О ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ КОНФОРМНО ПОЛУПЛОСКИХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ НУЛЕВОЙ СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНЫ

Пастухова С.В., Хромова О.П.

Алтайский государственный университет

24 сентября 2014 г.

История вопроса

- В работах А.Бессе, Х. и Дж. Ким, Е.Д. Родионова и В.В. Славского, I.M. Singer и J.A. Thorpe изучались конформно плоские римановы многообразия.
- В данной работе исследованы конформно полуплоские 4-мерные римановые многообразия нулевой скалярной кривизны и их поведение при конформных деформациях римановых метрик.

Основные определения и обозначения

Пусть
$(M^n, ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j)$ — компактное риманово многообразие размерности n со связностью Леви-Чивитта ∇.
$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$ — символы Кристоффеля второго рода.
$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}dx^i dx^j$ — дополнительная связность на M^n.
Тогда можно определить тензор деформации связности

$$T^k_{ij} = \frac{1}{2}\bar{g}^{ks}(\bar{g}_{sj,i} + \bar{g}_{is,j} - \bar{g}_{ij,s}).$$

Здесь
$\bar{g}^{ks}$ — матрица обратная к $\bar{g}_{ij}$,
$\bar{g}_{ij,s}$ — ковариантная производная $\bar{g}_{ij}$ относительно связности ∇.

Обозначим через
$\bar{\Gamma}^k_{ij}$ символы Кристоффеля второго рода метрики $\bar{g}_{ij}$,
$\bar{R}^q_{lki}$ тензор кривизны метрики $\bar{g}_{ij}$.
Нетрудно заметить, что

$$\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij},$$

$$\bar{R}^q_{lki} = R^q_{lki} + Q^q_{lki},$$

где
$Q^q_{lki} = T^q_{li,k} + T^q_{kp} T^p_{li} - T^q_{ki,l} - T^q_{lp} T^p_{ki}$ — тензор кривизны метрики g_{ij} относительно связности ∇ (см. [3]),
$R^q_{lki} = \frac{\partial \Gamma^q_{li}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{kp} \Gamma^p_{li} - \frac{\partial \Gamma^q_{ki}}{\partial x^l} - \Gamma^q_{lp} \Gamma^p_{ki}$ — тензор кривизны связности ∇.

Пусть далее $dimM = 4$.
Тогда (см. [1])

$$R = W + A \owedge g,$$

где
A — тензор одномерной кривизны (или тензор Схоутена),
W — тензор Вейля (или тензор конформной кривизны).
Риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j)),$$

где X_i, Y_j — векторные поля на M.

Пусть далее $dimM = 4$.
Тогда (см. [1])

$$R = W + A \owedge g,$$

где
A — тензор одномерной кривизны (или тензор Схоутена),
W — тензор Вейля (или тензор конформной кривизны).
Риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j)),$$

где X_i, Y_j — векторные поля на M.

Рассмотрим оператор Ходжа $* : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, задаваемый соотношением

$$\langle *\alpha, \beta \rangle \, \mathrm{vol} = \alpha \wedge \beta$$

для любых $\alpha, \beta \in \Lambda^2_x M, x \in M$, где vol — форма объема на M. Поскольку $*^2 = \mathrm{Id}$ в данной размерности, то

$$\Lambda^2_x M = \Lambda^+_x \oplus \Lambda^-_x \,, \tag{1}$$

где Λ^+_x и Λ^-_x – соответственно собственные пространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 оператора $*$.

Основные определения и обозначения

Риманову тензору кривизны в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор $\mathcal{R} : \Lambda_x^2 M \to \Lambda_x^2 M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V)\rangle_x = R(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V). \quad (2)$$

Матрицу оператора кривизны $\mathcal{R}$ относительно (1) можно представить в блочном виде [4]:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array} \right), \quad (3)$$

где W^+ и W^- — матрицы автодуальной и антиавтодуальной составляющих тензора Вейля W.

Определение

Риманово многообразие (M^4, g) называется *конформно полуплоским*, если автодуальная или антиавтодуальная составляющая его тензора Вейля тривиальна.

Римановну тензору кривизны в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор $\mathcal{R} : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V)\rangle_x = R(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V). \quad (2)$$

Матрицу оператора кривизны $\mathcal{R}$ относительно (1) можно представить в блочном виде [4]:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array}\right), \quad (3)$$

где W^+ и W^- — матрицы автодуальной и антиавтодуальной составляющих тензора Вейля W.

Определение

Риманово многообразие (M^4, g) называется конформно полуплоским, если автодуальная или антиавтодуальная составляющая его тензора Вейля тривиальна.

