Многомерные преобразования Мутара: проблемы и перспективы

С.П.Царев

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск

31.08.2013

Классическое (гиперболическое) преобразование Мутара

Для 2-мерного волнового оператора с потенциалом $u(x,y)$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - u(x,y)$$

преобразование Мутара строится по решению ω уравнения $L\omega = 0$ и имеет вид

$$u \longrightarrow \widetilde{u} = u - 2(\log \omega)_{xy}.$$

Если $L\psi = 0$, то

$$\widetilde{L}\,\theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \widetilde{u} \right) \theta = 0,$$

где θ определяется с точностью до слагаемого $\frac{\mathrm{const}}{\omega}$ из уравнений

$$(\omega\theta)_x = -\omega^2 \left(\frac{\psi}{\omega} \right)_x, \quad (\omega\theta)_y = \omega^2 \left(\frac{\psi}{\omega} \right)_y.$$

Эллиптическое преобразование Мутара

Для 2-мерного стационарного оператора Шредингера

$$L = -\Delta + u, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

преобразование Мутара строится по решению ω уравнения $L\omega = 0$ и имеет вид

$$u \longrightarrow \widetilde{u} = u - 2\Delta \log \omega.$$

Если $L\psi = 0$, то

$$\widetilde{L}\,\theta = (-\Delta + \widetilde{u})\,\theta = 0,$$

где θ определяется с точностью до слагаемого $\frac{\mathrm{const}}{\omega}$ из уравнений

$$(\omega\theta)_x = -\omega^2 \left(\frac{\psi}{\omega}\right)_y, \quad (\omega\theta)_y = \omega^2 \left(\frac{\psi}{\omega}\right)_x.$$

Приложения преобразования Мутара

- Классическая дифференциальная геометрия (XIX–начало XX вв., Th. Moutard, G.Darboux et al.).

Приложения преобразования Мутара

- Классическая дифференциальная геометрия (XIX–начало XX вв., Th. Moutard, G.Darboux et al.).
- Спектральная теория одномерного оператора Шредингера, теория солитонов (“преобразование Дарбу”, XX вв. – ...).

Приложения преобразования Мутара

- Классическая дифференциальная геометрия (XIX–начало XX вв., Th. Moutard, G.Darboux et al.).
- Спектральная теория одномерного оператора Шредингера, теория солитонов ("преобразование Дарбу", XX вв. – ...).
- Спектральная теория двумерного оператора Шредингера, уравнение Веселова-Новикова (Тайманов-Царев, Тайманов-Р.Новиков-Царев, 2007-2013):

Приложения преобразования Мутара

- Классическая дифференциальная геометрия (XIX–начало XX вв., Th. Moutard, G.Darboux et al.).
- Спектральная теория одномерного оператора Шредингера, теория солитонов (“преобразование Дарбу”, XX вв. – ...).
- Спектральная теория двумерного оператора Шредингера, уравнение Веселова-Новикова (Тайманов-Царев, Тайманов-Р.Новиков-Царев, 2007-2013):
  - операторы Шредингера с быстроубывающими (рациональными) потенциалами и нетривиальным ядром;

Приложения преобразования Мутара

- Классическая дифференциальная геометрия (XIX–начало XX вв., Th. Moutard, G.Darboux et al.).
- Спектральная теория одномерного оператора Шредингера, теория солитонов (“преобразование Дарбу”, XX вв. – ...).
- Спектральная теория двумерного оператора Шредингера, уравнение Веселова-Новикова (Тайманов-Царев, Тайманов-Р.Новиков-Царев, 2007-2013):
  - операторы Шредингера с быстроубывающими (рациональными) потенциалами и нетривиальным ядром;
  - распадающиеся решения уравнения Веселова-Новикова;

Приложения преобразования Мутара

- Классическая дифференциальная геометрия (XIX–начало XX вв., Th. Moutard, G.Darboux et al.).
- Спектральная теория одномерного оператора Шредингера, теория солитонов ("преобразование Дарбу", XX вв. – ...).
- Спектральная теория двумерного оператора Шредингера, уравнение Веселова-Новикова (Тайманов-Царев, Тайманов-Р.Новиков-Царев, 2007-2013):
  - операторы Шредингера с быстроубывающими (рациональными) потенциалами и нетривиальным ядром;
  - распадающиеся решения уравнения Веселова-Новикова;
  - Фаддеевские функции на одном уровне энергии;

Приложения преобразования Мутара

- Классическая дифференциальная геометрия (XIX–начало XX вв., Th. Moutard, G.Darboux et al.).
- Спектральная теория одномерного оператора Шредингера, теория солитонов ("преобразование Дарбу", XX вв. – ...).
- Спектральная теория двумерного оператора Шредингера, уравнение Веселова-Новикова (Тайманов-Царев, Тайманов-Р.Новиков-Царев, 2007-2013):
  - операторы Шредингера с быстроубывающими (рациональными) потенциалами и нетривиальным ядром;
  - распадающиеся решения уравнения Веселова-Новикова;
  - Фаддеевские функции на одном уровне энергии;
  - операторы Шредингера с убывающими несингулярными потенциалами и кратным положительным собственным значением (потенциалы типа Вигнера-фон Неймана).

