О разбиениях гиперболической плоскости положительной кривизны правильными орициклическими n-трапециями

Ромакина Людмила Николаевна

Саратовский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского

25 сентября 2014 г.

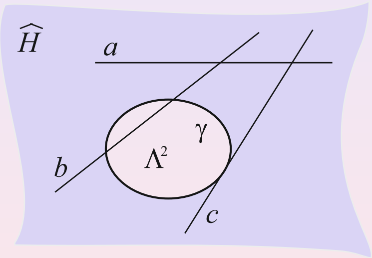
1. Цель исследования — построение нормальных моноэдральных разбиений гиперболической плоскости положительной кривизны

Первые разбиения гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны [1], [2] построены в работах [3], [4].

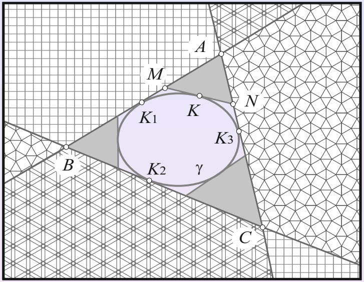
1. Л. Ромакина, *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия*, Изд-во Сарат. ун-та, (2013).
2. Л. Ромакина, *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения*, Изд-во Сарат. ун-та, (2013).
3. Л. Ромакина, "Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны", *Матем. сб.*, Vol. 203, No. 9, 83–116 (2012).
4. Л. Ромакина, "Веерные триангуляции гиперболической плоскости положительной кривизны", *Матем. тр.*, Vol. 16, No. 2, 142–168 (2013).

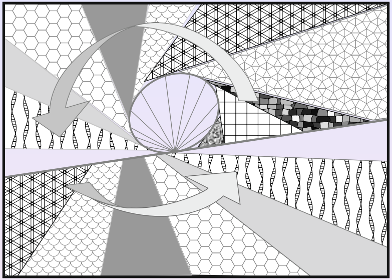
Простые разбиения на $\widehat{H}$ [3] (см. также [2]), ячейкой которых является простой 4-контур, являются моноэдральными, но не являются нормальными и не являются правильными. В статье [4] построены первые нормальные разбиения плоскости $\widehat{H}$, но описанные в этой статье разбиения, названные веерными, не являются моноэдральными. Нерешенной до настоящего времени оставалась обозначенная в работе [2] задача построения нормальных моноэдральных разбиений плоскости $\widehat{H}$. В докладе представим серии нормальных моноэдральных разбиений плоскости $\widehat{H}$, не являющихся правильными.

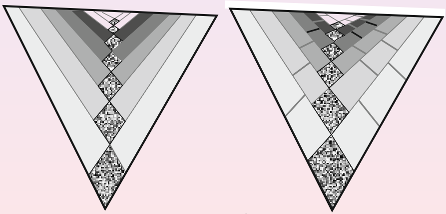
Гиперболическую плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны рассматриваем в проективной интепретации Кэли – Клейна, на идеальной области плоскости Лобачевского



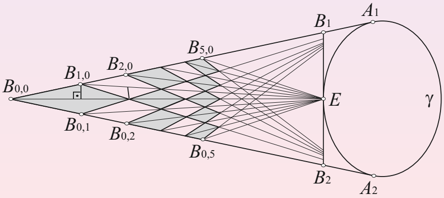
Абсолют плоскости $\widehat{H}$ — овальная линия γ.
Типы прямых: эллиптическая a, гиперболическая b, параболическая c



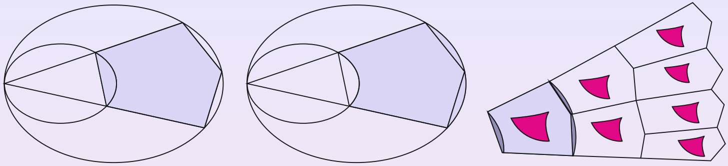




а *б*



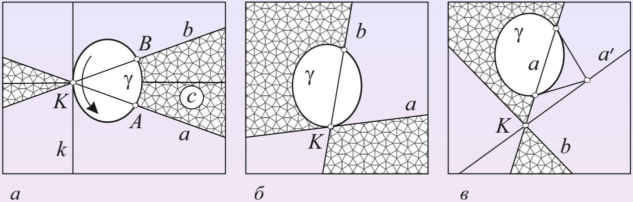
3. Схема К. Березкого



Задача определения понятия плотности упаковки на плоскости Лобачевского.
В 1974 г. К. Березким в работе [5] при исследовании упаковок на плоскости Лобачевского предложена конструкция нормального моноэдрального разбиения плоскости Λ^2 пятиугольниками особого вида.
В 1991 г. В. С. Макаровым доказано [6], что предложенное Березким разбиение (и его аналог в n-мерном пространстве Лобачевского) дает ответ на второй вопрос восемнадцатой проблемы Гильберта в его постановке для данного пространства, т. е. само разбиение не является правильным и из его ячеек некоторым их перемещением нельзя составить правильное разбиение.

