Правильный горизонт событий наблюдателя в пространстве–времени де Ситтера

В.Н.Берестовский, И.А.Зубарева

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Дни геометрии - 2014, Новосибирск, 24-27 сентября 2014

История вопроса

В начале 70-х годов В.А. Топоногов предложил студентам НГУ следующую задачу.

Задача В.А. Топоногова.

На замкнутой верхней полуплоскости декартовой плоскости (x, y) определена непрерывно дифференцируемая вещественная функция f, тождественно равная нулю на прямой $y = 0$, и всюду для f модуль частной производной по y не превосходит модуля частной производной по x. Доказать, что f равна нулю всюду.

В 2010 г. В.Н.Берестовский в своей работе [1] дал положительные решения этой задачи и ее естественного обобщения в случае пространства-времени Минковского.
В 2013 г. мы получили положительное решение такого обобщения в случае глобально гиперболического пространства–времени (см. [3]).

Предварительные необходимые сведения

Напомним необходимые определения из книги [5].

Определение 1.

Лоренцевым многообразием называется пара (M, g), где M — C^∞-многообразие размерности $n+1 \geq 2$, g — гладкое симметричное тензорное поле типа $(0,2)$, заданное на M так, что в каждой точке $p \in M$ тензор $g|_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ представляет собой невырожденное скалярное произведение с сигнатурой $(+,+,\ldots,+,-)$.

Определение 2.

Ненулевой вектор $v \in TM$ называется непространственноподобным (соответственно, временноподобным, изотропным, пространственно-подобным), если $g(v,v) \leq 0$ (соответственно, < 0, $= 0$, > 0).

Определение 3.

Непрерывное векторное поле X на лоренцевом многообразии M называется **временноподобным**, если $g(X(p), X(p)) < 0$ для всех точек $p \in M$. Если лоренцево многообразие (M, g) допускает временноподобное векторное поле X, то (M, g) называют **ориентированным во времени посредством поля X**.

Временноподобное векторное поле X разбивает все непространственноподобные векторы на два непересекающихся класса — класс векторов, направленных в будущее, и класс векторов, направленных в прошлое.

Определение 4.

Непространственноподобный касательный вектор $v \in T_pM$, $p \in M$, называется **направленным в будущее** (соответственно, **направленным в прошлое**), если $g(X(p), v) < 0$ (соответственно, $g(X(p), v) > 0$).

Определение 5.

Лоренцево многообразие называется ориентируемым во времени, если оно допускает ориентацию во времени посредством некоторого временноподобного векторного поля X.

Определение 6.

Пространством–временем (M, g) называется связное хаусдорфово C^∞-многообразие (со второй аксиомой счетности) размерности не меньше двух со счетной базой окрестностей, лоренцевой метрикой g сигнатуры $(+, +, \dots, +, -)$ и временной ориентацией.

Определение 7.

Непрерывная кусочно непрерывно дифференцируемая кривая $c = c(t)$, где $t \in [a, b]$ или $t \in (a, b)$, в лоренцевом многообразии (M, g) называется непространственноподобной, если $g(c_l'(t), c_r'(t)) \leq 0$ для любого $t \in (a, b)$, где $c_l'(t)$ $(c_r'(t))$ — левый (правый) касательный вектор.

Если при этом (M, g) — пространство-время, то кривая $c = c(t)$ направлена в будущее или направлена в прошлое, т.е. все (вообще говоря, односторонние) касательные векторы кривой c одновременно направлены в будущее или направлены в прошлое (но не то и другое вместе).

Определение 8.

Причинное будущее $J^+(L)$ (соответственно, причинное прошлое $J^-(L)$) подмножества L пространства-времени (M, g) есть множество всех точек $q \in M$, для которых существует направленная в будущее (соответственно, в прошлое) кривая $c = c(t), t \in [a, b]$, такая, что $c(a) \in L, c(b) = q$.

Определение 9.

Открытое множество U в пространстве–времени (M, g) называется причинно выпуклым, если никакая непространственноподобная кривая не пересекает U по несвязному множеству.
Пространство–время (M, g) называется сильно причинным, если у каждой точки $p \in M$ есть сколь угодно малые причинно выпуклые окрестности.

Критерий сильно причинности пространства–времени.

Пространство–время (M, g) сильно причинно тогда и только тогда, когда множества вида $I^+(p) \cap I^-(q)$, где p, q — всевозможные точки из M, образуют базу исходной топологии (т.е. топология А.Д. Александрова на (M, g) совпадает с исходной топологией многообразия M).

Определение 10.

Пространство–время (M, g) называется глобально гиперболическим, если (M, g) сильно причинно и для любых точек $p, q \in M$ множество $J^+(p) \cap J^-(q)$ компактно относительно топологии многообразия M.

Определение 11.

Пусть S — подмножество глобально гиперболического пространства–времени (M, g). Граница $\Gamma^-(S)$ множества $J^-(S)$ называется горизонтом событий прошлого для S. Граница $\Gamma^+(S)$ множества $J^+(S)$ называется горизонтом событий будущего для S.

