ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ (q, ρ)-ФОРМ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ[1]

Сергеева О. А.

КемГУ, кафедра математического анализа

OPERATORS IN SPACE OF INTEGRABLE (q, ρ)-FORMS ON A COMPACT RIEMANN SURFACE

Sergeeva O. A.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 12-01-31256 мол_ а.

Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – открытое множество, конформно эквивалентное единичному кругу;
G – конечнопорожденная разрывная группа конформных преобразований D на себя такая, что $D/G = F$ – компактная риманова поверхность рода $h \geq 2$;
$Hom(G, \mathbb{C}^*)$ – группа характеров ρ из G в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с операцией умножения.

Определение 1 *Измеримой (голоморфной) мультипликативной автоморфной формой порядка q с характером ρ на F ((q, ρ)-формой) называется однозначная измеримая (голоморфная) функция φ на D с условием*

$$\varphi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\varphi(z),\ A \in G,\ z \in D,\ D/G = F. \qquad (1)$$

В частности, форма f нулевого порядка с характером ρ на D называется мультипликативной функцией для ρ.

Если f_1 – мультипликативная функция для ρ_1 без нулей и полюсов на D, то характер ρ_1 называется несущественным, а сама такая функция f_1 называется мультипликативной единицей для ρ_1 [1, 2].

Двойственность:
(q, ρ)-форма и $(q, \frac{1}{\rho})$-форма являются ρ-двойственными, а (q_1, ρ)-форма и (q_2, ρ)-форма – q-двойственными формами для $q = q_1 + q_2$.
Формы одновременно q- и ρ-двойственные называются (q, ρ)-двойственными формами.

Пространства (q,ρ)-форм:

Для целого $q \geq 2$, вещественного $p \geq 1$ и $\rho \in Hom(G, \mathbb{C}^*)$ (q,ρ)-формы ϕ на D, для которых

$$\|\phi\|^p_{q,\rho,G,p} = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-pq} \left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz \wedge d\overline{z}| < \infty, \qquad (2)$$

образуют банахово пространство $L^p_{q,\rho}(D,G)$ [5]. Здесь f_1 – мультипликативная единица для несущественной составляющей ρ_1 характера ρ в разложении Фаркаша-Кра [1, 2], $\lambda(z)$ – коэффициент метрики Пуанкаре.

Формы ψ, для которых

$$\|\psi\|_{q,\rho,\infty} = \sup_{z \in D} \left\{\lambda(z)^{-q} \left|\frac{\psi(z)}{f_1(z)}\right|\right\} < \infty,$$

образуют банахово пространство $L^\infty_{q,\rho}(D,G)$ ограниченных (q,ρ)-форм [5].

При любом p голоморфные формы в $L^p_{q,\rho}(D,G)$ образуют замкнутое подпространство $A^p_{q,\rho}(D,G)$. Если $G = id$, то в обозначениях пространств символ G будем опускать.

Цель: Исследовать операторы, устанавливающие связь между пространствами:

1) измеримых и голоморфных (q,ρ)-форм;

2) форм для тривиальной группы $G = id$ и мультипликативных форм для произвольной группы G, изоморфной фуксовой группе первого рода;

3) двойственных (q,ρ)-форм;

4) (q,ρ)-форм для специальных классов характеров;

5) (q,ρ)-интегралов Эйхлера и (q,ρ)-форм.

Билинейные спаривания (q,ρ)-форм:

Для форм $\phi_1 \in L^p_{q,\rho}(D,G)$ и $\phi_2 \in L^{p'}_{q,\rho}(D,G)$, с условием $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, определено билинейное спаривание [5, 6, 7]:

$$(\phi_1,\phi_2)_{q,\rho,D,G} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-2q}\frac{\phi_1(z)\overline{\phi_2(z)}}{|f_1(z)|^2}dz\wedge d\overline{z}, \qquad (3)$$

которое работает только с (q,ρ)-формами, имеющими общий порядок q и общий характер ρ.

