РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ — 2015»,

26 — 29 августа 2015 года

Новосибирск, 2015

УДК 514, 515.1, 517.518, 517.54, 517.938, 517.958

ББК 22.15

Д 548

ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ — 2015: Тезисы Международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2015. — 92 с.

ISBN 978-5-86134-167-7

Настоящее издание содержит тезисы докладов Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске — 2015» (г. Новосибирск, 26 — 29 августа 2015 г.). Основная тематика докладов относится к следующим актуальным направлениям современной математики: дифференциальной геометрии, геометрии и топологии трехмерных многообразий, анализу на многообразиях, квазиконформному анализу и функциональным пространствам, приложениям геометрии и топологии.

Сборник представляет интерес для научных работников и аспирантов, интересующихся современными проблемами геометрии, топологии и анализа.

Конференция и издание сборника поддержаны Лабораторией квантовой топологии Челябинского государственного университета и Российским фондом фундаментальных исследований.

Редакторы: И. А. Тайманов, А. Ю. Веснин

Ответственный редактор: Н. В. Абросимов

Верстка сборника: А. В. Маслей

GEOMETRY DAYS IN NOVOSIBIRSK – 2015: Abstracts of the International Conference. Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2015. — 92 p.

Editors I. A. Taimanov, A. Yu. Vesnin, N. V. Abrosimov, A. V. Masley

Д $\frac{1602050000 – 7}{Я82(03) – 2015}$

ISBN 978-5-86134-167-7

Содержание

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИМАРНЫХ УЗЛОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ

АЛЕНА АНДРЕЕВНА АКИМОВА

Утолщенным тором называется многообразие типа прямое произведение $T \times I$, где тор $T = S^1 \times S^1$ – прямое произведение двух экземпляров окружности S^1, а I – отрезок $[0, 1]$. Под *узлом* K понимается произвольная простая замкнутая кривая, лежащая в утолщенном торе: $K \subset T \times I$.

Узлы в утолщенном торе $T \times I$, как и классические узлы, могут быть представлены своими проекциями. Отличие в том, что узел проектируется не на плоскость, а на тор T, который принято изображать в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами. Под *проекцией* понимается регулярный граф $G \subset T$ валентности 4 такой, что прохождение графа G по правилу «прямо вперед» определяет обход, составленный из всех ребер графа G и отвечающий узлу. Две проекции G и G' называются *эквивалентными*, если пары (T, G) и (T', G') гомеоморфны.

Определение. *Проекция узла $G \subset T$ называется* составной*, если выполнено по крайней мере одно из следующих условий:*

(1) *Существует такой диск $D^2 \subset T$, что его край ∂D^2 пересекает ребра проекции G трансверсально в двух точках, и пересечение $G \cap D^2$ содержит вершины проекции G.*
(2) *Существуют такие две отдельные нетривиальные окружности на T, что каждая из них пересекает ребра проекции G трансверсально в одной точке, и оба кольца, на которые окружности разбивают тор T, содержат вершины проекции G.*

Будем говорить, что проекция $G \subset T$ *допускает дестабилизацию*, если дополнение к ней $T \backslash G$ содержит нетривиальную окружность.

Определение. *Проекция G называется* примарной*, если она не составная и не допускает дестабилизаций.*

Примарные узлы в утолщенном торе $T \times I$, имеющие диаграммы сложности $n \leq 5$, классифицированы в работе [1]. Ручное перечисление даже примарных проекций сложности более 5 уже затруднительно – их очень много. С другой стороны, некоторый задел в этом направлении необходим для дальнейших исследований. Мы классифицируем примарные *октаэдральные проекции* узлов в $T \times I$, т. е. примарные проекции, являющиеся вложением одномерного остова октаэдра в тор T, см. Рис.2. справа внизу.

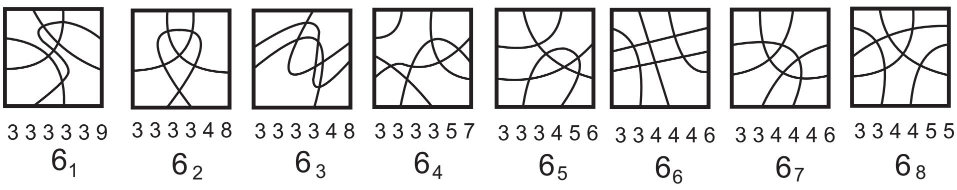

Рис. 1. Примарные октаэдральные проекции на торе T.

Теорема. *Существуют ровно 8 различных примарных октаэдральных проекций на T.*

Определение. *Узел $K \subset T \times I$ называется* составным*, если выполнено по крайней мере одно из следующих условий:*

(1) *K является нетривиальной связной суммой $K_1 \subset T \times I$ и $K_2 \subset S^3$.*
(2) *K является нетривиальной круговой связной суммой двух узлов в $T \times I$.*

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

Определение. *Узел $K \subset T \times I$ называется* примарным, *если он не составной и дополнение к нему $T \times I \backslash K$ не содержит кольца $\mu \times I \subset T \times I$, где $\mu \subset T$ – некоторая нетривиальная окружность на торе T.*

Два узла в утолщенном торе эквивалентны, если пары $(T \times I, K)$ и $(T' \times I', K')$ гомеоморфны.

Аналогично классическому случаю, узлы в утолщенном торе $T \times I$ задаются своими *диаграммами*, т. е. проекциями на тор T с указанием типа каждого перекрестка.

Каждая проекция преобразуется в набор соответствующих диаграмм путем указания типа каждого перекрестка. Конечно, составленный список диаграмм ещё содержит большое количество дубликатов. Чтобы выявить их, вычисляется обобщенный полином Кауффмана каждой диаграммы, см. [1].

Прямые вычисления, проверенные программой «Manifold Recognizer» [2], показывают, что все обобщенные полиномы Кауффмана диаграмм узлов, изображенных на Рис. 2, различны и не совпадают со значениями инварианта диаграмм сложности $n \leq 5$ [1]. Поэтому соответствующие узлы в утолщенном торе $T \times I$ также различны.

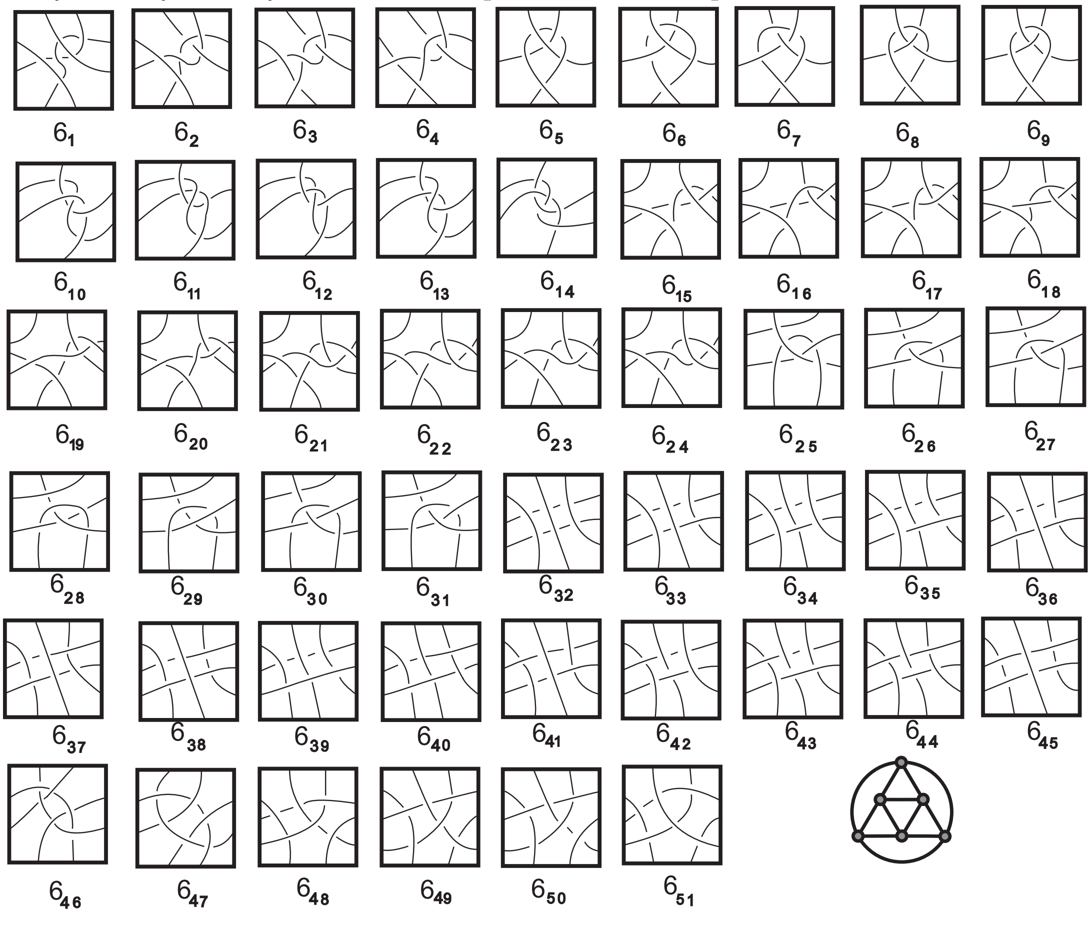

Рис. 2. Октаэдральные диаграммы примарных узлов в $T \times I$

Теорема. *Существует ровно 51 различный примарный узел в утолщенном торе $T \times I$, имеющий минимальные октаэдральные диаграммы. Эти диаграммы изображены на Рис. 2.*

Список литературы

[1] A.A. Akimova, S.V. Matveev, “Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings”, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, Vol. 23, No. 6, 1450031-1 – 1450031-19 (2014).

[2] V.V. Tarkaev, “Manifold Recognizer”, http://www.matlas.math.csu.ru/?page=recognizer.

ЮУрГУ, проспект Ленина, 76, г. Челябинск, 454080, Россия, НИЛ Квантовой топологии ЧелГУ, ул.Братьев Кашириных, 129, г. Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: akimova_susu@mail.ru

ОБ УПЛОЩАЮЩИХСЯ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ ОКТАВ

ГАЛИНА АНАТОЛЬЕВНА БАНАРУ, МИХАИЛ БОРИСОВИЧ БАНАРУ

Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ – алгебра Кэли. Как известно [1], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,\ Y,\ Z\,) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X,\ Y\rangle\, Z + \langle Y,\ Z\rangle\, X - \langle Z, X\rangle\, Y;$$
$$P_2(X,\ Y,\ Z\,) = -(X\bar{Y})Z + \langle X,\ Y\rangle\, Z + \langle Y,\ Z\rangle\, X - \langle Z, X\rangle\, Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \bar{X}$ – оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных. Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ – 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением: $J_\alpha(X) = P_\alpha(X,\, e_1,\, e_2)$, $\alpha = 1,\ 2$, где $\{e_1,\, e_2\}$ – произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [1]. Подмногообразие M^6 называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема. Напомним [1], что точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 – единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [1]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа. 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется уплощающимся, если оно содержится в гиперплоскости алгебры октав [2],[3].

В докладе предполагается представить основные результаты, полученные авторами в геометрии уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли за последние 15 лет. Наряду с уже опубликованными (например, в [2]–[4] и др.) результатами, будут представлены и несколько совсем новых, из которых следует, что уплощающиеся 6-мерные эрмитовы подмногообразий алгебры октав по очень многим свойствам весьма близки к келеровым $M^6 \subset \mathbf{O}$.

Список литературы

[1] В.Ф. Кириченко, “Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли”, *Известия вузов. Математика*, No. 8, 32–38 (1980).

[2] M. Banaru, G. Banaru, “About six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra”, *Bul. Stin. Univ. Politehnica Timisoara*, T. 46(60), No 1, 13–17 (2001).

