_3^2 - x_1 x_2}}, \quad \bar{x}_3 = \pm \frac{\rho x_3}{\sqrt{x_3^2 - x_1 x_2}}.$$

Собственные координаты $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3)$ точки плоскости \hat{H} удовлетворяют равенству

$$\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \rho^2.$$

Переход к собственным координатам плоскости \hat{H} геометрически означает удаление в бесконечность абсолютной овальной линии. Собственные координаты точки абсолюта бесконечно велики, собственные координаты точки плоскости Лобачевского — мнимые числа.

Семейство U^3 всех реперов второго типа зависит от трех параметров. Уравнение орицикла получили в реперах двухпараметрического подсемейства U^2

таких реперов второго типа, что координатная вершина A_1 фиксирована (совпадает с центром орицикла), положения на абсолюте второй координатной вершины и единичной точки — произвольные.

Пучок Ω орициклов с центром в точке A_1 ($1 : 0 : 0$) в реперах семейства U^2 можно задать уравнением

$$qx_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad q > 0.$$

Каждый орицикл пучка Ω определен однозначно заданием числа q . Орицикл с параметром $q = 1$ назовем *нулевым* орициклом пучка Ω и обозначим ω_0 . Базу орициклов пучка Ω , в репере R прямую A_1A_3 , обозначим k .

Выделим некоторую ось l орициклов заданного пучка. Поместим на нее вторую координатную вершину A_2 . Точку пересечения оси l с орициклом ω_0 обозначим O . Точку пересечения с абсолютом параболической прямой, проведенной через точку O , обозначим E . Каждой точке M плоскости \hat{H} , $M \notin k$, поставим в соответствие пару чисел $(u; v)$ следующим образом.

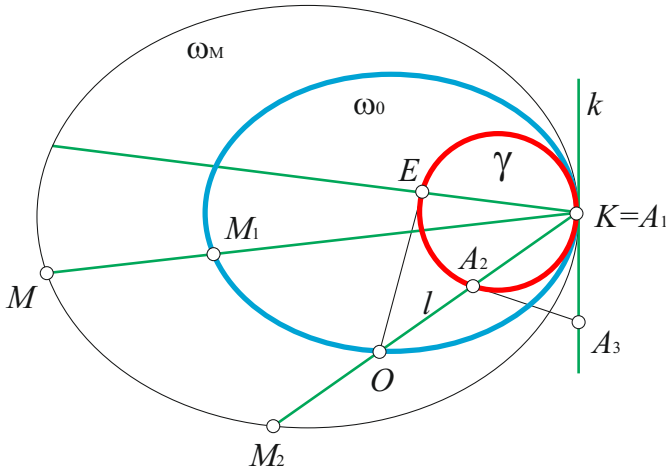


Рис. 8. Орициклические координаты

Пусть ω_M — орицикл пучка Ω , содержащий точку M , $\omega_M \cap l = M_2$.

Обозначим:

$$u = ((A_1M)(A_1E)lk),$$

$$v = \frac{|OM_2|}{\rho}, \text{ если } M_2 \text{ не принадлежит лучу } OA_1,$$

$$v = -\frac{|OM_2|}{\rho}, \text{ если } M_2 \text{ принадлежит лучу } OA_1.$$

Пару чисел $(u; v)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, назовем *ортгоналными орициклическими координатами* точки M в системе координат $\{\omega_0, l, E\}$.

Зависимость между собственными координатами $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3)$ точки M плоскости \hat{H} в репере $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ и ее ортгоналными орициклическими координатами $(u; v)$ устанавливают формулы:

$$\bar{x}_1 = \rho(u^2e^v - e^{-v}), \quad \bar{x}_2 = \rho e^v, \quad \bar{x}_3 = \rho ue^v. \quad (4.1)$$

Площадь S области D плоскости \hat{H} , соответствующая изменению параметров u, v в параметризации (4.1), имеет вид

$$S = \rho^2 \int \int_D e^v du dv.$$

Применяя систему координат $\{\omega_0, l, E\}$, находим площади различных фигур плоскости \hat{H} и исследуем линию σ четвертого порядка, заданную уравнением $u = e^v$. Линия σ разбивает каждый координатный криволинейный прямоугольник, две противоположные вершины которого принадлежат σ , на две равновеликие фигуры.

Введенная система координат оказывается удобной при вычислении инвариантов различных фигур. В частности, при вычислении площадей ячеек разбиений, инвариантных при сдвиге вдоль параболической прямой.