Для случая (q,ρ)-двойственных форм на D вводится другое билинейное спаривание :

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G} = \frac{i}{2}\iint\limits_{D/G} \mu_q(z)\varphi(z)\psi(z)dz\wedge d\overline{z}, \qquad (4)$$

где μ_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D)$ для $q=q_1+q_2$, $2\le q\in\mathbb{N}$, то есть непрерывная на D функция со свойством

$$\mu_q(Az)A'(z)^{1-q}\overline{A'(z)} = \mu_q(z), A\in G,\ z\in D,$$

и почти всюду на $\mathbb{C}$ $|\mu_q(z)|\le K\lambda(z)^{2-q}$.

Билинейное спаривание (4) симметрично и непосредственно может быть также использовано в теории мультипликативных мероморфных [8] и однозначных автоморфных форм.

Теорема 1 *Пусть $\rho = \rho_1$ – несущественный, $1 \leq p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогда билинейное спаривание (3) задаёт антилинейный топологический изоморфизм между $A^{p'}_{q,\rho_1}(D,G)$ и пространством, сопряжённым к $A^{p}_{q,\rho_1}(D,G)$. Кроме того, если $\psi \in A^{p'}_{q,\rho_1}(D,G)$ и линейный функционал l на $A^{p}_{q,\rho_1}(D,G)$ соответствуют друг другу при этом изоморфизме, то верно неравенство $c_q^{-1}\|\psi\|_{q,\rho_1,p',G} \leq \|l\| \leq \|\psi\|_{q,\rho_1,p',G}$, где $\|l\|$ – норма линейного функционала l, а $c_q = \frac{2q-1}{q-1}$.*

Симметричное билинейное спаривание (4), с дополнительными условием на обобщенный коэффициент Бельтрами, также связывает сопряженные пространства для мероморфного случая. Кроме того, для голоморфной $\varphi \in A^{p}_{q_1,\rho}(D,G;(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s))$ и мероморфной $\psi \in \Omega^{p'}_{q_2,\frac{1}{\rho}}\left(D,G;\left(\frac{1}{a_1 \ldots a_s}\right)\right)$ (q,ρ)-двойственных форм справедлива оценка

$$\left|\langle \varphi, \psi \rangle_{q_1,q_2,D,G}\right| \leq \frac{K_1}{2}\|\varphi\|_0 \cdot \|\psi\|_1,$$

где

$\|\cdot\|_0$ – норма (2) в пространстве голоморфных форм $A^{p}_{q_1,\rho}(D,G;(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s))$,

$\|\cdot\|_1$ – норма в пространстве мероморфных форм $\Omega^{p'}_{q_2,\frac{1}{\rho}}\left(D,G;\left(\frac{1}{a_1 \ldots a_s}\right)\right)$.

Оператор проектирования $\beta_{q,\rho}$:

Измеримые и голоморфные (q,ρ)-формы связаны друг с другом с помощью оператора $\beta_{q,\rho}$, заданного по формуле:

$$(\beta_{q,\rho}\varphi)(z) = \iint\limits_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|f_1(\zeta)|^2} K_{q,\rho_1}(z,\zeta)\,\varphi(\zeta)d\zeta\wedge d\overline{\zeta}, \qquad (5)$$

для всех $z\in D$, при которых интеграл абсолютно сходится. Здесь $K_{q,\rho_1}(z,\zeta) = \frac{(2q-1)\pi^{q-1}\,i}{2}\,k_D(z,\zeta)^q f_1(z)\overline{f_1(\zeta)}$, где $k_D(z,\zeta)$ – кернфункция Бергмана, определённая формулой $k_\Delta(z,\zeta) = [\pi(1-z\overline{\zeta})^2]^{-1}$ для $(z,\zeta)\in\Delta\times\Delta$ и требованием конформной инвариантности выражения $k_D(z,\zeta)dz\wedge d\overline{\zeta}$.