[3] М.Б. Банару, Г.А, Банару, “О спектрах некоторых тензоров уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения». Москва. МГУ*, Ч .2, 250–253 (2001).

[4] M. Banaru, G. Banaru, “A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra”, *Известия Академии наук Республики Молдова. Математика*, No. 1(74), 23–32 (2014).

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск – 214 000, Россия

E-mail address: `mihail.banaru@yahoo.com`

О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ 2-ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ В 6-МЕРНЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

МИХАИЛ БОРИСОВИЧ БАНАРУ

1. Шестимерные подмногообразия алгебры октав дают исследователю весьма содержательные и разнообразные примеры почти эрмитовых структур. Такие структуры изучались систематически с 60-х годов прошлого века известнейшим американским геометром А. Греем, затем отечественным специалистом В.Ф. Кириченко и многими другими авторами. Например, в [1] получена полная классификация 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли, являющихся предметом исследования данной работы. Эта тематика ни в коей мере не утратила своего значения и сейчас. Большое количество современных геометров из США, Китая, Японии, Бельгии, Южной Кореи, Польши, Румынии и других стран каждый год публикует статьи в хороших журналах с результатами, полученными в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав. Отметим, что новый обзор [2] об эрмитовой геометрии 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли содержит множество самых разнообразных результатов.

2. Как известно [3], почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$, где J – почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ – риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX,\ JY\rangle = \langle X,\ Y\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ – модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. С каждой AH-структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$ на многообразии связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (то есть 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитово многообразие называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема, и келеровым, если $\nabla F = 0$ [3].

Напомним [3], [4], что на всякой ориентируемой гиперповерхности N почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура, то есть система тензорных полей $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi) = 1;\ \Phi(\xi) = 0;\ \eta\circ\Phi = 0;\ \Phi^2 = id + \xi\otimes\eta;$$

$$\langle\Phi X,\ \Phi Y\rangle = \langle X,\ Y\rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in \aleph(N).$$

(Здесь Φ – поле тензора типа (1, 1), ξ – векторное поле, η – ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ – риманова метрика, $\aleph(N)$ – модуль гладких векторных полей на гиперповерхности N.)

Примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура, которую можно охарактеризовать тождеством

$$\nabla\eta = \nabla\Phi = 0,$$

где ∇ – риманова связность метрики $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ [3]. Также напомним, что типовым числом гиперповерхности риманова многообразия называют ранг ее второй квадратичной формы [5].

3. В работе [6] доказано, что типовое число всякой косимплектической гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли не превосходит единицы. В статье

[7] этот результат был улучшен: показано, что условие быть не больше одного для типового числа гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры октав является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы на этой гиперповерхности индуцировалась косимплектическая структура. Затем этот факт был обобщен для гиперповерхностей произвольных келеровых многообразий [8].

4. Практически ничего не известно о виде почти контактной метрической структуры, индуцируемой на гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли, в том случае, когда типовое число этой гиперповерхности больше единицы. В докладе предполагается привести ряд результатов, полученных автором в исследовании почти контактных метрических гиперповерхностей с типовым числом, равным двум. В частности, получены структурные уравнения Картана для почти контактной метрической структуры, индуцируемой на такой гиперповерхности 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли. Показано, что такая почти контактная метрическая структура не может быть структурой Кенмоцу.

Список литературы

[1] В.Ф. Кириченко, "Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли", *Известия вузов. Математика*, No. 8, 32–38 (1980).

[2] М.Б. Банару, "Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав", *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры*, Т. 126, 10–61 (2014).

[3] В.Ф. Кириченко, "Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях". *Одесса: Печатный дом*, (2013).

[4] Л.В. Степанова, "Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий", *Научные труды МПГУ им. В.И. Ленина*, 187–191 (1995).

[5] H. Kurihara, "The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form", *Tsukuba J. Math.*, V .24, 127–132 (2000).

[6] М.Б. Банару, "О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли", *Известия вузов. Математика*, No. 7, 59–63 (2003).

[7] М.Б. Банару, "О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли", *Известия высших учебных заведений. Математика*, No. 10, 13–18 (2014).

[8] M. Banaru, "Special Hermitian manifolds and the 1-cosymplectic hypersurfaces axiom", *Bulletin of the Australian Mathematical Society.* V. 90, No 3, 504–509 (2014).

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск – 214 000, Россия

E-mail address: mihail.banaru@yahoo.com

О СУБРИМАНОВОМ РАССТОЯНИИ В ГРУППАХ ЛИ $SU(2)$ И $SO(3)$

ВАЛЕРИЙ НИКОЛАЕВИЧ БЕРЕСТОВСКИЙ, ИРИНА АЛЕКСАНДРОВНА ЗУБАРЕВА

Напомним, что $SU(2)$ есть компактная односвязная группа Ли всех унитарных унимодулярных 2×2–матриц

$$SU(2) = \left\{ (A,B) := \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \ \mid \ A,\, B \in \mathbb{C},\ \mid A \mid^2 + \mid B \mid^2 = 1 \right\}.$$

Заметим, что любые две левоинвариантные субримановы метрики на $SU(2)$, правоинвариантные относительно подгруппы Ли $SO(2)$, изометричны с точностью до подобия. Для одной из этих метрик (обозначим ее через ρ) справедлива следующая теорема (см. [1]), в которой предложены серьезные поправки к результатам статьи [2].

Теорема 1. *Пусть $g = (A,B) \in SU(2)$, $e = (1,0)$ — единица группы $SU(2)$, $t = \rho(g,e)$. Тогда*

1. Если $A = 0$, то $t = \pi$.

2. Если $\mid A \mid = 1$, то $t = 2\sqrt{\mid \arg(A) \mid (2\pi - \mid \arg(A) \mid)}$, где $\arg(A) \in [-\pi, \pi]$.

3. Если $0 < \mid A \mid < 1$ и $\mathrm{Re}(A) = \mid A \mid \sin\left(\frac{\pi}{2} \mid A \mid\right)$, то $t = \pi\sqrt{1 - \mid A \mid^2}$.

4. Если $0 < \mid A \mid < 1$ и $\mathrm{Re}(A) > \mid A \mid \sin\left(\frac{\pi}{2} \mid A \mid\right)$, то

$$t = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{(1 - \mid A \mid^2)(1+\beta^2)}\right) \in \left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}, \frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}\right),$$

где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\arcsin\sqrt{(1-\mid A \mid^2)(1+\beta^2)} + \arcsin\frac{\beta\sqrt{1-|A|^2}}{|A|}\right) = \frac{\mathrm{Re}(A)}{|A|}, \\ \sin\left(-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\arcsin\sqrt{(1-\mid A \mid^2)(1+\beta^2)} + \arcsin\frac{\beta\sqrt{1-|A|^2}}{|A|}\right) = \frac{\mathrm{Im}(A)}{|A|}. \end{cases}$$

5. Если $0 < \mid A \mid < 1$ и $\mathrm{Re}(A) < \mid A \mid \sin\left(\frac{\pi}{2} \mid A \mid\right)$, то

$$t = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{(1 - \mid A \mid^2)(1+\beta^2)}\right) \in \left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}, \frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}\right),$$

где β — единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{(1-\mid A \mid^2)(1+\beta^2)}\right) + \arcsin\frac{\beta\sqrt{1-|A|^2}}{|A|}\right) = -\frac{\mathrm{Re}(A)}{|A|}, \\ \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{(1-\mid A \mid^2)(1+\beta^2)}\right) + \arcsin\frac{\beta\sqrt{1-|A|^2}}{|A|}\right) = \frac{\mathrm{Im}(A)}{|A|}. \end{cases}$$

Напомним, что $SO(3)$ — компактная группа Ли, состоящая из всех ортогональных вещественных 3×3–матриц с определителем 1. Заметим, что любые две левоинвариантные субримановы метрики на $SO(3)$, правоинвариантные относительно подгруппы Ли $SO(2)$, изометричны с точностью до подобия. Для одной из этих метрик (обозначим ее через d) справедлива следующая теорема (см. [1]).

Теорема 2. *Пусть $C = (c_{ij}) \in SO(3)$, e — единица группы $SO(3)$, $t = d(C,e)$. Тогда*

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (Договор №14.B25.31.0029), гранта РФФИ 14-01-00068-а, и государственной программой поддежки ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ-2263.2014.10).

1. Если $c_{11} = -1$, *то* $d(C, e) = \pi$.

2. Если $c_{11} = 1$ *и* $C \neq e$, *то* $t = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}$, *где* β *— единственное решение системы уравнений*

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{1+c_{11}+c_{22}+c_{33}}, \\ \sin\frac{\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(c_{32}-c_{23})\sqrt{1+c_{11}-c_{22}-c_{33}}. \end{cases}$$

3. Если $-1 < c_{11} < 1$ *и* $\cos\left(\pi\sqrt{\frac{1+c_{11}}{2}}\right) = -\frac{c_{22}+c_{33}}{1+c_{11}}$, *то* $t = \pi\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})}$.

4. Если $-1 < c_{11} < 1$ *и* $\cos\left(\pi\sqrt{\frac{1+c_{11}}{2}}\right) > -\frac{c_{22}+c_{33}}{1+c_{11}}$, *то*

$$t = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)},$$

где β *— единственное решение системы уравнений*

$$\begin{cases} \cos\left(-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)} + \arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-c_{11}}{1+c_{11}}}\right)\right) = \sqrt{\frac{1+c_{11}+c_{22}+c_{33}}{2(1+c_{11})}}, \\ \sin\left(-\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)} + \arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-c_{11}}{1+c_{11}}}\right)\right) \\ \qquad = \mathrm{sgn}(c_{32}-c_{23})\sqrt{\frac{1+c_{11}-c_{22}-c_{33}}{2(1+c_{11})}}. \end{cases}$$

5. Если $-1 < c_{11} < 1$ *и* $\cos\left(\pi\sqrt{\frac{1+c_{11}}{2}}\right) < -\frac{c_{22}+c_{33}}{1+c_{11}}$, *то*

$$t = \frac{2}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)}\right),$$

где β *— единственное решение системы уравнений*

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)}\right) + \arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-c_{11}}{1+c_{11}}}\right)\right) = -\sqrt{\frac{1+c_{11}+c_{22}+c_{33}}{2(1+c_{11})}}, \\ \sin\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1-c_{11})(1+\beta^2)}\right) + \arcsin\left(\beta\sqrt{\frac{1-c_{11}}{1+c_{11}}}\right)\right) \\ \qquad = \mathrm{sgn}(c_{32}-c_{23})\sqrt{\frac{1+c_{11}-c_{22}-c_{33}}{2(1+c_{11})}}. \end{cases}$$

Список литературы

[1] V. Berestovskii, I. Zubareva, "Sub-Riemannian distance on Lie groups $SU(2)$ and $SO(3)$", preprint arXiv: 1411.4718, [math.DG] 19 Nov 2014, 15 p.

[2] U. Boscain, F. Rossi, "Invariant Carnot-Carathéodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$, and lens spaces", *SIAM J. Control Optim.*, 2008. Vol. 47, No 4, 1851–1878 (2008).

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: vberestov@inbox.ru

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН (Омский филиал), Певцова, 13, Омск, 644099, Россия

E-mail address: i_gribanova@mail.ru

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ СТРУКТУР НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

АЛИЯ ВЛАДИМИРОВНА БУКУШЕВА

Пусть (D, π, X) — векторное расслоение, где D — гладкое распределение контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$. Рассмотрим распределение D как многообразие, в основу развития геометрии которого могут быть положены используемые в геометрии касательных расслоение методы и конструкции. Началу исследования геометрии многообразия D, наделенного естественным образом дополнительными структурами, положено в работе [1]. В отличии от многообразия TX, многообразие D имеет нечетную размерность. Таким образом, многообразие D, например, не может быть наделено симплектической формой, зато оно естественным образом несет на себе (продолженную) почти контактную метрическую структуру.

