Конформный тип и изопериметрическая функция риманова многообразия

Кесельман Владимир Михайлович

Московский государственный индустриальный университет

Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске – 2014»,
посвященная 85-летию академика Юрия Григорьевича Решетняка

Всюду в докладе $M^n = (M^n, g_0)$

— n-мерное ($n \geq 2$) риманово многообразие
— с краем ∂M^n (возможно, $\partial M^n = \emptyset$)
— *некомпактное* связное.

Конформный тип многообразия

Конденсатор на многообразии M^n — это пара (K, G)
K — компактное, G — открытое подмножества, $K \subset G$.

Конформной емкостью $\mathrm{cap}_n(K, G)$ *конденсатора* (K, G) называется величина

$$\mathrm{cap}_n(K, G) = \inf \int_G |\nabla f|^n \, dv$$

по всем $f \in C_0^1(G)$, таким что $f_{|K} \equiv 1$.

Конформная емкость компакта K (при $G = M^n$):

$$\mathrm{cap}_n K = \inf \int_{M^n} |\nabla f|^n \, dv$$

по всем $f \in C_0^1(M^n)$, таким что $f_{|K} \equiv 1$.

Величина $\mathrm{cap}_n K$ характеризует емкость компакта K относительно «абсолюта» многообразия M^n:

$$\mathrm{cap}_n K = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{cap}_n(K, G_t) \,,$$

где $\{G_t\}$, $t > 0$, — исчерпание многообразия M^n.

Хорошо известная альтернатива

Пусть $K \subset M^n$ — отличный от точки континуум (т.е. связное компактное множество). Тогда

1) либо $\forall K$: $\quad \mathrm{cap}_n K = 0$ (как в $\mathbb{R}^n$)

2) либо $\forall K$: $\quad \mathrm{cap}_n K > 0$ (как в $\mathbb{H}^n$)

Определение. Говорят, что многообразие M^n в случае 1) имеет *параболический конформный тип*

(краткое обозначение: $M^n \in \mathrm{PC}$)

в случае 2) имеет *гиперболический конформный тип*

(краткое обозначение: $M^n \in \mathrm{HC}$)

Таким образом, все некомпактные римановы n-мерные многообразия разбиваются на два класса:
— *многообразия параболического конформного типа* (к ним относится евклидово пространство $\mathbb{R}^n$)
— *многообразия гиперболического конформного типа* (в частности, пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$)

Инвариантность конформного типа относительно конформных замен метрики

Определение. Риманова метрика g на (M^n, g_0) *конформно эквивалентна* (*конформна*) метрике g_0, если

$$g = \lambda^2 g_0, \quad \lambda \in C^1(M^n).$$

$\mathrm{Conf}M^n$ — класс всех конформных g_0 метрик на M^n.

Конформный тип многообразия M^n инвариантен относительно метрик $g \in \mathrm{Conf}M^n$.

Изопериметрическая функция

$D \subset M^n$ — предкомпактная область,
∂D — относительная граница области D.

$V_g(D)$ — *объём* области D в метрике g,
$S_g(\partial D)$ — *площадь* границы ∂D в метрике g.

Изопериметрическое неравенство на (M^n, g):

$$\mathcal{P}(V_g(D)) \leq S_g(\partial D)$$

для любой предкомпактной области $D \subset M^n$.

Функция $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$, $0 < x < V_g(M^n)$, называется *изопериметрической функцией* M^n в метрике g.

Изопериметрическую функцию $\mathcal{P}$ многообразия (M^n, g) назовем ε-*асимптотически точной* $(\varepsilon > 0)$, если

$$S_g(\partial D) \leq (1 + \varepsilon)\, \mathcal{P}(V_g(D))$$

для всех областей $D \subset M^n$ некоторого исчерпания многообразия M^n. Указанное исчерпание также назовем

ε-асимптотически точным исчерпанием для изопериметрической функции $\mathcal{P}$ в метрике g.

Изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ многообразия (M^n, g) будет его наибольшей изопериметрической функцией,
если $\forall \varepsilon > 0$ она является ε-*асимптотически точной.*

Наибольшая изопериметрическая функция многообразия (M^n, g), называемая также его *профилем*, существует и имеет вид $\inf\limits_{V_g(D)=x} S_g(\partial D)$.

Классические изопериметрические неравенства

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ выполняется изопериметрическое неравенство вида

$$n v_n^{\frac{1}{n}} V(D)^{\frac{n-1}{n}} \le S(\partial D)\,,$$

где v_n — объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Иными словами:

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ имеет изопериметрическую функцию *евклидова вида*

$$\mathcal{P}(x) = c\, x^{\frac{n-1}{n}},\ x > 0.$$

При этом функция $\mathcal{P}$ является точной.

В пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$ выполняется изопериметрическое неравенство вида

$$(n-1)V(D) \le S(\partial D)\,.$$

Значит, пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$ имеет изопериметрическую функцию *линейного вида*

$$\mathcal{P}(x) = c\, x,\ x > 0.$$

При этом $\mathcal{P}$ является асимптотически точной.

Указанная для обеих изопериметрических функций точность реализуется на шаровых исчерпаниях в метриках соответствующих пространств.

Соотношение между емкостью и изопериметрической функцией

Изопериметрическая функция многообразия

— может иметь достаточно сложный вид

— или, наоборот, быть только тождественно нулевой.

Пример. Бесконечно длинная трубка, бесконечного объема, сужающаяся к нулю при уходе на ∞.

Изопериметрическая функция многообразия M^n не инвариантна относительно метрик класса $\operatorname{Conf} M^n$,

но её асимптотическое поведение на «бесконечности» (точнее, на областях, исчерпывающих многообразие) связано с конформным типом многообразия M^n.

Условие асимптотического поведения изопериметрической функции

Емкостное соотношение. Пусть $K \subset M^n$ компакт ненулевого объема. Тогда $\forall g \in \operatorname{Conf} M^n$

$$\operatorname{cap}_n K \geq \left(\int_{V_g(K)}^{V_g(M^n} \frac{dx}{\mathcal{P}(x)^{\frac{n}{n-1}}} \right)^{1-n},$$

где $\mathcal{P}$ — изопериметрическая функция (M^n, g).

Следствие. Если $M^n \in \mathrm{PC}$, то

$$\int^{V_g(M^n)} \frac{dx}{\mathcal{P}(x)^{\frac{n}{n-1}}} = +\infty.$$

Теорема о нормальном виде изопериметрической функции

Предположим: $V_g(M^n) = +\infty$ в метрике $g \in \operatorname{Conf} M^n$, изопериметрическая функция многообразия (M^n, g) имеет степенной вид $\mathcal{P}(x) = c\,x^p$ при $x \geq x_0 > 0$.
Тогда:

— если $M^n \in$ PC, то $p \leq \frac{n-1}{n}$ $\left(\text{в } \mathbb{R}^n : \mathcal{P}(x) = c\,x^{\frac{n-1}{n}}\right)$

— если $p > \frac{n-1}{n}$, то $M^n \in$ HC $\left(\text{в } \mathbb{H}^n : \mathcal{P}(x) = c\,x\right)$

В работах В.А.Зорича и автора была доказана

Теорема. *На произвольном многообразии M^n в соответствии с конформным типом многообразия найдется метрика $g \in \operatorname{Conf} M^n$, $V_g(M^n) = +\infty$, в которой изопериметрическая функция многообразия*

— в случае $M^n \in$ PC имеет евклидов вид

$$\mathcal{P}(x) = c \cdot x^{\frac{n-1}{n}},\ x > \delta$$

(как в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$),

— в случае $M^n \in$ HC имеет линейный вид

$$\mathcal{P}(x) = c \cdot x,\ x > 0$$

(как в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$).

