О гармоничности тензора конциркулярной кривизны метрических групп Ли малой размерности.

П.Н. Клепиков, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет

24 сентября 2014

Введение

Особый интерес в дифференциальной геометрии представляют конформные преобразования. Хорошо известно, что конформные преобразования метрики переводят геодезические в геодезические в том и только том случае, если они тривиальны. Существуют, и нетривиальные конформные преобразования, которые переводят геодезические окружности в геодезические окружности. Такие конформные преобразования называются конциркулярными преобразованиями.

К. Яно [5] ввел в рассмотрение тензор Z конциркулярной кривизны, являющийся инвариантом конциркулярных преобразований, и доказал, что риманово пространство конциркулярно-плоско в том и только том случае, если тензор Z тривиален.

Введение

Продолжение исследований концикулярных преобразований и свойств тензора концикулярной кривизны нашли в работах многих математиков и физиков, причём особый интерес представляет изучение его гармонических свойств (Н.С. Синюков [3], Z. Ahsan, S.A. Siddiqui [6], J.P. Srivastava, S. Khajuria [9], U.C. De, G. Pathak [7]).

Настоящая работа посвящена изучению концикулярно-гармонических свойств метрических групп Ли малых размерностей. Получена полная классификация трехмерных групп Ли с левоинвариантными (псевдо)римановыми метриками и четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором концикулярой кривизны.

Основные обозначения и факты

Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n.

Определение 1

Геодезическая окружность в M определяется как кривая, первая кривизна которой постоянна, а последующие кривизны равны нулю.

Определение 2 [К. Яно [5]]

Конформное преобразование, при котором геодезическая окружность преобразуется в геодезическую окружность называется конциркулярным.

Основные обозначения и факты

Определение 3 [К. Яно [5]]

Тензором конциркулярной кривизны называется тензор вида

$$Z = R - \frac{\rho}{2n(n-1)} g \owedge g,$$

где $\owedge$ — произведение Кулкарни-Номидзу.
Или в локальной системе координат

$$Z_{hijk} = R_{hijk} - \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj}),$$

который инвариантен относительно конциркулярного преобразования.

Определение 4.

Назовем тензор конциркулярной кривизны гармоническим, если выполняется условие $(\mathrm{div} Z)_{ijk} = g^{st} Z_{ijkt;s} = 0$.

Теорема 1 [Клепиков, Хромова]

Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тензор конциркулярной кривизны является гармоническим на G в том и только том случае, если выполняется одно из условий:

1. алгебра Ли группы G имеет один из следующих типов: либо $su(2)$, либо $e(2)$, либо R^3, и левоинвариантная риманова метрика гомотетична стандартной (т.е. структурные константы алгебры Ли равны между собой);
2. G — неунимодулярная группа Ли, и структурные константы ее алгебры Ли имеют один из следующих видов:
   1. $C = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}$,
   2. $C = \begin{pmatrix} 1 \pm \sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \\ \gamma & 1 \mp \sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix}, \gamma \in [-1; 1]$.

Основные результаты

Следствие.

В условиях теоремы 1 тензор конциркулярной кривизны не тривиален и гармоничен,только если структурные константы алгебры Ли задаются матрицей (2.2).

Теорема 2 [Клепиков, Хромова]

Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тензор концикулярной кривизны является гармоническим на G в том и только том случае, если выполняется одно из условий:

1. алгебра Ли группы G имеет тип $su(2)$,$e(2)$,$e(1,1)$,$sl(2,R)$ или R^3.
2. G — неунимодулярная группа Ли, и структурные константы ее алгебры Ли и компоненты метрического тензора содержатся в следующем списке:
   1. $C = \begin{pmatrix} \lambda\cos(\varphi) & \lambda\sin(\varphi) & 0 \\ -\lambda\sin(\varphi) & \lambda\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
   $\lambda \neq 0, \varphi \neq \pi k, k \in \mathbb{R}$

2.

2. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \neq 0,\ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \neq 0,\ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. $C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, q \neq t,\ g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $C = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, q \neq 0,\ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t \neq 0,\ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ -q & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, q \neq 0,\ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Следствие.

В условиях теоремы 2 тензор конциркулярной кривизны не тривиален и гармоничен, если алгебра Ли имеет тип $sl(2,R)$, либо если структурные константы алгебры Ли задаются матрицами (2.2),(2.3),(2.5) или (2.6).

Теорема 3 [Клепиков, Хромова]

Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathrm{div} Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в следующей таблице:

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$4A_1$	
4	$A_{3,6} \oplus A_1$	$C^1_{2,3} = c$, $C^2_{1,3} = -c$, где $c > 0$.
6	$A_{3,9} \oplus A_1$	$C^3_{1,2} = a$, $C^4_{1,2} = -am$, $C^1_{2,3} = a(m^2+1)$, $C^2_{1,3} = -a(m^2+1)$, где $a > 0$.

Основные результаты

Следствие.

Среди вещественных четырехмерных унимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны только алгебра $A_{3,9} \oplus A_1$ имеет нетривиальный тензор конциркулярной кривизны.