Пусть $P : TX \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^{\perp}$, и $K(x^{\alpha})$ — адаптированная карта [1]. Внутренняя линейная связность определяется заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения (D, π, X). Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем [1] на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^{\alpha})$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^{\alpha}, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G_b^a(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$. В случае, когда $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a) x^{n+c}$ над распределением определяется внутренней линейной связностью. Продолженная связность определяется разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. Как следует из определения продолженной связности, для ее задания (при условии уже существующей связности над распределением) достаточно задать векторное поле $\vec{u}$ на многообразии D, имеющее следующее координатное представление $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$, где эндоморфизм $N : D \to D$ может быть выбран произвольно. В настоящей работе мы полагаем $N = 0$. Соответствующую продолженную связность обозначим ∇^1.

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a})$ определяют на D поле неголономных базисов, а формы $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+b} dx^c)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ab}\, \partial_n + R_{abc}^e x^{n+c}\, \partial_{n+e}, \tag{1}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \partial_n] = x^{n+c} P_{ac}^b \partial_{n+b}, \tag{2}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}. \tag{3}$$

В работе [2] допустимое тензорное поле, определяемое равенством $R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = \nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{v}} \vec{w} - \nabla_{\vec{v}} \nabla_{\vec{u}} \vec{w} - \nabla_{p[\vec{u}, \vec{v}]} \vec{w} - p[q[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}]$, названо Вагнером первым тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R_{bcd}^a = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a||e||}^d \Gamma_{b]c}^e$. В случае, когда распределение D не содержит интегрируемое распределение размерности $n-2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [2]. Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения

D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны.

На тотальном пространстве D векторного расслоения (D, π, X) определим допустимую (к распределению $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$) почти симплектическую структуру Ω, полагая по определению $\Omega = g_{ab}\Theta^{n+a} \wedge dx^b$. Непосредственные вычисления показывают, что внешний дифференциал формы Ω является допустимой формой тогда и только тогда, когда исходная контактная метрическая структура является K-контактной. Пусть $\vec{u}$ — произвольное допустимое векторное поле, заданное на многообразии X. Поставим ему в соответствие векторное поле $\vec{u}^c$ полагая по определению $\vec{u}^c = u^a\vec{\varepsilon}_a + x^{n+a}\nabla_a u^b \partial_{n+b}$. Имеет место

Теорема. *Векторное поле $\vec{u}^c$ является инфинитезимальным автоморфизмом формы $\Omega = g_{ab}\Theta^{n+a} \wedge dx^b$ тогда и только тогда, когда D является распределением нулевой кривизны, а поле $\vec{u}$ — инфинитезимальная изометрия.*

Доказательство теоремы основано на использовании равенств (1)-(3) и координатного представления тензора Схоутена.

Список литературы

[1] А.В. Букушева, С.В. Галаев, "Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, Том. 12, No. 3, 17–22 (2012).

[2] В.В. Вагнер, "Геометрия $(n-1)$–мерного неголономного многообразия в n–мерном пространстве", *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, No. 5, 173–255 (1941).

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: bukusheva@list.ru

УСЛОВИЕ ОТКРЫТОГО МНОЖЕСТВА ДЛЯ САМОПОДОБНЫХ ДЕНДРИТОВ НА ПЛОСКОСТИ И ОДНОСТОРОННИЕ ДУГИ

ДМИТРИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ВАУЛИН

Пусть $S = \{s_1, ..., s_m\}$ – система сжимающих подобий в R^n. Непустое компактное множество K называется инвариантным множеством системы S, если $K = \bigcup s_i(K)$.

Говорят, что система S удовлетворяет условию открытого множества OSC, если существует такое открытое множество O, что $s_i(O) \subset O$ для любого i и $s_i(O) \cap s_j(O) = \emptyset$ [1]. Это условие обеспечивает совпадение Хаусдорфовой размерности с размерностью подобия.

В дальнейшем ему на смену пришло более общее условие – слабое условие отделимости WSP [2, 4].

Нами была доказана следующая теорема для самоподобных дендритов на плоскости:

Теорема. *Пусть S – система сжимающих подобий на плоскости, аттрактор K которого является дендритом. Тогда S удовлетворяет условию WSP.*

Из односвязности множества K вытекает

Следствие 1. *Пусть $K(S)$ – самоподобный дендрит на плоскости. Тогда для любых i,j $s_i(K) \cap s_j(K)$ является либо одноточечным множеством, либо дендритом.*

В случае, когда попарное пересечение никаких двух копий дендрита K не содержит меньших подкопий, система S удовлетворяет условию открытого множества. В этом случае имеет место

Следствие 2. *Пусть $K(S)$ – самоподобный дендрит на плоскости, удовлетворющий условию открытого множества. Тогда для любых i,j $s_i(K) \cap s_j(K)$ является либо одноточечным множеством, либо дугой.*

Пусть $\gamma' = K_i \cap K_j$ – такая поддуга, а $\gamma = S_i^{-1}(\gamma')$. Тогда для любой внутренней точки $x \in \gamma$ ее малая окрестность разбивается дугой γ на две части, одна из которых не пересекает K.

Такие дуги назовем *односторонними.* Вопрос об условиях, при которых самоподобный дендрит содержит или не содержит односторонние поддуги, пока остается открытым.

Список литературы

[1] J. Hutchinson, "Fractals and self-similarity", *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 30, No. 5, 713–747 (1981).

[2] Ch. Bandt, S. Graf, "Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure", *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 114, No. 4, 995–1001 (1992).

[3] C. Bandt, H. Rao, "Topology and separation of self-similar fractals in the plane", *Nonlinearity 20*, 1463–1474 (2007), MR 2327133.

[4] M. P. W. Zerner, "Weak separation properties for self-similar sets", *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 124, No. 11, 3529–3539 (1996).

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, д. 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия

E-mail address: d_warrant@mail.ru

ДОПУСТИМЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

СЕРГЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ГАЛАЕВ

Гиперкомплексная структура на гладком многообразии X — это тройка интегрируемых почти-комплексных структур I, J, K, удовлетворяющих соотношению $IJ = -JI = K$. При этом X называется гиперкомплексным многообразием. Одним из первых гиперкомплексные структуры рассматривал Обата (см. [1-4]).

Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности n, $\Gamma TX - C^\infty(X)$ модуль гладких векторных полей на X. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Почти контактной гиперкомплексной метрической структурой на X будем называть совокупность $(\varphi_i, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X, где φ_i $(i = 1, 2, 3)$ — тензоры типа (1,1), называемые структурными эндоморфизмами, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом

$\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\varphi_i(\vec{\xi}) = 0$, $\eta \circ \varphi_i = 0$, $\varphi_i^2 \vec{x} = \vec{x} + \eta(\vec{x})\vec{\xi}$, $g(\varphi_i \vec{x}, \varphi_i \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, $d\eta(\vec{\xi}, \vec{x}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma TX$.

Мы требуем, также, чтобы тензоры φ_i принадлежали к классу допустимых интегрируемых структур [5].

Введем на распределении $D = \ker \eta$ структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте [5] $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G_b^a(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$. В случае, когда $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a) x^{n+c}$ над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N : D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, X), определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$. Будем использовать следующее обозначение для N-продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$. В двух частных случаях, когда $N = 0$ и $N = id_D$, будем писать, соответственно, $\nabla^1 = (\nabla, 0)$ и $\nabla^{\vec{v}} = (\nabla, \vec{v})$, где $\vec{v}$ — поле Лиувилля: $\vec{v} = x^{n+a} \partial_{n+a}$.

Далее ограничимся случаем связности $\nabla^1 = (\nabla, 0)$. Определим на распределении D как на гладком многообразии почти контактную метрическую структуру [6] $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$, полагая $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b)$, $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{u}, \partial_{n+b}) = 0$, $J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a$, $J(\vec{u}) = \vec{0}$. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$ определяются здесь продолженной связностью. Полученную структуру будем называть продолженной почти контактной метрической структурой. В работе [7] допустимое тензорное поле, определяемое равенством $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{Z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}]\vec{z}]$, где $Q = 1 - P$, названо Вагнером первым тензором кривизны Схоутена. Помимо эндоморфизма J введем на многообразии D еще два эндоморфизма J_1, J_2, полагая, что $J_1 \vec{x}^h = -(\varphi \vec{x})^h$, $J_1 \vec{x}^v = (\varphi \vec{x})^v$, $J_2 = J_1 J$.

Теорема. *Структура $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти контактной гиперкомплексной метрической структурой тогда и только тогда, когда тензор Схоутена обращается в нуль и структура φ почти нормальна.*

Список литературы

[1] M. Obata, "Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure", *Jap. J. Math.*, Vol. 26, 43–77 (1956).

[2] M. Obata, "Affine transformations in an almost complex manifold with a natural affine connection", *J. Math. Soc. Japan.*, Vol. 8, 345–362 (1956).

[3] M. Obata, "Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure", *J. Math. Soc. Japan.*, Vol. 9, 406–416 (1957).

[4] M. Obata, "Hermitian manifolds with quaternion structure", *Tohoku Math. J.*, Vol. 10, 11–18 (1958).

[5] С.В. Галаев, "Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, Том. 12, No. 1, 16–22 (2012).

[6] А.В. Букушева, С.В. Галаев, "Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, Том. 12, No. 3, 17–22 (2012).

[7] В.В. Вагнер, "Геометрия $(n-1)$–мерного неголономного многообразия в n–мерном пространстве", *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, No. 5, 173–255 (1941).

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: sgalaev@mail.ru

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ В (q_1, q_2)-КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

АЛЕКСАНДР ВАЛЕРЬЕВИЧ ГРЕШНОВ

Пусть заданы положительные числа q_1, q_2 и множество X. Функция неотрицательная функция ρ_X, определенная на декартовом произведении $X \times X$, удовлетворяющая аксиоме тождества, т. е. $\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\ \forall x, y \in X$, называется (q_1, q_2)*–квазиметрикой* [1], если выполняется (q_1, q_2)-*обобщенное неравенство треугольника*, т. е.

$$\rho_X(x, z) \leq q_1\rho_X(x, y) + q_2\rho_X(y, z) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Несложно получить, что всегда $q_1, q_2 \geq 1$. Пара (X, ρ_X) называется (q_1, q_2)-*квазиметрическим пространством.* Понятно, что любая (q_1, q_2)-квазиметрика является и $(q_1'q_1, q_2'q_2)$-квазиметрикой для любых $q_1', q_2' \geq 1$. Если (q_1, q_2)-квазиметрика ρ_X удовлетворяет для заданного $q_0 > 0$ дополнительному условию $\rho_X(x, y) \leq q_0\rho_X(y, x)\ \forall x, y \in X$, то будем называть пару (X, ρ_X) q_0-*симметрическим* (q_1, q_2)*–квазиметрическим пространством.* Если $q_0 = 1$, то пару (X, ρ_X) будем называть *симметрическим* (q_1, q_2)-*квазиметрическим пространством.* Если $q_0 = q_1 = q_2 = 1$, то (X, ρ_X) — обычное метрическое пространство.

Симметрические (q_1, q_1)-квазиметрические пространства (т. е. при $q_1 = q_2$) изучались, например, в [2, 3], а q_0-симметрические (q_1, q_1)-квазиметрические пространства при дополнительном предположении полунепрерывности сверху функции ρ_X по второму аргументу — в [4]. Интерес к (q_1, q_2)-квазиметрическим пространствам вызван, в частности, интенсивным развитием анализа и геометрии на эквирегулярных квазипространствах Карно — Каратеодори и их обобщениях, см., например, [5–8]. Приведем необходимые сведения.

Векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$, определенные на некотором связном гладком римановом многообразии M, $n \leq \dim M$, удовлетворяют *условию Хёрмандера*, если их значения вместе со значениями всех их коммутаторов до некоторого порядка r порождают в каждой точке $x \in M$ все касательное пространство T_xM, см. [5–8]. Рассмотрим распределение Δ, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ n-мерное векторное подпространство касательного пространства T_xM к M в точке $x \in M$, натянутое на значения векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ в точке x. Абсолютно непрерывная параметризованная кривая $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t)$ касается Δ для почти всех t. Из классического результата Рашевского — Чоу вытекает, что любые две точки многообразия M можно соединить кусочно непрерывно дифференцируемым горизонтальным путем конечной длины. *Расстояние Карно — Каратеодори* $d_{cc}(u, v)$ между точками $u, v \in M$ определяется как $d_{cc}(u, v) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma \in C_{u,v}\}$, где $C_{u,v}$ — множество всех абсолютно непрерывных горизонтальных параметризованных кривых $\gamma \subset M$, соединяющих u, v. Здесь длина $l(\gamma)$ параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \to M$ вычисляется по формуле $l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{g_M(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt$, где $g_M(\cdot, \cdot)$ — форма стандартного риманова скалярного произведения многообразия M. Пусть векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$, $n < \dim M = N$, удовлетворяющие условию Хёрмандера, таковы, что размерность h_i векторного подпространства $H_i(x) \subset T_xM$, $x \in M$, натянутое на значения всех коммутаторов векторных полей $X_1, \dots, X_n$ до порядка $i - 1$, $i = 1, \dots, r + 1$, включительно (под коммутаторами нулевого порядка подразумеваются векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$), не зависит от выбора x для каждого i, см. [5]. В этом случае будем говорить, что многообразие M обладает *эквирегулярной поляризацией* H_1 с базисом векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$, а пару (M, d_{cc}) будем

Работа частично поддержана грантом РФФИ-14-01-0076.

называть *эквирегулярным пространством Карно — Каратеодори*, ср. с [5]. Определим векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ так, что $X_1(x), \dots, X_{h_i}(x)$ образуют базис векторного пространства $H_i(x)$, $h_1 = n$, для всех $x \in M$. Можно проверить, что векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ удовлетворяют следующей таблице коммутаторов $[X_i, X_j] = \sum\limits_{\deg X_k \le \deg X_i + \deg X_j} C_{ij}^k X_k$, где $\deg X_i = \min\{j \mid X_i \subset H_j\}$. Введем в рассмотрение следующую анизотропную метрическую функцию $\rho_{cc}(g, u) = \max\limits_{i=1,\dots,N} \big\{|a_i|^{1/\deg X_i} \mid u = \exp(X_a)(g)\big\}$, где $X_a = \sum\limits_{i=1}^N a_i X_i$, $a = (a_1, \dots, a_N)$ — достаточно малый по длине вектор, $\exp(X_a)(g) = x(1)$, где $x(s)$ — решение следующей задачи Коши $\dot{x}(s) = X_a(x(s))$, $s \in [0,1]$, $x(0) = g$. Из определения вытекает, что функция ρ_{cc} удовлетворяет аксиомам тождества и симметричности. Кроме того, имеет место следующий факт, вытекающий из известной теоремы Ball-Box [7]: *для каждой точки $u \in M$ найдутся ее окрестность $O_u \subset M$ и константа $c_u > 0$ такие, что* $\frac{\rho_{cc}(v,w)}{c_u} \le d_{cc}(v, w) \le c_u \rho_{cc}(v, w) \forall v, w \in O_u$. Откуда вытекает, что функция ρ_{cc} удовлетворяет (c_u^2, c_u^2)-обобщенному неравенству треугольника, и значит является симметрической (c_u^2, c_u^2)-квазиметрикой.

Теорема 1 [1, 6, 8]. *Функция ρ_{cc} является симметрической $(1, q_2)$-квазиметрикой для некоторой константы q_2.*

Теорема 2. *Для любых q_1, $q_2 \ge 1$ на $[0,1]$ существует (q_1, q_2)-квазиметрика ρ_X такая, что для ρ_X не может быть выполнено (q_1', q_2')-обобщенное неравенство треугольника, где* 1^0 $q_1' < q_1$, $q_2' < q_2$, 2^0 $q_1' = 1$, $q_2' \ge 1$, 3^0 $q_2' = 1$, $q_2' \ge 1$.

Последовательность $\{x_i\} \subset (X, \rho_X)$ сходится к x_0, если $\lim\limits_{i\to\infty} \rho_X(x_0, x_i) = 0$. Последовательность $\{x_n\} \subset (X, \rho_X)$ называется *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $n > m > N$ выполняется $\rho_X(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Теорема 3. *Существует $(1, 1)$-квазиметрика ρ_X на $[0,1]$ такая, что найдется найдется последовательность Коши $\{x_i\} \subset ([0,1], \rho_X)$, имеющая бесконечно много пределов.*

Список литературы

[1] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Накрывающие отображения в квазиметрических пространствах и пространствах Карно — Каратеодори”, *Известия РАН*, (2015).

[2] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Springer-Verlag, (2001).

[3] H. Triebel, “A new approach to function spaces on quasi-metric spaces”, *Rev. Mat. Complut.*, Vol. 18, No. 1, 7–48 (2005).

[4] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, (1993).

[5] M. Gromov, *Sub-Reimannian geometry*, Birkhäuser, (1996).

[6] S. K. Vodopyanov, M. B. Karmanova, *Analysis and mathematical physics, Trends Math.*, Birkhäuser, (2009).

[7] A. Nagel A, E. M. Stein, S. Wainger, “Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties”, *Acta Math.*, Vol. 155, 103–47 (1985).

[8] А. В. Грешнов, “Доказательство теоремы Громова об однородной нильпотентной аппроксимации для векторных полей класса C^1”, *Мат. труды*, Т. 15, No. 2, 72–88 (2012).

ИМ СО РАН, проспект ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: greshnov@math.nsc.ru

ФОРМУЛА ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ТИПА ПЛОЩАДИ ДЛЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ЕЛЕНА ГЕННАДИЕВНА ГРИГОРЬЕВА

Пусть $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – положительная однородная степени 1, выпуклая функция такая, что $\Phi(\xi) = \Phi(-\xi)$. Для гладкой поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ рассмотрим величину

$$F(M) = \int\limits_M \Phi(\xi) dS,$$

где ξ – вектор единичной нормали к поверхности M. С практической точки зрения интересны устойчивые поверхности, являющиеся экстремалями для этого функционала. Для анализа устойчивости исследуется величина вида

$$\mu(M) = \inf \frac{\int\limits_M |\nabla h|^2 dM}{\int\limits_M A h^2 dM},$$

где точная нижняя грань взята по всем липшицевым функциям $h(m) : M \to \mathbb{R}$ таким, что $h(m)|_{\partial M} = 0$, а $A : M \to \mathbb{R}$ – некоторая положительная функция (см., например [1]).

Отметим работу [2], где предложен подход к оценке величин типа величины $\mu(M)$ для функционалов введенного вида, основанный на положительных решениях нелинейных дифференциальных неравенств.

Поверхность M будем аппроксимировать поверхностью $\tilde{M}$, которая задается конечным множеством точек $P = \{P_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, ..., N\}$ и совокупностью треугольников $T = \{T_j, j = 1, ..., M\}$. Каждый треугольник T_j однозначно определяется тремя целыми числами $k_j, l_j, m_j \in \{1, ..., N\}$, такими, что точки $P_{k_j}, P_{l_j}, P_{m_j}$ являются вершинами треугольника T_j.

Если $\tilde{M}$ – кусочно-линейная аппроксимация поверхности M, то приближенное значение введенного функционала будет вычисляться согласно формуле

$$F(M) = \sum_{i=j}^{p} \Phi(\xi_j) |T_j|,$$

где $\tilde{M}$ представляет собой объединение треугольников T_j, ξ_j – нормаль к плоскости этих треугольников, а $|T_j|$ – площади треугольников. Поверхность M можно рассматривать как точку в линейном пространстве LM размерности $3n$, где n – число вершин на $\tilde{M}$. Если задать в каждой точке-вершине поверхности вектор h, то этим векторам будет соответствовать вектор в LM.

Теорема. *Если функционал F рассмотреть как числовую функцию $F : LM \to \mathbb{R}$, то имеет место формула*

$$\frac{\partial F}{\partial h}(p_i) = \frac{1}{2} \langle \sum_{j=1}^{k} \left(\nabla \Phi(\xi_j) |\xi_j| + \frac{\xi_j}{|\xi_j|} \Phi(\xi_j) \right) \times l_j, h \rangle,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02517 р_поволжье_а).

где сумма идет по всем треугольникам, имеющим вершину $p_i \in M$, ξ_j как и выше обозначает нормаль к соответствующему треугольнику и l_j – вектор, соединяющий вершины треугольника, не совпадающие с p_i так, что эта вершина при обходе остается слева.

Пример 1. Рассмотрим случай
$$\Phi(\xi) = |\xi|,$$
соответствующий вычислению площади кусочно-линейной поверхности в $\mathbb{R}^3$. Тогда, как нетрудно посчитать, получим
$$\frac{\partial F}{\partial h}(p_i) = \langle \sum_{j=1}^{k} \xi_j \times l_j, h \rangle.$$
Если предположить, что поверхность M минимизирует функционал $F(M)$, то
$$\frac{\partial F}{\partial h}(p_i) = \langle \sum_{j=1}^{k} \xi_j \times l_j, h \rangle = 0$$
для любой вершины $p_i \in M$. Следовательно, условие минимума площади для кусочно-линейных поверхностей выражается равенством
$$\sum_{j=1}^{k} \xi_j \times l_j = 0,$$
что является аналогом условия равенства нулю средней кривизны поверхности. Эти равенства можно рассматривать как систему уравнений в пространстве LM. Сложность этой системы заключается в том, что уравнения ее составляющие нелинейны относительно координат вершин p_i.

В общем случае функционала $F(M)$ соответствующая система приобретает вид
$$\sum_{j=1}^{k} \left(\nabla\Phi(\xi_j)|\xi_j| + \frac{\xi_j}{|\xi_j|}\Phi(\xi_j) \right) \times l_j = 0.$$

Список литературы

[1] Клячин В.А., Медведева Н.М. “Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, № 4, 113–132 (2007).

[2] Григорьева Е.Г., “Некоторые оценки основной частоты для финслеровой метрики”, *Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика.*, № 1, 18–22 (2011).

Волгоградский государственный университет, пр-кт Университетский, 100, г. Волгоград, 400062, Россия

E-mail address: e_grigoreva@mail.ru

СТРУКТУРЫ КЭЛИ НА S^6, КАК СЕЧЕНИЯ ТВИСТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ

НАТАЛИЯ АЛЕКСАНДРОВНА ДАУРЦЕВА

В 1953 году Борель А. и Серр Ж. [1] доказали, что из четномерных сфер лишь S^2 и S^6 допускают почти комплексные структуры. Наиболее известной почти комплексной структурой на S^6 является структура Кэли. Для того, чтобы ее определить, будем рассматривать элементы $\mathbb{R}^7$ как чисто мнимые числа Кэли. Тогда на S^6 можно определить почти комплексную структуру J, для каждого $x \in S^6$ и $\forall v \in T_xS^6$ действующую по формуле:

$$J_x(v) = R_x(v),$$

где R_x – правое умножение Кэли. Другие структуры Кэли могут быть определены по формуле [2]:

$$J_x^A(v) = A^{-1}R_{A(x)}A(v), \quad ,\forall v \in T_xS^6, \forall x \in S^6$$

где $A \in O(7)$.

Не сложно показать, что пространство $CaS(S^6)$ структур Кэли на S^6 гомеоморфно объединению двух непересекающихся копий 7-мерного вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}^7$. Структуры Кэли, определяющие одну и ту же ориентацию образуют однородное пространство $CaS^+(S^6) = SO(7)/G_2 \approx \mathbb{RP}^7$.