Одномерная редукция преобразования Мутара (преобразование Дарбу)

Если потенциал $u(x,y)$ зависит только от x, то преобразование Мутара с $\omega = f(x)$, $\left(-\frac{d^2}{dx^2}+u\right) f = 0$ и $\phi = g(x)e^{\sqrt{E}y}$, $\left(-\frac{d^2}{dx^2}+u\right) g = Eg$ превращается в широко известное преобразование Дарбу одномерных операторов Шредингера, причем действующее *на всех уровнях энергии* E, в отличие от преобразования на одном уровне энергии для двумерного преобразования Мутара:

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) = \left(\frac{d}{dx} + \frac{f'}{f}\right)\left(-\frac{d}{dx} + \frac{f'}{f}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \widetilde{L} = \left(-\frac{d}{dx} + \frac{f'}{f}\right)\left(\frac{d}{dx} + \frac{f'}{f}\right) = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{u}(x).$$

При этом преобразованное решение имеет вид $\theta = \xi(x)e^{\sqrt{E}y}$, причем $\widetilde{L}\xi(x) = E\xi(x)$.

Свойства преобразования Мутара

- Обратимость: если $u_0 \xrightarrow{\omega} u_1$, то $u_1 \xrightarrow{1/\omega} u_0$.

Свойства преобразования Мутара

- Обратимость: если $u_0 \xrightarrow{\omega} u_1$, то $u_1 \xrightarrow{1/\omega} u_0$.
- Редуцируемость к одномерному преобразованию Дарбу.

Свойства преобразования Мутара

- Обратимость: если $u_0 \xrightarrow{\omega} u_1$, то $u_1 \xrightarrow{1/\omega} u_0$.
- Редуцируемость к одномерному преобразованию Дарбу.
- Наличие нелинейных формул суперпозиции

Свойства преобразования Мутара

- Обратимость: если $u_0 \xrightarrow{\omega} u_1$, то $u_1 \xrightarrow{1/\omega} u_0$.
- Редуцируемость к одномерному преобразованию Дарбу.
- Наличие нелинейных формул суперпозиции (с «правильным» произволом).

Преобразования Мутара как (2+1)-мерное преобразование Бэклунда. Формулы нелинейной суперпозиции

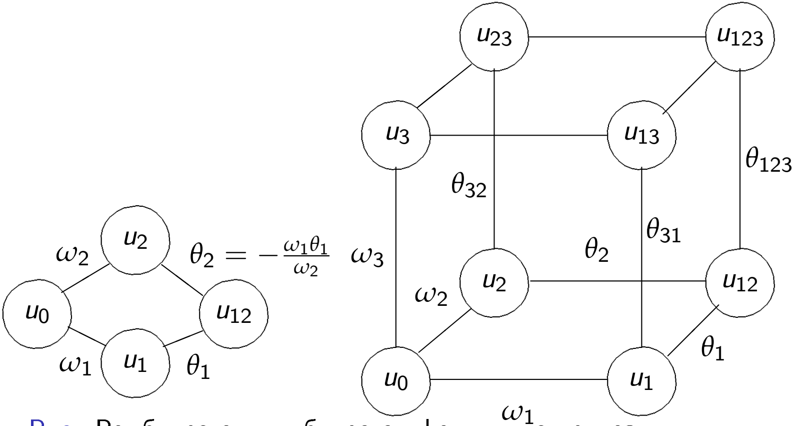

Рис.: Ромбическая и кубическая формулы суперпозиции

Преобразования Мутара как (2+1)-мерное преобразование Бэклунда. Формулы нелинейной суперпозиции

Теорема 1 (L. Bianchi). θ_{123} выражается в конечном виде алгебраической формулой

$$\theta_{123} - \omega_3 = \frac{\omega_1\omega_2}{\lambda}(\theta_{32} - \theta_{31}), \qquad \lambda = \omega_1\theta_1 = -\omega_2\theta_2, \tag{1}$$

Преобразования Мутара как (2+1)-мерное преобразование Бэклунда. Формулы нелинейной суперпозиции

Теорема 1 (L. Bianchi). θ_{123} выражается в конечном виде алгебраической формулой

$$\theta_{123} - \omega_3 = \frac{\omega_1\omega_2}{\lambda}(\theta_{32} - \theta_{31}), \qquad \lambda = \omega_1\theta_1 = -\omega_2\theta_2, \tag{1}$$

Теорема 2. Гиперкубические диаграммы, получаемые при наличии четырех и более начальных решений ω_i, коммутативны и позволяют получить новые потенциалы u_* и решения θ_* без квадратур, начиная с u_{ijk}, θ_{ijk}.