Полученные результаты

Теорема 1. Обобщение задачи Топоногова в случае глобально гиперболического пространства-времени.

Пусть f — непрерывно дифференцируемая вещественная функция на глобально гиперболическом пространстве-времени (M, g), имеющая в каждой точке невременноподобный градиент. Тогда для каждой поверхности Коши S в (M, g) и каждой точки u^1 в $J^+(S)$ (соответственно, $J^-(S)$) существует точка $u^0 \in S \cap J^-(u^1)$ (соответственно, $u^0 \in S \cap J^+(u^1)$) такая, что $f(u^1) = f(u^0)$.

Теорема 2.

(Связное) лоренцево многообразие (M, g), допускающее гладкую функцию ϕ с временноподобным градиентом $\nabla\phi$, глобально гиперболично, если все множества уровня $S_t = \phi^{-1}(t)$, $t \in \phi(M)$, компактны.

Примеры глобально гиперболических пространств-времен, допускающих гладкие функции с временноподобным градиентом: космологические модели А.А. Фридмана, пространство-время Робертсона-Уокера.

Пространство–время де Ситтера первого рода

Один из простых примеров глобально гиперболического пространства–времени доставляет пространство–время де Ситтера первого рода — однополостной гиперболоид $S(R)$ в пространстве-времени Минковского Mink^{n+1}, $n+1 \geq 3$, определяемый уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - t^2 = R^2, \;\; R > 0, \tag{1}$$

с индуцированной из Mink^{n+1} лоренцевой метрикой.

Временная ориентация на $S(R)$ определяется касательным векторным полем Y, ортогональным всем пространственноподобным сечениям вида

$$S(R, c) = S(R) \cap \{(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t = c\}, \;\; c \in \mathbb{R},$$

последняя компонента которого в $\mathbb{R}^{n+1}$ равна 1.

Всякая интегральная кривая векторного поля Y является направленной в будущее временноподобной геодезической в $S(R)$. Поэтому ее можно рассматривать как мировую линию некоторого наблюдателя.

Основной результат работы [4]

Теорема 3.

Пусть L — временноподобная геодезическая в пространстве–времени де Ситтера первого рода, $\Gamma^{-}(L)$ — горизонт событий прошлого (наблюдателя) для L. Тогда
1. $\Gamma^{-}(L) = S(R) \cap \alpha$, где α — некоторая гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящая через начало координат и состоящая из изотропных геодезических.
2. $J^{+}(L) = -J^{-}(-L)$, $J^{-}(L) = -J^{+}(-L)$.
3. Множества $J^{+}(L)$ и $J^{-}(-L)$ (соответственно, $J^{-}(L)$ и $J^{+}(-L)$) не пересекаются и имеют общую границу, состоящую из изотропных геодезических. В частности, горизонт событий прошлого для L совпадает с горизонтом событий будущего для $-L$ (соответственно, горизонт событий будущего для L совпадает с горизонтом событий прошлого для $-L$).
4. Фактор–отображение $pr : S(R) \to S^1_n(R)$, отождествляющее диаметрально противоположные точки из $S(R)$, является диффеоморфизмом на каждом из открытых подмногообразий $J^{+}(L)$, $J^{-}(-L)$, $J^{-}(L)$, $J^{+}(-L)$ и склеивает попарно диаметрально противоположные точки границ каждого из этих подмногообразий

Продолжение теоремы 3.

5. Фактор–многообразие $(S^1_n(R), G)$, где $g = pr^*G$, есть пространство Лобачевского положительной кривизны $\frac{1}{R^2}$ в терминологии Б.А.Розенфельда (см. с. 155 в книге [6]).

Следствие 1.

Пусть L — временноподобная геодезическая в $S(R)$, p — точка пересечения L с $S(R,0)$. Горизонт $\Gamma^-(L)$ событий прошлого для L пересекает $S(R,0)$ по сфере $S_{S(R,0)}(p, \pi R/2)$ радиуса $\pi R/2$ с центром в точке p.

Следствие 2.

Пусть f — непрерывно дифференциремая вещественная функция с невременноподобным градиентом на $S(R)$. Тогда значение функции f на мировой линии L зависят лишь от ее значений на открытом шаре $U_{S(R,0)}(p, \pi R/2)$, где p — точка пересечения L с $S(R,0)$.

Ранее утверждения о горизонте событий прошлого сформулировал без доказательства В.Н. Берестовский в своем пленарном докладе в Казани в 2010 г., но в тексте [2] этого доклада их нет.