Зафиксируем стандартную метрику на S^6 и рассмотрим твисторное расслоение $E^+(S^6, g)$, каждый слой которого состоит из почти комплексных структур $J_x : T_xS^6 \longrightarrow T_xS^6$, сохраняющих метрику g_x, и определяющих одну и ту же ориентацию.

Утверждение. *Для каждого $x \in S^6$, через каждую точку слоя $E_x^+(S^6, g)$ проходит однопараметрическое семейство структур Кэли.*

В работе изучаются свойства структур Кэли, рассматриваемых как сечения твисторного расслоения $E^+(S^6, g)$ над S^6.

Список литературы

[1] A. Borel, J.-P. Serre “Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod”, *Amer. J. Math.*, Vol. 75, 409–448 (1953).

[2] E. Calaby, H. Gluck “What Are the Best Almost-Complex Structures on the 6-Sphere?”, *Proc. of. Symp. in P. Math.*, Vol. 54, 99–106 (1993).

Кемеровский Государственный Университет, математический факультет, ул. Красная, 6, г. Кемерово, 650003, Россия

E-mail address: `natali0112@ngs.ru`

Работа поддержана грантом Президента РФ по поддержке научных школ, проект НШ-4382.2014.1.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ С МАТРИЧНЫМИ ХАРАКТЕРАМИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПРОКОЛАМИ.

АЛЕНА АЛЕКСЕЕВНА КАЗАНЦЕВА, ВИКТОР ВАСИЛЬЕВИЧ ЧУЕШЕВ, ОЛЬГА АЛЕКСАНДРОВНА ЧУЕШЕВА

Теория дифференциалов Прима нашла приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики. В работе доказано существование матричных дифференциалов для матричного характера, без условия регулярности функции, определяющей матричный тэта-ряд Пуанкаре, на границе единичного круга $U \subset \mathbb{C}$, который голоморфно зависит от характера. Пусть $F' = F \backslash \{P_1, ..., P_n\}$ — поверхность типа $(g, n), n \geq 0, g \geq 2$, и Γ' — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в U и униформизирующая поверхность F'. Тогда она имеет алгебраическое представление

$$\pi_1(F') \cong \Gamma' =< A_1, ..., A_g, B_1, ..., B_g, C_1, ..., C_n : \prod_{j=1}^{g} [A_j, B_j] C_1 \cdot C_n = 1 > .$$

Характер ρ на Γ' это любой гомоморфизм из группы Γ' в группу $GL(m, \mathbb{C})$. Матричным (ρ, q)-дифференциалом на F' называется матричнозначный дифференциал $\omega(z)dz^q$ на U удовлетворяющий условию

$$\omega(Tz)T'(z)^q \rho(T) = \omega(z), T \in \Gamma', z \in U, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теорема. *Пусть $M(z)$ – матричнозначная мероморфная функция порядка $m, m \geq 2$, на U с конечным числом полюсов внутри круга и с условием*

$$\int\int_U \|M(z)\| dxdy < \infty,$$

тогда для любых натуральных чисел $g \geq 2, n \geq 0, q \geq 0$ и матричного характера

$$\rho : \Gamma' \to GL(m, \mathbb{C})$$

существует, отличный от тождественного нуля, мероморфный матричный (ρ, q)-дифференциал на U, который задается формулой

$$\omega = \omega(z)dz^q = \sum_{T \in \Gamma'} M(T(z))T'(z)^q \rho(T) dz^q, T \in \Gamma', z \in U,$$

где $q + \lambda \geq 2$ и λ - вещественное число зависящее от q, g, n, m; построенный мероморфный $q-$дифференциал опускается до мероморфного $q-$дифференциала на F', голоморфно зависящего от характера.

Список литературы

[1] А. А.Казанцева, В.В.Чуешев, “Дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности”, *Сибирский математический журнал*, Т. 53, No. 1, 89–106 (2012).

[2] О.А. Чуешева, “Дифференциалы Прима с матричными характерами на конечной римановой поверхности”, *Сибирский математический журнал*, Т. 56, No. 3, 693–703 (2015).

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск,Россия, Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия

E-mail address: albesik@mail.ru, vvchueshev@ngs.ru, simran@mail.ru

Второй автор поддержан грантом РФФИ 15-01-07906.

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ФРАКТАЛЬНЫХ КРИВЫХ

КИРИЛЛ ГЛЕБОВИЧ КАМАЛУТДИНОВ

Пусть имеется семейство $S = \{\gamma_1(x), \gamma_2(x) : x \in X\}$ пар кривых, параметризованное $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Каково множество тех параметров $x \in X$, при которых кривые $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ не пересекаются?

Для фрактальных кривых, являющихся аттракторами систем сжимающих отображений [1], параметр x может играть как роль преобразования пространства $\mathbb{R}^n$, так и роль внутренней деформации, меняющей параметры сжимающих отображений.

Теорема. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Пусть функции $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$: $X \times I \to \mathbb{R}^n$ – α-гельдеровы по $t \in I = [0,1]$, а функция $f(x,u) = \varphi(x,t) - \psi(x,s)$, где $u = (t,s) \in U = I^2$, удовлетворяет условию $|x_1 - x_2| \le L\,|f(x_1,u) - f(x_2,u)|^\beta$ при любых $x_1, x_2 \in X$, $u \in U$. Тогда множество $X_1 = \{x \in X|\ \varphi(x,I) \cap \psi(x,I) \ne \emptyset\}$ имеет размерность $\dim X_1 \le \dfrac{2}{\alpha\beta}$, и при $\dfrac{2}{\alpha\beta} < \dim X$ кривые $\varphi(x,I)$ и $\psi(x,I)$ в общем положении не пересекаются.*

Эта теорема позволяет решить вопрос – можно ли с помощью малой деформации пары фрактальных кривых избавиться от их взаимопересечения.

Определение 1. *Циппером с вершинами $z_0, \dots, z_m \in \mathbb{R}^n$ и сигнатурой $\varepsilon \in \{0,1\}^m$ называется система $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих отображений пространства $\mathbb{R}^n$ таких что $S_i(z_0) = z_{i-1+\varepsilon_i}$ и $S_i(z_m) = z_{i-\varepsilon_i}$ для $i = \overline{1,m}$.*

Определение 2. *Размерностью подобия системы $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих отображений называется решение s уравнения Морана: $\sum\limits_{i=1}^{m} (Lip\ S_i)^s = 1$.*

Далее воспользуемся тем, что если фрактальная кривая является аттрактором циппера S, то для нее существует гельдерова параметризация с показателем равным $\dfrac{1}{s}$, где s – размерность подобия циппера S. [2]

Рассмотрим ситуацию, когда одна из кривых неподвижна: $\psi(x,t) \equiv \psi(t)$. В этом случае $f(x_1,t,s) - f(x_2,t,s) = \varphi(x_1,t) - \varphi(x_2,t)$.

Пример 1. Пусть $\varphi(x,t) = \varphi(t) + x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\varphi(x_1,t) - \varphi(x_2,t) = x_1 - x_2$, $\beta = 1$. По теореме кривая $\varphi(x,I)$ в общем положении не пересекается с $\psi(I)$, если $\alpha > \dfrac{2}{n}$. Если кривые $\varphi(I)$ и $\psi(I)$ являются аттракторами цепперов, то можно подобрать $\varphi(x,t)$ и $\psi(t)$ так, чтобы $\alpha = \dfrac{1}{s}$, где s – максимальная из размерностей подобия данных цепперов. В этом случае условие $\alpha > \dfrac{2}{n}$ принимает вид $s < \dfrac{n}{2}$.

Пример 2. Пусть $n = 3$, $X = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]^2 \times [r, +\infty)$, $r > 0$; Пусть $x = (\theta, \phi, p)$, $\varphi(x,t)$ – поворот точки $\varphi(t)$ на углы θ и ϕ относительно перпендикулярных друг другу осей и растяжение с коэффициентом p относительно начала координат. Можно показать, что $|x_1 - x_2| \le \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12 - \pi^2}\min\{1,r\}}\,|\varphi(x_1,t) - \varphi(x_2,t)|$, т. е. $\beta = 1$. Таким образом по теореме

Работа поддержана грантом РФФИ № 15.31.50043.

кривая $\varphi(x, I)$ в общем положении не пересекается с $\psi(I)$, если $\alpha > \dfrac{2}{3}$. Опять же, если кривые $\varphi(I)$ и $\psi(I)$ являются аттракторами ципперов с максимальной размерностью подобия s, то условие $\alpha > \dfrac{2}{3}$ принимает вид $s < \dfrac{3}{2}$.

Список литературы

[1] M.F. Barnsley *Fractals Everywhere*, Academic Press, (1988).

[2] В.В. Асеев, А.В. Тетенов, А.С. Кравченко "О самоподобных жордановых кривых на плоскости" *Сиб. матем. журн.*, 44:3 (2003), 481–492.

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Социалистическая, 32, Горно-Алтайск, 649000, Россия

E-mail address: kirdan15@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНЫХ СОЛИТОНОВ РИЧЧИ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ БАЗИСОВ ДЖ. МИЛНОРА

ПАВЕЛ НИКОЛАЕВИЧ КЛЕПИКОВ, ДМИТРИЙ НИКОЛАЕВИЧ ОСКОРБИН, ЕВГЕНИЙ ДМИТРИЕВИЧ РОДИОНОВ

В работе [1] Дж. Милнор построил специальные ортонормированные базисы трехмерных метрических алгебр Ли. Однако, построение этих базисов привязано к размерности 3, что заставляет искать другие методы построения аналогичных базисов для метрических алгебр Ли более высокой размерности.

Пусть G — n-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Пусть $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — множество левоинвариантных метрик на G. Его можно отождествить с множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ (см. подробнее [2]):

$$\widetilde{\mathfrak{M}} \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество классов эквивалентности $\widetilde{\mathfrak{M}}$ по отношению изометрии метрик, $\mathfrak{BM}$ — множество классов эквивалентности $\widetilde{\mathfrak{M}}$ по отношению изометрии метрик с точностью до умножения на константу. Как показано в работе [2], множество $\mathfrak{BM}$ можно отождествить с множеством орбит действия группы $\mathbb{R}\times\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ на множестве $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$, и имеет место теорема:

Теорема 1. [2] *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\{E_1,\ldots,E_n\}$ — канонический ортонормированный базис алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{U}$ — множество представителей классов $\mathfrak{BM}$. Тогда для любого скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в алгебре $\mathfrak{g}$ существуют константа $\lambda>0$, автоморфизм $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ и представитель $g\in\mathfrak{U}$ такие, что базис*

$$\{\varphi g E_1, ..., \phi g E_n\}$$

ортонормирован относительно скалярного произведения $\lambda\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Базис из теоремы 1 будем называть *обобщенным базисом Дж. Милнора.*

В данной работе построены обобщенные базисы Дж. Милнора всех четырехмерных метрических алгебр Ли, показано их применение к исследованию однородных солитонов Риччи, которые были впервые рассмотрены Гамильтоном в работе [3] и являются важным обобщением эйнштейновых метрик.

Определение. Пусть (M,g) — полное риманово многообразие. Метрика g называется *солитоном Риччи*, если она удовлетворяет уравнению:

$$r = \Lambda\cdot g + L_X g, \tag{1}$$

где r – тензор Риччи метрики g, $\Lambda\in\mathbb{R}$ – константа, $L_X g$ – производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X.
Если $M=G/H$ – однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (1), называется *однородным солитоном Риччи.*
В случае, если $M=G$ — группа Ли и левоинвариантная риманова метрика на G удовлетворяет уравнению (1) с некоторым левоинвариантным векторным полем X, такая метрика называется *однородным инвариантным солитоном Риччи.*

Назовем солитон Риччи тривиальным, если риманово многообразие (M,g) есть эйнштейновое многообразие, либо изометрично прямому произведению эйнштейнового многообразия и евклидова пространства.