5. K. Boroczky, "Gombkitoltesek allando gorbuletu terekben, I", *Mat. lapok*, Vol. 25, 265–306 (1974).
6. В. Макаров, "Об одном неправильном разбиении n-мерного пространства Лобачевского конгруэнтными многогранниками", *Тр. МИАН СССР*, Vol. 196, 93–96 (1991).

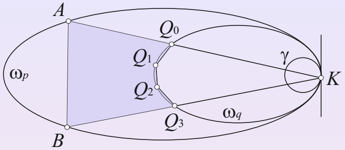
4. Используемые в работе углы плоскости $\widehat{H}$



Углы плоскости $\widehat{H}$ с вершиной K между прямыми a, b: полоса и псевдополоса ($а$), параболические флаги ($б$), квазиуглы ($в$)

Квазиугол, содержащий (не содержащий) прямую, ортогональную своей гиперболической стороне, называют *гиперболическим* (*эллиптическим*). Квазиуглы имеют комплексные меры с постоянной мнимой частью $\pi/2$. Вещественные части мер гиперболических (эллиптических) квазиуглов — положительные (отрицательные) числа. Меры прямых квазиуглов равны $i\pi/2$. Полосы, псевдополосы и флаги — неизмеримые объекты плоскости $\widehat{H}$.

5. Правильная орициклическая n-трапеция



Правильная орициклическая 3-трапеция AQ_0Q_3B

Теорема 1. *На плоскости $\widehat{H}$ для каждого натурального значения n, $n > 1$, существует и притом однопараметрическое семейство определенных с точностью до движения правильных орициклических n-трапеций.*

Теорема доказана методом проективных координат с использованием следующих лемм.

Лемма 1. Для каждого орицикла ω_q и заданной на его базе последовательности точек T_0, $T_1, \ldots, T_n$, $n > 1$, существует единственный концентрический с ω_q орицикл ω_p такой, что отрезки $b_1, b_2, \ldots, b_n$ конгруэнтны основанию AB вписанной в кольцо между орициклами ω_p, ω_q орициклической n-трапеции AQ_0Q_nB, где $A = p_\gamma(T_0) \cap \omega_p$, $B = p_\gamma(T_n) \cap \omega_p$.

Лемма 2. *Орициклическая n-трапеция плоскости $\widehat{H}$ с конгруэнтными основанию купольными ребрами полностью принадлежит замыканию своего основного орицикла.*

Лемма 3. *Орициклическая n-трапеция плоскости $\widehat{H}$ с конгруэнтными основанию купольными ребрами симметрична относительно серединного перпендикуляра к основанию.*

6. Элементарные свойства правильной орициклической n-трапеции

Теорема 2. *Правильная орициклическая n-трапеция плоскости $\widehat{H}$ симметрична относительно серединного перпендикуляра к основанию.*

Теорема 3. *Правильная орициклическая n-трапеция плоскости $\widehat{H}$ принадлежит полностью замыканию своего основного орицикла.*

Теорема 4. *Правильная орициклическая n-трапеция плоскости $\widehat{H}$ не является выпуклой.*

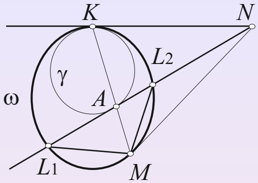
Теорема 5. *Длина b бокового ребра правильной орициклической n-трапеции плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, однозначно определена числом n:*

$$b = \rho \ln n.$$

Теорема 6. *Длина a каждого эллиптического ребра правильной орициклической n-трапеции плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ при четном, нечетном значении n принадлежит соответственно интервалу*

$$\left(0; \rho \arccos \frac{2-n^2}{n^2}\right), \quad (0; \pi\rho).$$

Выясним геометрический смысл величины $\theta(n) = \rho \arccos \frac{2-n^2}{n^2}$.