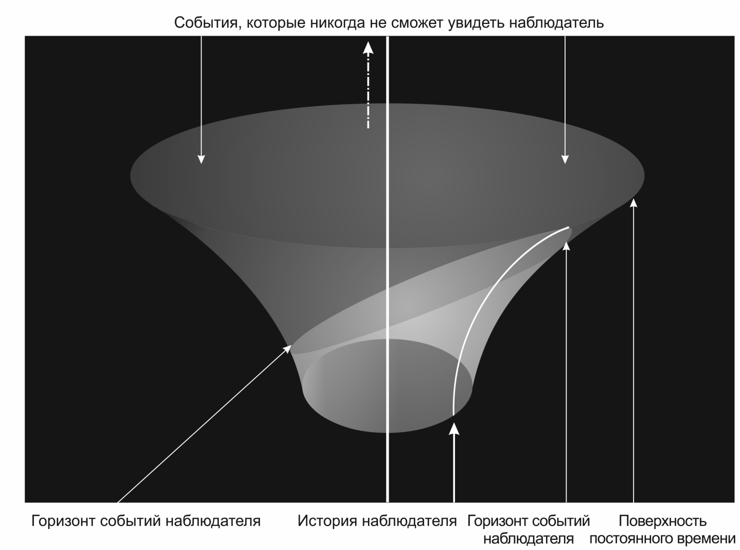

Рис.: Рис № 4.18 горизонта событий наблюдателя из книги Хокинга [7]

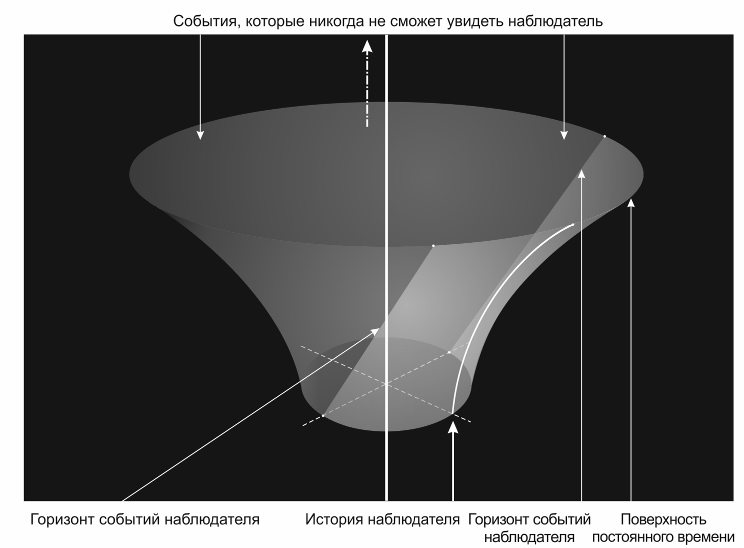

Рис.: Правильный горизонт событий наблюдателя для $0 \leq t \leq t_0$

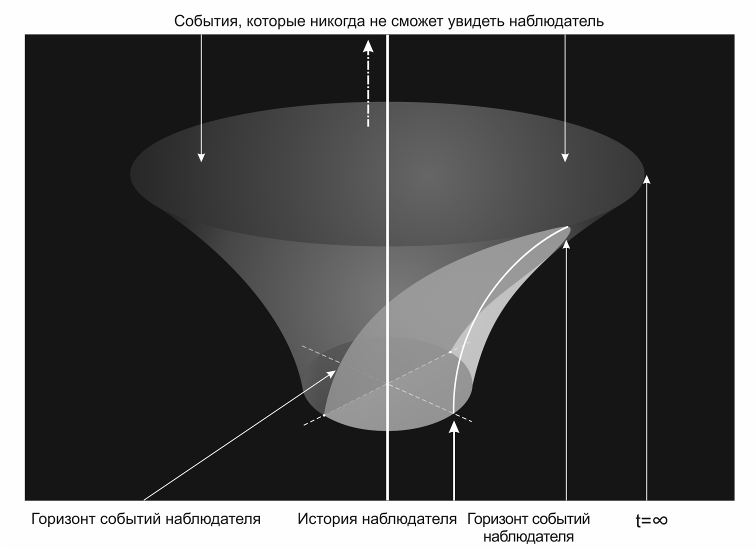

Рис.: Правильный горизонт событий наблюдателя для $0 \leq t \leq +\infty$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берестовский В.Н. Об одной задаче В.А.Топоногова // Мат. труды. 2010. Т. 13. №1. С. 15-22.
2. Берестовский В.Н. Об одной задаче В.А.Топоногова и ее обобщениях // Пленарный доклад на Международной конференции "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation 2010", 1-6 November, Kazan. Relativity, Gravity and Geometry. Contributed papers. P. 62-65.
3. Берестовский В.Н., Зубарева И.А. Функции с (не)временноподобным градиентом на пространстве-времени // Мат. труды. 2014. Т. 17. №2. С. 1-20.
4. Berestovsii V.N., Zubareva I.A. Correct observer's event horizon in de Sitter space-time // отправлена в ред. "Сибирские электронные известия".
5. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия // М.: Мир, 1985.
6. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии // М.: ГИТТЛ, 1953.
7. Хокинг С. Мир в ореховой скорлупке // СПб.: Амфора, 2007.