Работа выполнена при содействии Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), гранта Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148).

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, а X — левоинвариантное векторное поле, тогда (1) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ [4]:

$$X^k(C^s_{ki}g_{sj} + C^s_{kj}g_{si}) + r_{ij} = \Lambda g_{ij}, \tag{2}$$

где X^k — координаты левоинвариантного векторного поля X, C^k_{ij} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа.

Используя обобщенные базисы Дж. Милнора, система (2) была записана для каждой четырехмерной метрической алгебры Ли и доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g. Тогда на G не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи.*

Однородные солитоны Риччи на разрешимых группах Ли, в том числе в размерности 4, рассмотрены в работе Х. Лауре [5], в которой их изучение сведено к нахождению алгебраических солитонов Риччи.

Определение. Группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{Ricc}(g) = \Lambda \cdot I + D, \tag{3}$$

где $\mathrm{Ricc}(g)$ — матрица оператора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, I — единичная матрица, D — матрица некоторого дифференцирования алгебры $\mathfrak{g}$.

Для каждой четырехмерной метрической алгебры Ли записана система (3) в обобщенном базисе Дж. Милнора, найдено ее решение и получена классификация всех четырехмерных алгебраических солитонов Риччи в терминах структурных констант алгебры Ли.

Обобщенные базисы Милнора могут найти применения для решения других задач, например, для определения сигнатур и спектров дифференциальных операторов на четырехмерных метрических группах Ли (см, например, [6]).

Список литературы

[1] J. Milnor, “Curvature of left invariant metric on Lie groups”, *Advances in mathematics*, Vol. 21, 293–329 (1976).

[2] H. Kodama, A. Takahara, H. Tamaru, “ The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling”, *manuscripta math*, Vol. 135, 229–243 (2011).

[3] R.S. Hamilton, “The Ricci flow on surfaces”, *Contemporary Mathematics*, Vol.71, 237–261 (1988).

[4] L.D. Cerbo, “Generic properties of homogeneous Ricci solitons”, *Adv. Geom*, Vol. 14(2), 225–237 (2014).

[5] J. Lauret, “Ricci soliton solvmanifolds”, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. 650, 1–21 (2011).

[6] Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова. “О спектре операторов кривизны конформно плоских групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой”, *Доклады Академии наук*, Т. 461, № 5, 513–515 (2015).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656064, Россия
E-mail address: askingnetbarnaul@gmail.com, oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru

О КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ КЛЯЧИН

В данной работе мы рассматриваем вопрос о равномерной сходимости приближенных решений краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)=\kappa f \quad \text{для} \quad (x,y)\in\Omega, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\langle\nabla f,\nu\rangle}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right|_{\partial\Omega}=\psi, \tag{2}$$

где Ω – многоугольная область на плоскости $\mathbf{R}^2$ с границей $\partial\Omega$, $\nu=(\nu_1,\nu_2)$ – вектор единичной внешней нормали в точках границы $\partial\Omega$, где он существует, $f\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, постоянная $\kappa>0$ и ψ заданная непрерывная функция на $\partial\Omega$. Известно [1], что решение f описывает капиллярную поверхность, находящуюся в равновесии, над областью Ω с заданным углом контакта γ (в случае, когда $\psi=\cos\gamma$) между этой поверхностью и стенкой капиллярной трубки. Достаточно подробно многие результаты исследования вопроса существования, единственности и устойчивости изложены в монографии [1].

Рассмотрим некоторое разбиение многоугольника Ω на невырожденные треугольники T_1, T_2, ..., T_N. Пусть P_1, P_2, $\ldots$, P_m – все вершины этих треугольников. Будем предполагать, что ни одна из точек P_i не является внутренней точкой ни одной стороны ни одного треугольника. Эти стороны будем обозначать Γ_l, $l=1,...,L$. Данную конструкцию назовем триангуляцией области Ω и будем ее обозначать $\{T_k\}_{k=1}^N$. Далее введем величину $d=\max\limits_k \operatorname{diam} T_k$. Отметим, что для заданной триангуляции мы можем рассматривать кусочно-линейные функции, которые однозначно определяются своими значениями в точках $P_1,...,P_m$.

Определение. *Кусочно-линейную функцию u^* будем называть кусочно-линейным решением краевой задачи* (1)–(2), *если для любой кусочно-линейной функции h выполнено равенство*

$$\sum_{k=1}^{N}\iint\limits_{T_k}\frac{\langle\nabla u^*,\nabla h\rangle}{\sqrt{1+|\nabla u^*|^2}}dxdy+\kappa\iint\limits_{\Omega}u^*(x,y)h(x,y)\,dx-\int\limits_{\partial\Omega}h\psi ds=0. \tag{3}$$

Пусть имеется последовательность триангуляций с тетраэдрами T_k^q, $k=1,...,N_q$, $q=1,2,...$ такая, что мелкость разбиения $d_q\to 0$. Обозначим через u_q^* соответствующую последовательность кусочно-линейных решений задачи (1)–(2). В данной работе мы исследуем вопрос о сходимости этой последовательности к точному решению.

Сформулируем нужные нам условия на последовательность триангуляций $\{T_k^q\}_{k=1}^{N_q}$, $q=1,2,...$, области Ω. Итак, далее будем предполагать следующее.

1) Для любого треугольника T_k^q наибольший из углов φ_k^q у наибольшей его стороны будем считать отделенным от нуля некоторой положительной постоянной: $\varphi_k^q\geq\varphi_0>0$ для всех $q=1,2,....$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-41-02517-р_поволжье_а.

2) Существует постоянная A, независящая от q, такая, что

$$d_q = \max_k \operatorname{diam} T_k^q \le A \sqrt{\min_{1 \le k \le N_q} v(T_k^q)},$$

где $v(T_k^q)$ – площадь треугольника T_k^q.

3) Найдется постоянная C_2, независящая от q, такая, что

$$d_q \sum_{\text{внутр.}\Gamma_l^q} |\Gamma_l^q| \le C_2,$$

где сумма берется по всем внутренним сторонам Γ_l^q треугольников триангуляции $\{T_k^q\}_{k=1}^{N_q}$.

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^2$ и P_0 – произвольная точка этой области. Для любого $0 < r < \operatorname{diam}\Omega$ положим

$$\delta_\Omega(r) = \inf_{P_0 \in \Omega} |B_r(P_0) \cap \Omega|,$$

где $|A|$ – обозначает лебегову меру множества A. Ясно, что функция $\delta_\Omega(r)$ является неубывающей при $r > 0$. Если в качестве области Ω взять всю плоскость $\mathbf{R}^2$, то $\delta_\Omega(r) = \pi r^2$. Мы будем предполагать, что найдутся такие числа $a > 0$, $\alpha > 0$, что

$$\delta_\Omega(r) \ge a r^\alpha \text{ при } r < \operatorname{diam}\Omega. \tag{4}$$

Итак, пусть $f \in C^2(\overline{\Omega})$ – решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющая краевому условию (2). Положим

$$M_0 = \max_{\overline{\Omega}} |f(x)|, \quad M_1 = \max_{1 \le i \le 2} \max_{\overline{\Omega}} |f_{x_i}(x)|, \quad M_2 = \max_{1 \le i,j \le 2} \max_{\overline{\Omega}} |f_{x_i x_j}(x)|.$$

Будем считать, что эти величины конечны.

Теорема. *Пусть ограниченная область Ω удовлетворяет условию (4). Пусть в Ω задано решение f краевой задачи (1)–(2). Если u^* кусочно-линейная функция, удовлетворяющая условию (3), то*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u^* - f| \le C\left(M_0, M_1, M_2, C_2, A, \varphi_0, a, \alpha, \kappa\right) d^{\frac{2}{\alpha+2}}, \tag{5}$$

где C – некоторая постоянная, зависящая от перечисленных величин. Таким образом, если последовательность триангуляций $\{T_k^q\}_{k=1}^{N_q}$ обладает свойствами 1) – 3) и такова, что $d_q \to 0$, то последовательность приближенных решений u_q^* равномерно сходится к решению f в области Ω со скоростью, которая определяется оценкой (5)

Список литературы

[1] Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. Пер. с англ., М.: Мир (1989) - 312 с.

Волгоградский государственный университет, проспект Университетский, 100, Волгоград, 400062, Россия

E-mail address: klyachin-aa@yandex.ru

ТРИАНГУЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ УСЛОВИЯ ПУСТОГО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ КЛЯЧИН

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство $\Phi = \Phi_\alpha, \alpha \in A$ выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью. Пусть S произвольный невырожденный симплекс. Определим описанное множество $B(S) \in \Phi$ (если оно существует) из данного семейства как множество, чья граница содержит вершины симплекса (а, значит, содержит весь симплекс в силу выпуклости $B(S)$).

Определение 1. *Рассмотрим произвольную триангуляцию конечного множества точек P. Будем говорить, что эта триангуляция является Φ-триангуляцией, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность множества $B(S)$ не содержит вершин других симплексов.*

Заметим, что если семейство Φ представляет собой семейство всех шаров в $\mathbb{R}^n$, то вышеприведенное определение совпадает с определением триангуляции Делоне [1],[2]. В работе [3] было доказано существование Φ-триангуляции конечного множества точек при условии, что семейство Φ обладает следующим свойством: для любого невырожденного симплекса S в семействе $\Phi = \Phi_\alpha, \alpha \in A$ существует и при том только одно описанное множество $B(S)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие на семейство выпуклых множеств выполненным.

Теорема 1. *Если семейство выпуклых множеств $\Phi = \Phi_\alpha, \alpha \in A$ обладает вышеприведенным свойством, то описанные множества симплексов обладают следующими свойствами:*

1. *множество $B(S)$ однозначно определяется любым симплексом с вершинами на его границе;*
2. *если для двух невырожденных симплексов S_1, S_2 выполнено $B(S_1) \neq B(S_2)$ и пересечение $B(S_1) \cap B(S_2)$ не пусто, то персечение границ множеств $B(S_1), B(S_2)$ представляет собой $(n-2)$-мерную выпуклую поверхность, лежащую в некоторой гиперплоскости;*
3. *если два симплекса S_1 и S_2 не пересекаются по внутренним точкам, имеют общую $(n-1)$-мерную грань G и A, B вершины симплексов, не принадлежащие грани G, причем $B(S_1)$, не содержит внутри себя вершину B симплекса S_2, то $B(S_2)$ не содержит внутри себя вершины A симплекса S_1.*

Рассмотрим произвольную гладкую строго выпуклую вниз функцию $x_{n+1} = \Psi(x)$, определенную во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такую, что

$$\frac{\Psi(x)}{|x|} \to +\infty \text{ при } x \to \infty. \tag{1}$$

При выполнении этого условия пересечение графика функции $\Psi(x)$ с произвольной не вертикальной плоскостью Π представляет собой выпуклую компактную $(n-1)$-мерную поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим для любых $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$

$$\Phi(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \Psi(y) \leq \Psi(x) + \langle \nabla\Psi(x), y - x\rangle + r\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02517 р_поволжье_а).

В силу свойства (1) и выпуклости $\Psi(x)$ множества $\Phi(x,r)$ образуют семейство выпуклых компактных множеств. Покажем, что для всякого невырожденного симплекса S можно построить единственное описанное множество из этого семейства. Пусть также точки $p_0,...,p_n \in \mathbb{R}^n$ образуют прозвольный невырожденный симплекс S. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ построим набор точек $Q_i = (p_i, \Psi(p_i)), i = 0,...,n$. Построим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ плоскость Π, проходящую через эти точки. Очевидно, что проекция пересечения этой плоскости с графиком функции $\Psi(x)$ представляет собой границу некоторого множества $\Phi(x,r)$. При этом точка x это единственная точка в которой касательная к графику параллельна плоскости Π. Единственность и существования такой точки следует из выпуклости и гладкости функции $\Psi(x)$.