Основные определения и обозначения

Любой ортонормированный базис e_1, e_2, e_3, e_4 пространства T_xM определяет ортонормированный базис (см. [1])

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3) \quad (4)$$

пространства $\Lambda^{\pm}M$.
Матрицы W^+ и W^- являются симметричными, и их компоненты в базисе (4) находятся по формулам:

$$
\begin{aligned}
W_{11}^{+} &= \frac{1}{2}(R_{1212} + 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12},\\
W_{22}^{+} &= \frac{1}{2}(R_{1313} - 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12},\\
W_{33}^{+} &= \frac{1}{2}(R_{1414} + 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12},\\
W_{12}^{+} &= \frac{1}{2}(R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442}),\\
W_{13}^{+} &= \frac{1}{2}(R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423}),\\
W_{23}^{+} &= \frac{1}{2}(R_{1314} + R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

и соответственно

$$\begin{aligned}
W^-_{44} &= \frac{1}{2}(R_{1212} - 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12}, \\
W^-_{55} &= \frac{1}{2}(R_{1313} + 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12}, \\
W^-_{66} &= \frac{1}{2}(R_{1414} - 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12}, \\
W^-_{45} &= \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} - R_{3413} + R_{3442}), \\
W^-_{46} &= \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} - R_{3414} + R_{3423}), \\
W^-_{56} &= \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} - R_{4214} + R_{4223}).
\end{aligned} \tag{6}$$

Постановка задачи

- Известно, что при конформной деформации (см. [1])

$$\bar{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij} \qquad (7)$$

тензор Вейля инвариантен, т.е.

$$\bar{W} = e^{2\sigma(x)} W.$$

- Возникают естественные вопросы:
1. Как меняются автодуальная и антиавтодуальная компоненты тензора Вейля при конформной деформации?
2. При конформной деформации какого вида они инвариантны, т.е. $\bar{W}^{\pm} = e^{2\sigma} W^{\pm}$?

- Известно, что при конформной деформации (см. [1])

$$\bar{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij} \tag{7}$$

тензор Вейля инвариантен, т.е.

$$\bar{W} = e^{2\sigma(x)} W.$$

- Возникают естественные вопросы:
1. Как меняются автодуальная и антиавтодуальная компоненты тензора Вейля при конформной деформации?
2. При конформной деформации какого вида они инвариантны, т.е. $\bar{W}^{\pm} = e^{2\sigma} W^{\pm}$?

Основные результаты

Лемма

При конформной деформации $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}dx^i dx^j$ метрики ds^2 четырехмерного риманова многообразия M автодуальная и антиавтодуальная составляющие тензора Вейля преобразуются по формулам:

$$\overline{W}^+ = e^{2\sigma}W^+ + \left(\frac{s}{24}\mathrm{sh}2\sigma - (\Delta\sigma + |\mathrm{grad}\sigma|^2)\mathrm{ch}2\sigma\right)\mathrm{Id},$$
$$\overline{W}^- = e^{2\sigma}W^- - \left(\frac{s}{24}\mathrm{sh}2\sigma - (\Delta\sigma + |\mathrm{grad}\sigma|^2)\mathrm{ch}2\sigma\right)\mathrm{Id},$$

где Δ — оператор Лапласа, $|\mathrm{grad}\sigma|^2$ — квадрат длины градиента.

Идея доказательства

Доказательство леммы основано на аналитическом выводе с помощью формул:

$$\overline{R}_{lkij} = \overline{g}_{js}\overline{R}^{s}_{lki} = \overline{g}_{js}(R^{s}_{lki} + Q^{s}_{lki}) = e^{2\sigma(x)}(R_{lkij} + g_{lj}B_{ki} +$$
$$+ g_{ki}B_{lj} - g_{li}Bkj - g_{kj}B_{li}),$$

где $B_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i}\sigma_{,j} + \frac{1}{2}\sigma_{,k}\sigma^{k}g_{ij}$ и $\sigma_{,ij}, \sigma_{,i}$ – ковариантные производные функции σ относительно исходной метрики.

$$\overline{r}_{ki} = \overline{g}^{lj}\overline{R}_{lkij} = r_{ki} + g_{lj}g^{lj}B_{ki} + g_{ki}g^{lj}B_{lj} - \delta^{j}_{i}B_{kj} - \delta^{l}_{k}B_{li} =$$
$$r_{ki} + (n-2)B_{k}i + g_{ki}g^{lj}B_{lj},$$

$$\overline{s} = \overline{g}^{ki}\overline{r}_{ki} = e^{-2\sigma}g^{ki}(r_{ki} + (n-2)B_{ki} + g_{ki}g^{lj}B_{lj}) = e^{-2\sigma}(s+$$
$$+2(n-1)g^{ki}B_{ki}).$$

Основные результаты

Теорема (Пастухова С.В., Хромова О.П.)