Своеобразным эталоном измерения дуг орициклов является дуга, высекаемая на орицикле отличной от его базы параболической прямой, такую дугу назовем *параболической дугой* орицикла. В решении различных задач удобно также использовать половину параболической дуги, назовем ее *единичной дугой* орицикла (применяя ортогональные орициклические координаты, можно показать, что длина единичной дуги орицикла равна радиусу кривизны ρ плоскости $\widehat{H}$).

Известно [3, теорема 2.4.27], что внутренняя эллиптическая хорда орицикла, стягивающая его единичную дугу, равна трети эллиптической прямой. Следовательно, смежная с ней внешняя эллиптическая хорда орицикла имеет длину $2\pi\rho/3$. Заметим, что величина $\theta(2)$ также равна $2\pi\rho/3$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, длина внешней эллиптической хорды орицикла, стягивающей n-ую часть его параболической дуги, равна $\theta(n) = \rho \arccos \frac{2-n^2}{n^2}$.*

Установленный в теореме 7 геометрический смысл величины $\theta(n)$ позволяет сформулировать теорему 8, равносильную теореме 6.

Теорема 8. *Каждое эллиптическое ребро правильной орициклической n-трапеции плоскости $\widehat{H}$ при четном n является отрезком, не достигающим по длине внешнюю хорду орицикла, стягивающую n-ную часть его параболической дуги, при нечетном n — отрезком, не достигающим содержащую его эллиптическую прямую.*

9. Площадь правильной орициклической n-трапеции

Теорема 9. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n-трапеции с основанием длиной a может быть вычислена по формуле*

$$S = 2\rho^2(n-1)\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4\rho}\right).$$

Функция $\widetilde{\alpha}(x) = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2\rho}\right)$, названная *функцией угла квазипараллельности*, определяет на плоскости $\widehat{H}$ зависимость вещественной части меры квазиугла параллельности в точке плоскости относительно гиперболической прямой от расстояния x, $x \in (0; \pi\rho/2)$, данной точки до указанной прямой.

Теорема 10. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n-трапеции с основанием длиной a может быть вычислена по формуле*

$$S = 2\rho^2(n-1)\,\widetilde{\alpha}\left(\frac{a}{2}\right).$$

Теорема 11. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n-трапеции с мерой A внутреннего квазиугла при основании может быть вычислена по формуле*

$$S = 2\rho^2(n-1)\left(i\frac{\pi}{2}-A\right).$$

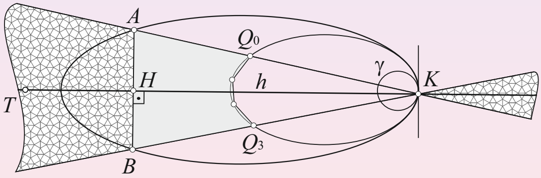
10. Площадь правильной орициклической n-трапеции

Теорема 12. *На плоскости $\widehat{H}$ внутренний квазиугол при основании правильной орициклической n-трапеции является эллиптическим квазиуглом.*

Следствием теорем 6, 7, 10 является следующая теорема.

Теорема 13. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n-трапеции с ростом длины a основания возрастает, при нечетном значении n возрастает неограниченно, а при четном — принадлежит интервалу*

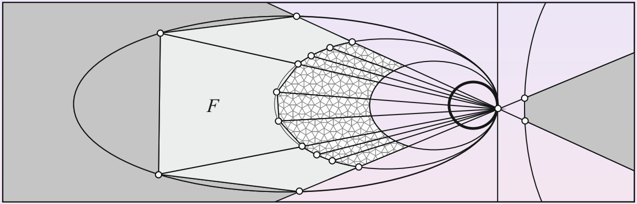
$$\left(0;\ 2\rho^2(n-1)\,\widetilde{\alpha}\left(\frac{\theta(n)}{2}\right)\right).$$



Теорема 14. *На плоскости $\widehat{H}$ площадь S правильной орициклической n-трапеции в $n-1$ раз превышает площадь S_0 смежного с ней бесконечного трехреберника*:

$$S = (n-1)S_0.$$

11. Разбиения плоскости $\widehat{H}$ правильной орициклической n-трапеции



Фрагмент разбиения плоскости $\widehat{H}$ (с исключенной параболической прямой) правильной орициклической 3-трапецией

Доказано, что построенные нормальные моноэдральные разбиения плоскости $\widehat{H}$ (с исключенной параболической прямой) правильной орициклической n-трапецией являются неправильными.