Теперь обратимся к вопросу проверки уловия пустоты множеств вида $B(x,r)$. С этой целью построим функцию $H(p_0,...,p_n)$, зависящую от $(n+1)$ точек из $\mathbb{R}^n$. Пусть точки $p_0,...,p_n \in \mathbb{R}^n$ образуют произвольный невырожденный симплекс. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ построим набор точек $Q_i = (p_i, \Psi(p_i)), i = 0,...,n$. Построим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ плоскость Π, проходящую через эти точки и еще вертикальную гиперплоскость Π', проходящую через точки $Q_0,...,Q_{n-1}$. Ориентируем эти плоскости нормалями ξ и ξ' соответственно следующим образом. Нормаль ξ для Π направим вверх, т.е. так, чтобы $\langle e_{n+1}, \xi\rangle \geq 0$ (здесь e_{n+1} единичный вектор положительного направления оси Ox_{n+1}). Вектор ξ' выберем как внутренний вектор по отношению к симплексу $S(p_0,...,p_n)$. Такой выбор корректен поскольку плоскость Π' проходит через грань этого симплекса, определяемую вершинами $p_0,...,p_n$. В качестве значения функции $H(p_0,...p_n)$ возьмем величину угла между нормалями ξ и ξ'. В основе проверки условия пустоты лежит следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ произвольное конечное множество. Зафиксируем произвольно $p_i \in P, i = 0,...,n-1$ и пусть Π – гиперплоскость, проходящая через эти точки. Будем предполагать, что эти точки образуют невырожденный $(n-1)$-мерный симплекс. Пусть $P' \subset P$ та часть точек из P, которые лежат по одну сторону от Π. Если точка $p_n \in P'$ такова, что*

$$H(p_0,...,p_n) = \min_{p\in P'} H(p_0,...,p_{n-1},p),$$

то множество $B(S)$, где S – симплекс с вершинами $p_0,...,p_n$, не содержит внутри себя точек из P'.

Список литературы

[1] Delaunay B. N., Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi, *Известия АН СССР*, No. 6, 793 – 800 (1934).

[2] Делоне Б. П., О пустой сфере. К мемуару Георгия Вороного // Перевод с фр. А. Ю. Игумнов. В сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы". Выпуск 1. с. 147 – 153.

[3] В. А. Клячин, Об одном обобщении условия Делоне // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, № 1, 48-50 (2008).

Волгоградский государственный университет, пр-кт Университетский, 100, г. Волгоград, 400062, Россия

E-mail address: klchnv@mail.ru

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ КЭЗИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЯХ

ЛЮДМИЛА АДИЛОВНА МИКАЙЫЛОВА

Классическая теорема Птолемея утверждает, что для выпуклого четырехугольника со сторонами a, b, c, d и диагоналями e, f выполнено равенство $a\,b+c\,d = e\,f$. Для гиперболической геометрии аналог теоремы Птолемея был установлен J.E. Valentine [1]. Сферический аналог теоремы Птолемея был получен W. J. M'Clelland, T. Preston [2].

Прямым обобщением равенства Птолемея в евклидовой геометрии является теорема Кэзи. В работе [3] получен аналог теоремы Кэзи для гиперболической и сферической геометрий.

Теорема 1. *Пусть окружности O_1, O_2, O_3, O_4 на гиперболической плоскости касаются внутренним образом окружности O в заданном порядке. Пусть t_{ij} — длина общей внешней касательной к окружностям O_i и O_j. Тогда*

$$\operatorname{sh}\frac{t_{12}}{2}\,\operatorname{sh}\frac{t_{34}}{2}+\operatorname{sh}\frac{t_{23}}{2}\,\operatorname{sh}\frac{t_{14}}{2}=\operatorname{sh}\frac{t_{13}}{2}\,\operatorname{sh}\frac{t_{24}}{2}.$$

Теорема 2. *Пусть окружности O_1, O_2, O_3, O_4 на сферической плоскости касаются внутренним образом окружности O в заданном порядке. Пусть t_{ij} — длина общей внешней касательной к окружностям O_i и O_j. Тогда*

$$\sin\frac{t_{12}}{2}\,\sin\frac{t_{34}}{2}+\sin\frac{t_{23}}{2}\,\sin\frac{t_{14}}{2}=\sin\frac{t_{13}}{2}\,\sin\frac{t_{24}}{2}.$$

Замечание 1. *Если в теореме 1 и 2 радиус окружностей O_1, O_2, O_3, O_4 устремить к нулю, то получим теорему Птолемея для гиперболической и сферической геометрий соответственно.*

Замечание 2. *В теореме 1 вместо окружностей можно рассматривать орициклы или ветви эквидистант, при этом утверждение теоремы останется верным.*

Список литературы

[1] J.E. Valentine, "An analogue of Ptolemy's theorem and its converse in hyperbolic geometry", *Pacific J. Math.*, Vol. 34, No. 12, 817–825 (1970).

[2] W. J. M'Clelland, T. Preston, *A Treatise on Spherical Trigonometry with application to Spherical Geometry and Numerous Examples. Part II*, Macmillian and Co., London (1886).

[3] N.V. Abrosimov, L.A. Mikaiylova, "Casey's theorem in hyperbolic geometry", *Sib. Electron. Math. Reports*, Vol. 12, 354–360 (2015).

Новосибирский Государственный Университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: `mikayylova.ludmila@gmail.com`

Работа выполнена при поддержке зеркальной лаборатории прикладной вероятности НГУ.

ε-TQFT-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП КОС

МИХАИЛ АЛЕКСЕЕВИЧ ОВЧИННИКОВ

ε-TQFT – это топологическая квантовая теория поля, отвечающая квантовому t-инварианту 3-многообразий, который основан на свойстве $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$ отношения золотого сечения $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$. В ε-TQFT объекты – простые графы (регулярные валентности 3). Морфизмами являются кобордизмы вида простые полиэдры с краем. Рассматриваются подкатегории, в которых один объект – граф вида линейная (т. е. незамкнутая) цепочка n окружностей, последовательно соединенных $n-1$ отрезками. Морфизмы – простые полиэдры специального вида, реализующие перестановки окружностей в цепочке. Конструкция t-инварианта дает представление F полугруппы морфизмов в группу матриц.

Порядок матриц дается формулой $N = \sqrt{5}^{n-1}(\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{1-n})$ (5,15,50,... при n=2,3,4,...).

Теорема. *Отображение F является представлением группы кос B_n в группу матриц порядка N.*

В работе явно вычислены матрицы – образы стандартных образующих группы кос $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$.

Список литературы

[1] Матвеев С. В., Овчинников М. А., Соколов М. В., “Построение и свойства t-инварианта”, *Записки ПОМИ*, Т. 267, 207–219 (2000).

[2] Turaev V. G., Viro O. Y., “State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols”, *Topology*, Vol. 31, 865–902 (1992).

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, д. 129, г. Челябинск, 454121, Россия

E-mail address: ovch_csu_ru@mail.ru

ОПЕРАТОРЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЕ РАМА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

РОМАН АНАТОЛЬЕВИЧ ПАНЕНКО

В данном сообщении излагаются результаты, полученные в соавторстве с Я. А. Копыловым.

В своей классической монографии по дифференцируемым многообразиям (см. [2]) де Рам определяет для потоков на многообразиях сглаживающие операторы. Поскольку потоки являются непрерывными линейными функционалами на пространствах финитных форм, мы так же, как и в случае регулярных распределений, можем выделить класс потоков, порождаемых локально интегрируемыми формами. Здесь мы исследуем операторы регуляризации для форм на римановом многообразии, принадлежащих пространству Орлича. В частности, доказываем, что для N-функции Φ, удовлетворяющей условию Δ_2-регулярности, L^{Φ}-когомологии риманового многообразия могут быть вычислены с помощью гладких L^{Φ}-форм.

Список литературы

[1] Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А., Об одном свойстве операторов регуляризации де Рама, *Сиб. мат. журн.*, т. 25, №2, с. 105–111 (1984)

[2] де Рам Ж. *Дифференцируемые многообразия.* М.: Изд-во иностр. лит., 1956.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail address: panenkoral@gmail.com

О ПРЕДПИСАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СПЕКТРОВ ОПЕРАТОРОВ ТЕНЗОРОВ РИЧЧИ И ОДНОМЕРНОЙ КРИВИЗНЫ ТРЕХМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНЫМИ ЛОРЕНЦЕВЫМИ МЕТРИКАМИ

СВЕТЛАНА ВЛАДИМИРОВНА ПАСТУХОВА, ОЛЕСЯ ПАВЛОВНА ХРОМОВА

Одной из первых работ по исследованию спектров операторов кривизны является работа Дж. Милнора [1]. Позднее О. Ковальский и С. Никшевич исследовали вопрос о предписанных значениях спектра оператора Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, а также на трехмерных локально однородных римановых пространствах [2]. Работа [4] посвящена восстановлению трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой по собственным значениям оператора одномерной кривизны. В случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой аналогичные исследования провели О. Ковальский и Г. Кальварузо [3].

Так как, в отличие от риманова случая, оператор кривизны может иметь комплексные собственные значения, то мы будем рассматривать операторы $\mathtt{R}$ и $\mathcal{A}$, соответствующие матрицам тензоров Риччи и одномерной кривизны соответственно. Такие операторы имеют симметричную матрицу, а значит – действительные собственные значения.

В настоящей работе определены трехмерные унимодулярные группы Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками и предписанными значениями спектра операторов $\mathtt{R}$ и $\mathcal{A}$.

В частности, установлено

Теорема 1. *Пусть r_1, r_2, r_3 — вещественные числа. Унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой такой, что все корни характеристического уравнения $\det(g_{ik}C^{kj} - \lambda\delta_i^j) = 0$ вещественны и различны, и главными значениями оператора $\mathtt{R}$ — r_1, r_2, r_3 существует в том и только в том случае, если либо $r_1r_2r_3 > 0$, либо не менее двух r_i равны нулю.*

Теорема 2. *Пусть r_1, r_2, r_3 — вещественные числа. Неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой такой, что сужение скалярного произведения на плоскость $E_1 \wedge E_2$ положительно определено, и главными значениями оператора $\mathtt{R}$ — r_1, r_2, r_3 существует в том и только в том случае, если, с точностью до переобозначения, либо $r_1 < 0$, $r_2 + r_3 > 0$, $r_2 \neq r_3$ и $r_1 > -\frac{r_2^2+r_3^2}{r_2+r_3}$, либо $r_2 = r_3 = -r_1$.*

Теорема 3. *Пусть a_1, a_2, a_3 — вещественные числа. Унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой такой, что все корни характеристического уравнения $\det(g_{ik}C^{kj} - \lambda\delta_i^j) = 0$ вещественны и различны, и главными значениями оператора $\mathcal{A}$ — a_1, a_2, a_3 существует в том и только в том случае, если*

- *либо $(2a_1 - a_2 - a_3)(a_1 - 2a_2 - a_3)(a_1 - a_2 - 2a_3) > 0$,*
- *либо не менее двух множителей произведения $(2a_1-a_2-a_3)(a_1-2a_2-a_3)(a_1-a_2-2a_3)$ равны нулю.*

Список литературы

[1] J. Milnor, “Curvature of left invariant metric on Lie groups”, *Advances in mathematics*, Vol. 21, 293–329 (1976).

[2] O. Kowalski, S. Nikcevic, “On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds”, *Geom. Dedicata.*, No. 1, 65–72 (1996).

Работа выполнена при содействии Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), гранта Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148).

[3] G. Calvaruso, O. Kowalski, "On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds", *Cent. Eur. J. Math.*, Vol. 7, No. 1, 124–139 (2009).