При конформной деформации $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}dx^i dx^j$ метрики ds^2 четырехмерного риманова многообразия M нулевой скалярной кривизны при $s \equiv 0$ (анти)автодуальная компонента тензора Вейля инвариантна тогда и только тогда, когда функция σ, участвующая в определении деформации, имеет вид:

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = F_1(x_1) + F_2(x_2) + F_3(x_3) + F_4(x_4),$$

где F_1, F_2, F_3, F_4 — функции класса C^2, удовлетворяющие условиям:

Теорема

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx_1^2}F_1(x_1) = C_1 - \left(\frac{d}{dx_1}F_1(x_1)\right)^2;\\
&\frac{d^2}{dx_2^2}F_2(x_2) = C_2 - \left(\frac{d}{dx_2}F_2(x_2)\right)^2;\\
&\frac{d^2}{dx_3^2}F_3(x_3) = C_3 - \left(\frac{d}{dx_3}F_3(x_3)\right)^2;\\
&\frac{d^2}{dx_4^2}F_4(x_4) = -C_1 - \left(\frac{d}{dx_4}F_4(x_4)\right)^2 - C_2 - C_3,
\end{aligned} \tag{8}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Условие

$$\overline{W}^{\pm} = e^{2\sigma} W^{\pm}$$

согласно лемме равносильно тому, что

$$\frac{s}{12}(e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) = \frac{e^{2\sigma} + e^{-2\sigma}}{2}(\Delta\sigma + |\mathrm{grad}\sigma|^2).$$

Поскольку $\frac{e^{2\sigma}+e^{-2\sigma}}{2} = ch2\sigma$ и $\frac{e^{2\sigma}-e^{-2\sigma}}{2} = sh2\sigma$, то:

$$\frac{s}{6} sh2\sigma = ch2\sigma(\Delta\sigma + |\mathrm{grad}\sigma|^2),$$

$$\Delta\sigma + |\mathrm{grad}\sigma|^2 = \frac{s}{6}\mathrm{th}2\sigma. \qquad (9)$$

При $s \equiv 0$ равенство (9) примет вид:

$$\Delta\sigma + |\mathrm{grad}\sigma|^2 = 0.$$

Доказательство теоремы

Решая данное дифференциальное уравнение с помощью пакета символьных вычислений Maple, находим

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = F_1(x_1) + F_2(x_2) + F_3(x_3) + F_4(x_4),$$

где F_1, F_2, F_3, F_4 — произвольные функции и выполняются условия:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx_1^2} F_1(x_1) = C_1 - \left(\frac{d}{dx_1} F_1(x_1)\right)^2;\\
&\frac{d^2}{dx_2^2} F_2(x_2) = C_2 - \left(\frac{d}{dx_2} F_2(x_2)\right)^2;\\
&\frac{d^2}{dx_3^2} F_3(x_3) = C_3 - \left(\frac{d}{dx_3} F_3(x_3)\right)^2;\\
&\frac{d^2}{dx_4^2} F_4(x_4) = -C_1 - \left(\frac{d}{dx_4} F_4(x_4)\right)^2 - C_2 - C_3,
\end{aligned} \qquad (10)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Доказательство теоремы

Из (10) получаем, что:

$$
\begin{aligned}
F_1(x_1) &= -\sqrt{C_1 x_1} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}\frac{(c_1 e^{2\sqrt{C_1 x_1}} - c_2)^2}{C_1};\\
F_2(x_2) &= -\sqrt{C_2 x_2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}\frac{(c_1 e^{2\sqrt{C_2 x_2}} - c_2)^2}{C_2};\\
F_3(x_3) &= -\sqrt{C_3 x_3} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}\frac{(c_1 e^{2\sqrt{C_3 x_3}} - c_2)^2}{C_3};\\
F_4(x_4) &= -\frac{1}{2}\ln\frac{A}{c_1 \sin(\sqrt{A}x_4) - c_2\cos(\sqrt{A}x_4)})^2,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

C_1, C_2, C_3, c_1, c_2 — произвольные постоянные,
$A = C_1 + C_2 + C_3$ и при выполнении условий:

$$C_i \neq 0 \text{ и } c_2 \neq c_1 e^{2\sqrt{C_i x_i}}, i = 1, 2, 3;$$
$$c_1 \sin(\sqrt{C_1 + C_2 + C_3} x_4) - c_2 \cos(\sqrt{C_1 + C_2 + C_3} x_4) \neq 0;$$
$$C_1 + C_2 + C_3 > 0.$$

Решение (11) имеет место только при выполнении этих условий.
Если $C_1 + C_2 + C_3 < 0$, то функции комплекснозначные.
Теорема доказана.

Список литературы

- Бессе. А., Многообразия Эйнштейна.—М: Мир, 1990.—С. 318,С. 702..
- Рашевский. П.К., Риманова геометрия и тензорный анализ.— М: Наука,1967.— С.664.
- Родионов. Е.Д.,Славский. В.В., Конформные и одноранговые деформации римановых метрик с площадками нулевой кривизны на компактном многообразии // Труды конференции «Геометрия и приложения», г. Новосибирск, 13-16 марта 2000 г. С.171–182.
- Singer. I.M.,Thorpe. J.A., The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analisis, Papers in Honour of K.Kodarira,Univ.Tokyo Press.– 1969. – P. 355-365.
- Ким. Х.,Ким. Дж., Об одном эквивалентном условии плоской метрики // Сибирский математический журнал, т.44, N 5, 1046-1050 (2003).