Теорема 4 [Клепиков, Хромова]

Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\operatorname{div} Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в следующей таблице:

Основные результаты

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$A_2 \oplus 2A_1$	$C^2_{1,2} = a$, где $a > 0$.
2	$2A_2$	$C^2_{1,2} = a$, $C^4_{3,4} = g$, где $a > 0, g > 0$.
4	$A_{3,3} \oplus A_1$	$C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = a$, где $a > 0$.
6	$A^{\alpha}_{3,7} \oplus A_1$, $\alpha > 0$	$C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = \alpha l$, $C^1_{2,3} = -C^2_{1,3} = l$, где $l > 0$.
10	$A^{1,1}_{4,5}$	$C^1_{1,4} = C^2_{2,4} = C^3_{3,4} = l$, где $l > 0$.
11	$A^{\alpha,0}_{4,6}$, $\alpha \neq 0$	$C^1_{1,4} = \alpha l$, $C^3_{2,4} = -l$, $C^2_{3,4} = l$, где $l > 0$.
11	$A^{\alpha,\alpha}_{4,6}$, $\alpha > 0$	$C^1_{1,4} = C^2_{2,4} = C^3_{3,4} = \alpha l$, $C^2_{3,4} = -C^3_{2,4} = l$, где $l > 0$.

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
13	$A^1_{4,9}$	$C^1_{1,4} = C^1_{2,3} = 2a$, $C^2_{2,4} = C^3_{3,4} = a$, где $a > 0$.
14	$A^\alpha_{4,11}$	$C^1_{1,4} = 2C^3_{3,4} = 2C^2_{2,4} = 2a\alpha$, $C^1_{2,3} = 2a\|\alpha\|$, $C^2_{3,4} = -C^3_{2,4} = a$, где $a > 0$.
15	$A_{4,12}$	$C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = a$, $C^1_{1,4} = C^2_{2,4} = b$, $C^1_{2,4} = -C^2_{1,4} = d$, где $a > 0, d > 0$.

Следствие.

Среди вещественных четырехмерных неунимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны только алгебра $A^{\alpha,\alpha}_{4,6}$ имеет тривиальный тензор конциркулярной кривизны.

[J. Milnor [8]]: Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2.$$

Здесь $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $i = 1, 2, 3$.

Пример доказательства

Имея значения структурных констант и компоненты матрицы метрического тензора, вычислим компоненты тензора концир-кулярной кривизны и его дивергенции.
Ненулевые компоненты тензора конциркулярной кривизны имеют следующий вид:

$$3Z_{2121} = \lambda_3\lambda_2 - 2\lambda_3^2 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^2,$$
$$3Z_{3131} = \lambda_3\lambda_2 - 2\lambda_2^2 + \lambda_2\lambda_1 + \lambda_3^2 - 2\lambda_3\lambda_1 + \lambda_1^2,$$
$$3Z_{3232} = \lambda_3\lambda_1 - 2\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_1 + \lambda_3^2 - 2\lambda_3\lambda_2 + \lambda_2^2.$$

Пример доказательства

Рассчитаем дивергенцию тензора конциркулярной кривизны $(\mathrm{div}Z)_{ijk} = g^{st}Z_{ijkt;s}$:

$$2\mathrm{div}Z_{213} = \lambda_3^2\lambda_2 - \lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_2^3 - 2\lambda_3^3 + \lambda_3^2\lambda_1 - \lambda_2\lambda_1^2 + \lambda_1^3,$$
$$2\mathrm{div}Z_{312} = -\lambda_3\lambda_2^2 - \lambda_2^2\lambda_1 + 2\lambda_2^3 - \lambda_3^3 + \lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_1^3,$$
$$2\mathrm{div}Z_{321} = \lambda_3\lambda_1^2 - 2\lambda_1^3 + \lambda_2\lambda_1^2 - \lambda_3^2\lambda_2 + \lambda_3^3 - \lambda_3\lambda_2^2 + \lambda_2^3.$$

Решим систему уравнений $(\mathrm{div}Z)^i_{\cdot jk} = 0$ относительно структурных констант $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ алгебры Ли группы G:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3, \\ \lambda_1 = 0. \end{cases} \text{или} \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3, \\ \lambda_2 = 0. \end{cases} \text{или} \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases} \text{или}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

Библиографический список I

[1] А.Г. Кремлев, Ю.Г. Никоноров. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай / Мат. труды. — 2008. — Т. 11, № 2. С.115–147.

[2] А.Г. Кремлев, Ю.Г. Никоноров. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай / Мат. труды. — 2009. — Т. 12, № 1. С.40–116.

[3] Н.С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств / М. : Наука, 1979. – 256 с.

[4] Л.Н. Чибрикова. Применение пакетов аналитических вычислений к решению задач однородной (псевдо)римановой геометрии: Дис. канд. ф.-м. наук: 05.13.18 / АлтГУ. – Барнаул, 2005. – 118с.

- [5] К. Яно, С. Бохнер. Кривизна и числа Бетти / М. : ИЛ, 1957. – 152 с.
- [6] Z. Ahsan, S.A. Siddiqui. Concircular Curvature Tensor and Fluid Spacetimes / Int. J. Theor. Phys. 2009. — V. 48. P. 3202–3212.
- [7] U.C. De, G. Pathak. On a type of contact manifolds / Math. Balk. 1993. — New Ser. 7, №. 2. P. 113-118.
- [8] J. Milnor. Curvature of left invariant metric on Lie groups / Advances in mathematics. – 1976. – V. 21. – P. 293–329.
- [9] J.P. Srivastava, S. Khajuria. Concircular curvature tensor and relativistic gravitation / Jnanabha. 1996. — V. 26. P. 113–114.