Теорема 2 *Для целого $q\geq 2$ оператор $\beta_{q,\rho}$ является ограниченным линейным отображением пространства $L^p_{q,\rho}(D,G)$ в $A^p_{q,\rho}(D,G)$, $1\leq p\leq\infty$, обладающим свойствами:*

1) Норма $\|\beta_{q,\rho}\|\leq c_q$, где $c_q = \frac{2q-1}{q-1}$;

2) Для всех $\varphi\in L^p_{q,\rho}(D,G)$, $\psi\in L^{p'}_{q,\rho}(D,G)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, выполняется свойство самосопряженности оператора $\beta_{q,\rho}$:

$$(\beta_{q,\rho}\varphi,\psi)_{q,\rho,D,G} = (\varphi,\beta_{q,\rho}\psi)_{q,\rho,D,G}; \qquad (6)$$

3) Для несущественного характера $\rho=\rho_1$ и $\varphi\in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$ верно $\beta_{q,\rho_1}\varphi=\varphi$.

Пусть C – квазиокружность в $\overline{\mathbb{C}}$, $D_1 = IntC$, $D_2 = ExtC$; $\lambda(z)|dz|$ – метрика Пуанкаре, заданная в $D_1 \cup D_2$; G – отмеченная конечнопорожденная квазифуксова группа первого рода дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с инвариантной кривой C такая, что D_1/G – компактная риманова поверхность рода $h \geq 2$.

Операторы двойстенности:

$$(\mathcal{B}_C^{hom}\varphi)(z) = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q_1}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta - z)^{2q_1}\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \quad z \in D_2, \tag{7}$$

$$(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z) = \frac{i}{2}\iint\limits_{D_1} \frac{\mu_q(\zeta)f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2}f_1(\zeta)}\varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \; q = q_1 + q_2, \tag{8}$$

где $z \in D_2$, $\varphi \in A^p_{q_1,\rho}(D_1, G)$,

Кроме определяющего действия оператора Берса – обращения области определения формы относительно квазиокружности C, эти два оператора устанавливают связь между пространствами двойственных голоморфных (q, ρ)-форм. Оператор $\mathcal{B}_C^{hom}$ обращает характер формы, сохраняя её порядок: $\mathcal{B}_C^{hom}\varphi \in A^p_{q_1,\frac{1}{\rho}}(D_2, G)$. Оператор $\mathcal{B}_C^{ord}$, наоборот, – q-двойственно изменяет порядок формы и не влияет при этом на её характер: $\mathcal{B}_C^{ord}\varphi \in A^p_{q_2,\rho}(D_2, G)$, $q = q_1 + q_2$.

Теорема 3 *Для произвольного характера* $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ *интегральный оператор двойственности* $\mathcal{B}_C^{hom}$ *является непрерывным антилинейным отображением между пространствами* ρ*-двойственных форм:* $\mathcal{B}_C^{hom} : A^p_{q,\rho}(D_1, G) \to A^p_{q,\frac{1}{\rho}}(D_2, G)$, $p \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$, *с нормой* $\|\mathcal{B}_C^{hom}\| \le k_q$, *где* $k_q = \frac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}$ *– константа для целого* $q \ge 2$.

Кроме того, для любых голоморфных ρ*-двойственных форм* $\varphi \in A^p_{q,\rho}(D_1, G)$ *и* $\psi \in A^{p'}_{q,\frac{1}{\rho}}(D_2, G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *верно*

$$\left(\mathcal{B}_C^{hom}\varphi, \psi\right)_{q,\frac{1}{\rho},D_2,G} = \overline{\left(\varphi, \mathcal{B}_{-C}^{hom}\psi\right)}_{q,\rho,D_1,G}. \tag{9}$$