При этом искомая изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ является ε-асимптотически точной.

Здесь $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ — наперед заданные значения.

Обращение теоремы о нормальном виде изопериметрической функции

1. Случай изопериметрической функции линейного вида $\mathcal{P}(x) = c \cdot x$

Если $\mathcal{P}$ — изопериметрическая функция многообразия M^n в метрике $g \in \mathrm{Conf} M^n$, то

$$\mathcal{P}(x) = c \cdot x \ \ (x > \delta) \quad \Longrightarrow \ M^n \in \mathrm{HC}$$

(*даже без требования ε-асимптотической точности.*)

Наличие в какой-либо метрике, конформной исходной метрике некомпактного многообразия, изопериметрической функции линейного вида является критерием того, что многообразие имеет гиперболический конформный тип.

2. Случай изопериметрической функции евклидова вида $\mathcal{P}(x) = c \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$

Изопериметрическое неравенство евклидова вида может выполняться на многообразии $M^n \in \mathrm{HC}$:

$$c\, V_g(D) \le S_g(\partial D) \Rightarrow c\, V_g(D)^{\frac{n-1}{n}} \le S_g(\partial D)$$

для всех областей D, $V_g(D) \ge 1$. Более того:

Построено многообразие $(M^n, g) \in \mathrm{HC}$, на котором изопериметрическая функция $\mathcal{P}(x)$ имеет евклидов вид $\mathcal{P}(x) = c \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$, $\delta < x < +\infty$, причем является ε-асимптотически точной.

Роль асимптотически точного исчерпания

Для многообразия $M^n \in$ НС бесконечного объема, на котором изопериметрическая функция евклидова вида является асимптотически точной, соответствующее асимптотически точное исчерпание многообразия обязательно заметно отличается от шарового исчерпания.

Утверждение. *Предположим, что на многообразии M^n бесконечного объема существует асимптотически точное исчерпание для изопериметрической функции евклидова вида. Тогда, если это исчерпание шаровое, то M^n имеет параболический конформный тип.*

С учетом анализа доказательства теоремы о нормальном виде изопериметрической функции удалось выявить следующий класс исчерпаний многообразий.

Исчерпания, близкие к шаровым

(В частности, шаровые исчерпания многообразия)

— реализуются на многообразии $M^n \in$ PC в некоторой полной метрике $g \in \mathrm{Conf}M^n$ бесконечного объема, как ε-асимптотически точные исчерпания для евклидова вида изопериметрической функции многообразия;

— на таких исчерпаниях многообразия $M^n \in$ НС ни в какой метрике $g \in \mathrm{Conf}M^n$ бесконечного объема не может быть реализована ε-асимптотическая точность изопериметрической функции евклидова вида.

Точное определение исчерпания, близкого к шаровому

Исчерпание $\{D(t)\}$ многообразия порождается *функцией исчерпания* h, если $\overline{D(t)} = \{h \le t\}$ для всех $t \ge t_0$.

Если (M^n, g) — полное (некомпактное) многообразие, то функция расстояния $r = r(p)$, $p \in M^n$, до $p_0 \in M^n$ порождает шаровое исчерпание многообразия (M^n, g) геодезическими шарами с центром в этой точке.

Известно, что r – липшицева функция, причем

$$|\nabla r|_g = 1 \text{ почти всюду в } M^n.$$

Определение. Исчерпание $\{D(t)\}$ многообразия M^n назовем ***близким к шаровому исчерпанию***, если оно порождается функцией $h \in \mathrm{Lip}(M^n)$, такой что:

$$1 - \varepsilon \le |\nabla h| \le 1 + \varepsilon \text{ п.в. на } M^n \setminus U\,,$$

где $\varepsilon \ge 0$, $U \subset M^n$ – открытое множество, $V_g(U) \le \varepsilon$;

$$\sup_{\partial D(t) \cap U} |\nabla h| \le \mu(t)$$

при почти всех $t \ge t_0 > 0$ (для некоторого $t_0 > 0$), где функция $\mu = \mu(t)$ не убывает при $t \ge t_0$ и

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{\mu(t)} = +\infty.$$

Критерий параболичности конформного типа

Предложение. *Предположим, что на многообразии M^n бесконечного объема существует асимптотически точное исчерпание многообразия для евклидова вида изопериметрической функции многообразия.*

Тогда если это исчерпание является близким к шаровому исчерпанию многообразия, то M^n имеет параболический конформный тип.