Список литературы

- [1] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства*, Наука, М., 1969.
- [2] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский, *Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства*, МЦНМО, М., 2003.
- [3] H. S. M. Coxeter, "A Geometrical Background for De Sitter's World", *The American Mathematical Monthly*, Volume 50, No. 4, (April 1943), 217–228.
- [4] de Sitter W, "On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis", *Proc. Royal Acad. Amsterdam [KNAW]*, Volume 19, Issue 2, 1917, 1217–1225.
- [5] K. Akutagawa, "On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space", *Math. Z.*, 196, (1987), 13–19.
- [6] S. Montiel, "An integral inequality for compact space-like hypersurfaces in a de Sitter space and application to the case of constant mean curvature", *Indiana Univ. Math. J.*, 37, (1988), 909–917.
- [7] Q. M. Cheng, "Complete space-like submanifolds in a de Sitter space with parallel mean curvature vector", *Math. Z.*, 206, (1991), 333–339.
- [8] Q. M. Cheng, "Hypersurfaces of a Lorentz space form", *Arch. Math.*, 63, (1994), 271–281.
- [9] Huili Liu, Guili Liu, "Weingarten rotation surfaces in 3-dimensional de Sitter space", *Journal of Geometry*, Volume 79, Issue 1–2, (April 2004), 156–168.
- [10] Takesi Fusho, Shyuichi Izumiya, "Lightlike surfaces of spacelike curves in de Sitter 3-space", *Journal of Geometry*, Volume 88, Issue 1–2, (March 2008), 19–29.
- [11] Roland Hefer, "Metric and Periodic Lines in de Sitter's World", *Journal of Geometry*, Volume 90, Issue 1–2, (December 2008), 66–82.
- [12] Yunhi Cho, "Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space", *Bull. Korean Math. Soc.* 46, No. 6, DOI 10.4134/BKMS.2009.46.6.1099, (2009), 1099–1133.
- [13] Masaki Kasedou, "Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space", *Journal of Geometry*, Volume 94, Issue 1–2, (September 2009), 107–121.
- [14] Immanuel Asmus, "Duality between hyperbolic and de Sitter geometry", *Journal of Geometry*, Volume 96, Issue 1–2, (December 2009), 11–40.

- [15] Oscar M. Perdomo, "Algebraic zero mean curvature hypersurfaces in de Sitter and anti de Sitter spaces", *Geometriae Dedicata, Volume 152, Issue 1*, (June 2011), 183–196.
- [16] Dan Yang, Zhonghua Hou, "Linear Weingarten spacelike submanifolds in de Sitter space", *Journal of Geometry, Volume 103, Issue 1*, (April 2012), 177–190.
- [17] Takami Sato, "Pseudo-spherical evolutes of curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space", *Journal of Geometry, Volume 103, Issue 2*, (August 2012), 319–331.
- [18] Л. Н. Ромакина, "Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны", *Сиб. электрон. матем. изв.*, **10** (2013), 393–407.
- [19] Л. Н. Ромакина, "Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **12:3** (2012), 37–44.
- [20] Л. Н. Ромакина, "Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны", *Матем. сб.*, **203:9** (2012), 83–116
- [21] Л. Н. Ромакина, "Конечные замкнутые 3(4)-контурсы расширенной гиперболической плоскости", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **10:3** (2010), 14–26.
- [22] Л. Н. Ромакина, "Конечные замкнутые 5-контурсы расширенной гиперболической плоскости", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **11:1** (2011), 38–49.
- [23] Л. Н. Ромакина, "Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны", *Дальневост. матем. журн.*, **13:1** (2013), 127–147.
- [24] Л. Н. Ромакина, "Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные правильным n -контуром", Теория относительности, гравитация и геометрия: Межд. конф. "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation". Труды. Казань, 1–6 ноября 2010 г., Казань: Казан. ун-т, 2010, 227–232.
- [25] Л. Н. Ромакина, "Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные h -ломаной", Современные проблемы математики и механики. Том 6, выпуск 3, Изд-во Московского университета, М., 2011, 131–138.
- [26] Л. Н. Ромакина, "Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной кривизны", *Сб. науч. тр. Механика. Математика*, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2010, 69–72.
- [27] Л. Н. Ромакина, *Тригонометрия гиперболической плоскости положительной кривизны*, СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2012.
- [28] Л. Н. Ромакина, *Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей*, ООО Изд-во "Научная книга", Саратов, 2008.
- [29] Л. Н. Ромакина, "Определение лучей, отрезков и квазиотрезков различного типа прямых при построении классических неевклидовых геометрий на моделях Кэли-Клейна", *Междун. конференция «62-е Герценовские чтения»*: Сб. науч. тр., Изд-во РГПУ им.А.И. Герцена, Санкт-Петербург, 2009, 103–109.