Теорема 4 *Для произвольного характера* $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ *интегральный оператор двойственности* $\mathcal{B}_C^{ord}$ *является непрерывным линейным отображением из* $A^p_{q_1,\rho}(D_1, G)$ *в* $A^p_{q_2,\rho}(D_2, G)$, $p \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$, *с нормой* $\|\mathcal{B}_C^{ord}\| \le Kk_{q_2}$ *(где* K *– константа из оценки обобщенного коэффициента Бельтрами:* $|\mu_q| \le K\lambda^{2-q}$ *для* $q = q_1 + q_2$*).*

Кроме того, для любых голоморфных ρ*-двойственных форм* $\varphi \in A^p_{q_1,\rho}(D_1, G)$ *и* $\psi \in A^{p'}_{q_1,\frac{1}{\rho}}(D_2, G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *верно*

$$\left\langle \mathcal{B}_C^{ord}\varphi, \psi\right\rangle_{q_2,q_1,D_2,G} = \left\langle \varphi, \mathcal{B}_{-C}^{ord}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) устанавливают свойство «самосопряженности» операторов $\mathcal{B}_C^{hom}$ и $\mathcal{B}_C^{ord}$ относительно билинейных спариваний (3) и (4) соответственно в ρ-двойственных пространствах.

Следующая теорема показывает сопряженность операторов двойственности $\mathcal{B}_C^{hom}$ и $\mathcal{B}_C^{ord}$ друг с другом в q-двойственных пространствах мультипликативных голоморфных автоморфных форм и устанавливает связь между билинейными спариваниями (3) и (4) в этих пространствах.

Теорема 5 *Для произвольного характера* $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ *и* q*-двойственных голоморфных форм* $\varphi \in A^p_{q_1,\rho}(D_1, G)$ *и* $\psi \in A^{p'}_{q_2,\rho}(D_2, G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *справедливо равенство:*

$$\left(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi, \psi\right)_{q_2,\rho,D_2,G} = \left\langle \varphi, \mathcal{B}_{-C}^{hom}\psi \right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}. \tag{11}$$

Мультипликативный ряд Пуанкаре:

Для функции φ, голоморфной на D, определим мультипликативный ряд Пуанкаре (ρ-ряд Пуанкаре) по формуле

$$(\Theta_{q,\rho}\varphi)(z) = \sum_{A\in G} \frac{\varphi(Az)A'(z)^q}{\rho(A)} \tag{12}$$

для всех z, для которых правая часть сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах множества D.

Теорема 6 *Для целого $q \geq 2$ $\Theta_{q,\rho}$ является непрерывным линейным отображением пространства $A^1_{q,\rho}(D)$ в $A^1_{q,\rho}(D,G)$ с нормой $\|\Theta_{q,\rho}\| \leq 1$, а в случае несущественного характера $\rho = \rho_1$ отображение $\Theta_{q,\rho}$ будет даже сюръективно. Кроме того, для любого $\psi \in A^p_{q,\rho_1}(D,G)$, где ρ_1 — несущественный характер, $1 \leq p \leq \infty$, существует такое $\varphi \in A^p_{q,\rho_1}(D)$, что $\psi = \Theta_{q,\rho_1}\varphi$ и $\|\varphi\|_{q,\rho_1,p} \leq c_q \cdot \|\psi\|_{q,\rho_1,p,G}$, $c_q = \frac{2q-1}{q-1}$.*

Используя теоремы о линейном функционале, об операторе проектирования $\beta_{q,\rho}$ и о сопряженности операторов двойственности $\mathcal{B}^{hom}_C$ и $\mathcal{B}^{ord}_C$ друг с другом, доказана

Теорема 7 *Для целого $q \geq 2$ и несущественного характера $\rho = \rho_1$ интегральные операторы двойственности $\mathcal{B}^{hom}_C$ и $\mathcal{B}^{ord}_C$ «коммутируют» с линейным отображением Θ_{q,ρ_1,D_i} : $A^1_{q,\rho_1}(D_i) \to A^1_{q,\rho_1}(D_i,G)$, определяющим ряд Пуанкаре на D_i, $(i = 1,2)$, а именно:*