Критерий. *Многообразие $M^n \in \mathrm{PC} \iff$ существует полная метрика $g \in \mathrm{Conf}\, M^n$, в которой изопериметрическая функция $\mathcal{P}$ многообразия M^n имеет евклидов вид $\mathcal{P}(x) = c \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$, $\delta < x < +\infty$, и является ε-асимптотически точной на исчерпании, близком к шаровому исчерпанию многообразия.*

Здесь $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ — наперед заданные значения.

Построенные нами примеры (контрпримеры) HC-многообразий показывают, что

— без какого-либо дополнительного предположения о виде ε-асимптотически точного исчерпания критерий параболического конформного типа не справедлив,

— ***существенны все условия***, главным образом, оба предположения на функцию $\mu(t)$, из определения исчерпания, близкого к шаровому исчерпанию.

Примеры некомпактных многообразий гиперболического конформного типа с евклидовым изопериметрическим неравенством

Пример 1. В открытом круге $U \subset \mathbb{R}^2$ построена конформно-евклидова *полная* метрика g такая, что

$V_g(U) = +\infty$ и $\forall D \Subset U$ при $V_g(D) > \delta$ выполняется изопериметрическое неравенство евклидова вида. На многообразии (U, g) это изопериметрическое неравенство является ε-асимптотически точным.

При этом соответствующее ε-асимптотически точное исчерпание круга U удовлетворяет всем условиям определения исчерпания, близкого к шаровому исчерпанию, ***кроме условия роста на*** $\mu(t)$, а именно, эта функция в данном примере имеет вид $\mu(t) = c\,t \ln^2 t$, $t \geq t_0$.

Пример 2. Построено *полное* многообразие с краем (M^2, g) гиперболического конформного типа такое, что $V_g(M^2) = +\infty$ и $\forall D \subset M^2$ при $V_g(D) > \delta$ выполняется евклидово изопериметрическое неравенство. На (M^2, g) неравенство является ε-асимптотически точным.

При этом соответствующее ε-асимптотически точное исчерпание многообразия M^2 удовлетворяет всем условиям определения исчерпания, близкого к шаровому, ***кроме условия монотонности функции*** $\mu(t)$.

Литература

Зорич В.А., Кесельман В.М. Изопериметрическое неравенство на многообразиях конформно-гиперболического типа // Функциональный анализ и его приложения. 2001. Т. 35. N 2. С. 12-23.

Кесельман В.М. Изопериметрическое неравенство на конформно-гиперболических многообразиях // Математический сборник. 2003. Т. 194. N 4. С. 29-48.

Кесельман В.М. Изопериметрическое неравенство на конформно-параболических многообразиях // Математический сборник. 2009. Т. 200. N 1. С. 3-36.

Кесельман В.М. Об относительном изопериметрическом неравенстве на конформно-параболическом многообразии с краем // Математический сборник. 2011. Т. 202. N 7. С. 117-134.

Кесельман В.М. Конформная классификация некомпактных римановых многообразий и нормальная форма изопериметрического неравенства // Современные проблемы математики и механики. Математика. Изд-во МГУ, Москва. 2011. Т. VI. N 2. С. 217-224.

Кесельман В.М. Евклидово изопериметрическое неравенство в классе конформных метрик некомпактного риманова многообразия // Вестник Волгоградского государственного университета, серия 1. Математика. Физика. 2011. Т. 2. N 15. С. 33-42.