Преобразования Мутара как (2+1)-мерное преобразование Бэклунда. “Периодическая таблица” Бьянки

		$(1+1)$-dim системы	$(2+1)$-dim системы
1	Решения самой системы	Решения параметризованы (несколькими) функциями *одной* переменной	Решения параметризованы (несколькими) функциями *двух* переменных
2	Преобразование Бэклунда	Дает новые решения, параметризованы (несколькими) константами - как решения ОДУ	Дает новые решения, параметризованы (несколькими) функциями *одной* переменной (решение PDE)
3	Решение u_{12} на ромбич. диаграмме	Определено алгебраической формулой через u_0, u_1, u_2	параметризованы (несколькими) константами (находятся квадратурой)

Преобразования Мутара как (2+1)-мерное преобразование Бэклунда. “Периодическая таблица” Бьянки

		$(1+1)$-dim системы	$(2+1)$-dim системы
3	Решение u_{12} на ромбич. диаграмме	Определено алгебраической формулой через u_0, u_1, u_2	параметризованы (несколькими) константами (находятся квадратурой), т.е. алгебраической формулы *нет*
4	Решение u_{123} на кубич. диаграмме	Определено *однозначно* алгебраической формулой через предыдущие	Определено *однозначно* алгебраической формулой через предыдущие

Различные попытки обобщения преобразования Мутара

(Далее всюду $D_* = \partial/\partial *$)

- F-преобразование (H.Jonas & L.Eisenhart, начало XX в.): позволяет преобразовать любое линейное уравнение $\big(D_x D_y + a(x,y)D_x + b(x,y)D_y + c(x,y)\big)\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2$.

Различные попытки обобщения преобразования Мутара

(Далее всюду $D_* = \partial / \partial *$)

- F-преобразование (H.Jonas & L.Eisenhart, начало XX в.): позволяет преобразовать любое линейное уравнение $\big(D_x D_y + a(x,y) D_x + b(x,y) D_y + c(x,y)\big)\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2$.
- Преобразование параболического уравнения $\big(D_x + D_y^2 + u(x,y)\big)\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2$.

Различные попытки обобщения преобразования Мутара

(Далее всюду $D_* = \partial/\partial *$)

- F-преобразование (H.Jonas & L.Eisenhart, начало XX в.): позволяет преобразовать любое линейное уравнение $\big(D_x D_y + a(x,y)D_x + b(x,y)D_y + c(x,y)\big)\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2$.
- Преобразование параболического уравнения $\big(D_x + D_y^2 + u(x,y)\big)\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2$.
- Псевдо-многомерные обобщения (преобразования переопределенных систем PDE).

Различные попытки обобщения преобразования Мутара

(Далее всюду $D_* = \partial/\partial *$)

- F-преобразование (H.Jonas & L.Eisenhart, начало XX в.): позволяет преобразовать любое линейное уравнение $\big(D_x D_y + a(x,y)D_x + b(x,y)D_y + c(x,y)\big)\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2$.
- Преобразование параболического уравнения $\big(D_x + D_y^2 + u(x,y)\big)\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2$.
- Псевдо-многомерные обобщения (преобразования переопределенных систем PDE).
- Многомерные обобщения, переводящие $L = \Delta + u(\vec{x})$ в *матричное* уравнение.

Различные попытки обобщения преобразования Мутара

(Далее всюду $D_* = \partial/\partial *$)

- F-преобразование (H.Jonas & L.Eisenhart, начало XX в.): позволяет преобразовать любое линейное уравнение $\big(D_x D_y + a(x,y)D_x + b(x,y)D_y + c(x,y)\big)\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2$.
- Преобразование параболического уравнения $\big(D_x + D_y^2 + u(x,y)\big)\psi = 0$ в $\mathbb{R}^2$.
- Псевдо-многомерные обобщения (преобразования переопределенных систем PDE).
- Многомерные обобщения, переводящие $L = \Delta + u(\vec{x})$ в *матричное* уравнение.
- Преобразования, применимые к многомерным операторам Шредингера с потенциалами специального вида.