1) $(\mathcal{B}^{hom}_C \circ \Theta_{q,\rho_1,D_1})\,\varphi = (\Theta_{q,\frac{1}{\rho_1},D_2} \circ \mathcal{B}^{hom}_C)\,\varphi \in A^1_{q,\frac{1}{\rho_1}}(D_2,G)$ для всех $\varphi \in A^1_{q,\rho_1}(D_1)$;

2) $(\mathcal{B}^{ord}_C \circ \Theta_{q_1,\rho_1,D_1})\,\varphi = (\Theta_{q_2,\rho_1,D_2} \circ \mathcal{B}^{ord}_C)\,\varphi \in A^1_{q_2,\rho_1}(D_2,G)$ для всех $\varphi \in A^1_{q_1,\rho_1}(D_1)$, $q_1 + q_2 = q \geq 2$.

В пространствах (q, ρ)-форм имеют место вложения:

Вложения по порядку суммирования:

Теорема 8 *Для целого $q \geq 1$, произвольного характера $\rho \in Hom(G, \mathbb{C}^*)$ и $p \geq 1$ имеют место непрерывные вложения*

$$A^{\infty}_{q,\rho}(D,G) \hookrightarrow A^{p}_{q,\rho}(D,G) \hookrightarrow \mathcal{A}^{1}_{q,\rho}(D,G).$$

Вложения по порядку автоморфности мультипликативной формы:

Здесь ограничимся случаем, когда $D = \Delta$ – единичный диск: $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$).

Теорема 9. *Для любого $t > \frac{1}{p}$, где $1 \leq p < \infty$ и любого характера $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ имеет место непрерывное вложение $A^{p}_{q,\rho}(\Delta, G) \hookrightarrow A^{p}_{q+t,\rho}(\Delta)$.*

Вложение в пространство голоморфных (q, ρ)-интегралов Эйхлера:

Определение 2 *Мультипликативная голоморфная функция F на D для характера ρ называется голоморфным (q, ρ)-интегралом Эйхлера на D относительно группы G, если существует форма $\varphi \in A_{q,\rho}(D, G)$ такая, что $\varphi = \frac{\partial^{2q-1} F}{\partial z^{2q-1}}$.*

Теорема 10 *Для целого $q \geq 1$ и характера $\rho \in Hom(G, \mathbb{C}^*)$ имеет место вложение*

$$A_{1-q,\rho}(D,G) \hookrightarrow \Upsilon_{q,\rho}(D,G), \tag{13}$$

где $\Upsilon_{q,\rho}(D, G)$ – пространство (q, ρ)-интегралов Эйхлера.

Список литературы

[1] *Farkas H. M., Kra I.* Riemann Surfaces // Graduate Texts in Mathematics, № 71. Springer-Verlag, 1992.

[2] *Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Кемерово: КемГУ. 2003. – Ч. 2.

[3] *Bers L.* A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings // Acta Mathematica. V. 116. 1966. P. 115–134.

[4] *Кра И.* Автоморфные формы и клейновы группы. М.: Мир, 1975.

[5] *Сергеева О. А.* Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм // Вестник НГУ. 2005. Т. V. Вып. 4. С. 45–63.

[6] *Сергеева О. А.* Модифицированные операторы Берса и двойственность голоморфных мультипликативных автоморфных форм // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 4. С. 902–914.

[7] *Сергеева О. А.* Билинейные спаривания для голоморфных (q, ρ)-форм // Журнал СФУ. 2011. Т. 4, № 1. С. 128–139.

[8] *Сергеева О. А.* Интегральный оператор Берса в нормированных пространствах мероморфных (q, ρ)-форм // Вестник КемГУ. 2011. № 3/1 (47). С. 216–223.

[9] *Сергеева О. А.* Интегральный оператор проектирования и ряд Пуанкаре для голоморфных (q, ρ)-форм // Вестник КемГУ. 2013. № 2 (54). С. 91–97.