[4] Д.Н. Оскорбин, "О спектре оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой", *Известия Алтайского государственного университета*, Т. 73, No. 1-1, 107–109 (2012).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656064, Россия
E-mail address: khromova.olesya@gmail.com, pastukhova.svetlana.1992@gmail.com

О СИГНАТУРЕ ОПЕРАТОРА ТЕНЗОРА СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ ТРЕХМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНЫМИ ЛОРЕНЦЕВЫМИ МЕТРИКАМИ

СВЕТЛАНА ВЛАДИМИРОВНА ПАСТУХОВА, ОЛЕСЯ ПАВЛОВНА ХРОМОВА

Одной из важных проблем римановой геометрии является задача об установлении связей между топологией и кривизной риманова многообразия. В однородном случае хорошо известны результаты Дж. Милнора [1], В.Н. Берестовского [2], Ю.Г. Никонорова, Е.Д. Родионова, В.В. Славского [3] о связи между кривизной Риччи, одномерной кривизной и топологией однородного риманова пространства.

Дж. Милнором в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой были найдены возможные сигнатуры оператора Риччи. Ю.Г. Никоноровым и А.Г. Кремлевым были определены возможные сигнатуры оператора Риччи на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой [4, 5]. Аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны получены Д.Н. Оскорбиным, Е.Д. Родионовым, О.П. Хромовой [6, 7, 8].

В случае левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли ситуация представляется менее очевидной. Так как, в отличие от риманова случая, оператор кривизны может иметь комплексные собственные значения, то мы будем рассматривать оператор $\mathcal{R}$, соответствующий матрице тензора секционной кривизны, которая симметрична, а значит имеет действительные собственные значения. Занумеруем все возможные сигнатуры для трехмерного случая так, как это указано в таблице 1.

Таблица 1. Возможные сигнатуры на трехмерных группах Ли

№	1	2	3	4	5
Сигнатура	$(-,-,-)$	$(-,-,0)$	$(-,-,+)$	$(-,0,0)$	$(-,0,+)$
№	6	7	8	9	10
Сигнатура	$(-,+,+)$	$(0,0,0)$	$(0,0,+)$	$(0,+,+)$	$(+,+,+)$

В данной работе определены возможные сигнатуры оператора $\mathcal{R}$ на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. При этом существенно использовались результаты Г. Кальварусо [9], Е.Д. Родионова, В.В. Славского, Л.Н. Чибриковой [10] о структуре трехмерных однородных лоренцевых многообразий.

Теорема. *Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\mathfrak{g}$ — метрическая алгебра Ли группы G, s — произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора $\mathcal{R}$ для некоторого лоренцева скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только в том случае, если в таблице 2 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак "+".*

Список литературы

[1] J. Milnor, "Curvature of left invariant metric on Lie groups", *Advances in mathematics*, Vol. 21, 293–329 (1976).

Работа выполнена при содействии Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), гранта Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148).

Таблица 2. Возможные сигнатуры оператора $\mathcal{R}$ левоинвариантных лоренцевых метрик на трехмерных группах Ли

Алгебра Ли		№ сигнатуры									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Унимодулярный случай											
A1	$su(2)$	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+
	$sl(2,\mathbb{R})$	+	+	+	−	+	+	−	−	+	+
	$e(2)$	−	−	+	−	+	+	+	−	+	+
	$e(1,1)$	+	+	+	−	−	−	+	−	−	+
	h	−	−	+	−	−	−	−	−	−	+
	$\mathbb{R}^3$	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
A2	$sl(2,\mathbb{R})$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
	$e(1,1)$	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
	h	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
A3	$sl(2,\mathbb{R})$	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−
	$e(1,1)$	−	−	−	+	−	+	−	−	−	−
A4	$sl(2,\mathbb{R})$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
	$e(1,1)$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
Неунимодулярный случай											
A		−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
B		−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
C1		−	−	+	+	+	+	−	+	−	−
C2		−	−	+	−	+	+	−	−	+	+

[2] В.Н. Берестовский, “Однородные римановы многообразия положительной кривизны Риччи”, *Математические заметки*, Т. 58, № 3, 334 (1995).

[3] Ю.Г. Никоноров, Е.Д. Родионов, В.В. Славский, “Геометрия однородных римановых многообразий”, *Современная математика и ее приложения. Геометрия*, Т. 37, 1–78 (2006).

[4] А.Г. Кремлев, Ю.Г. Никоноров, “Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай”, *Мат. труды*, Т. 11, № 2, 115–147 (2008).

[5] А.Г. Кремлев, Ю.Г. Никоноров, “Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай”, *Мат. труды*, Т. 12, № 1, 40–113 (2009).

[6] Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, “О спектре оператора кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой”, *ДАН*, Т. 450, № 3, 271 (2013).

[7] О.П. Гладунова, Д.Н. Оскорбин, “Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли”, *Известия АГУ*, Т. 77, No. 1-1, 19–23 (2013).

[8] Д.С. Воронов, О.П. Гладунова, “Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой”, *Известия АГУ*, № 1/2, 24–28 (2010).

[9] G. Calvaruso, “Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds”, *J. Geom. Phys*, Vol. 57, 1279–1291 (2007).

[10] Е.Д. Родионов, В.В. Славский, Л.Н. Чибрикова, “Локально конформно однородные псевдоримановы пространства”, *Математические труды*, Т. 9, № 1, 130–168 (2006).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656064, Россия
E-mail address: khromova.olesya@gmail.com, pastukhova.svetlana.1992@gmail.com

О ПРОЕКТИВНОМ ВЗГЛЯДЕ НА ПОНЯТИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

ВЛАДИМИР СЕРГЕЕВИЧ ПЕРМИКИН, ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ПЕРМИКИН

Известна задача о геометрических построениях в евклидовой плоскости с помощью линейки. Эта задача имеет классическое решение, предложенное Штейнером [1]. Минимальным достаточным условием построений с помощью линейки является наличие прямой линии и **неподвижного круга вместе со своим центром**. Наиболее полный обзор по данной тематике приведен в работе Адлера [2].

Более общая задача измерения отрезков и углов евклидовой геометрии рассмотрена Глаголевым с точки зрения проективной геометрии [3]. "Для полного разрешения этой задачи на всей плоскости необходимо:

1. наметить несобственную прямую плоскости;

2. выделить на ней пару мнимых сопряженных точек, как базу для измерения углов;

3. **принять какое-либо коническое сечение**, проходящее через мнимые сопряженные точки, за единичное коническое сечение, причем за начальную точку O взять полюс несобственной прямой;

4. определить единичные отрезки на прямых, не проходящих через начальную точку O, методом параллельного перенесения;

5. определить длину отрезка прямой как сложное четырех точек: концов отрезка, его единичной точки и несобственной точки прямой."

В решениях Штейнера и Глаголева **обязательным условием** выступает единичная окружность со своим центром (в общем случае кривая второго порядка).

Однако требование окружности является слишком сильным условием и может быть ослаблено: "Принять какой-либо отрезок за единичный".

Если рассмотреть единичный отрезок, то единичную окружность можно построить с помощью только одной линейки и затем выполнять построения Штейнера или программу Глаголева.

Построим единичную окружность в евклидовой плоскости по заданному единичному отрезку.

С точки зрения проективной геометрии евклидова геометрия определяется следующим абсолютом: бесконечно удаленная прямая и эллиптическая инволюция на ней. На рис. 1. бесконечно удаленная прямая расположена в плоскости чертежа; эллиптическая инволюция задана парой соответственных точек A, A' и B, B'; единичный отрезок обозначен OE.

Проведем прямую b по отрезку OE. Прямая b пересечет прямую a в точке C. Относительно пары точек O и C с помощью полного четырехугольника построим точку F гармоническую точке E. Из свойств полного четырехугольника следует, что с метрической точки зрения отрезки OE и OF равны.

Рассмотрим два пучка прямых с центрами в точках E и F. Прямая EA пучка E, в силу эллиптической инволюции, будет соответствовать прямой FA' пучка F. Пересечение прямых EA и FA' даст точку M. Аналогично прямая EA' пучка E, в силу инволюции, будет соответствовать прямой FA пучка F. Пересечение прямых EA' и FA даст точку K. Подобным образом построим точки L и N. По построению соответствие в пучках E и F проективное, а значит точки пересечения K, L, M, N соответственных прямых лежат на кривой второго порядка. Учитывая центры пучков E и F, мы имеем шесть точек для построения кривой второго порядка.

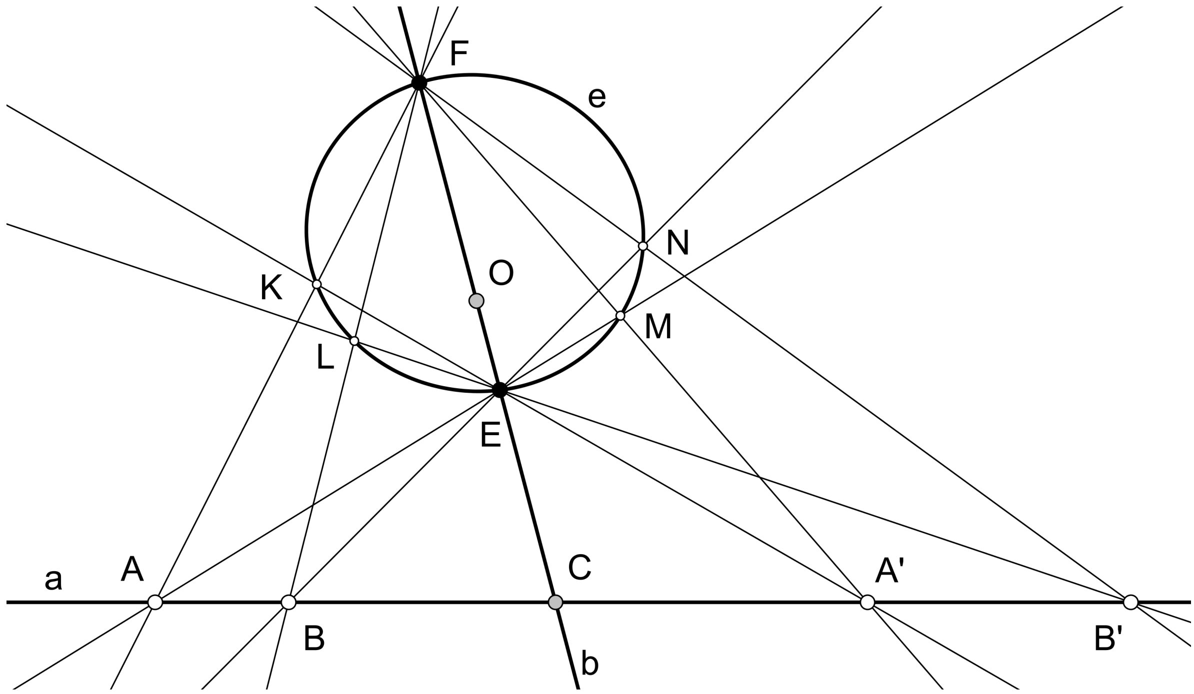

Рис. 1

Кривая второго порядка однозначно определятся пятью своими точками. В том смысле, что теперь на произвольной прямой, проходящей через центр кривой второго порядка, можно указать точку, принадлежащую этой кривой. Построение единичной окружности выполнено.

Замечание 1. Если при построении точка совпадет с одной из точек A, A', B, B', то необходимо найти другую пару точек, соответственных в данной инволюции, и продолжить построение.

Замечание 2. Вопрос о построении фигур с точки зрения физики связан с понятием абсолютно твердого тела. Если рассмотреть ситуацию с точки зрения проективной геометрии, то понятие абсолютно твердого тела связано с инволюцией на бесконечно удаленной прямой рассматриваемой плоской геометрии (евклидовой или псевдоевклидовой).

Список литературы

[1] Я. Штейнер, *Геометрические построения выполняемые с помощью прямой и неподвижного круга*, М.: Полиграфкнига, (1939).

[2] А. Адлер, *Теория геометрических построений*, Одесса: Матезисъ, (1910).

[3] Н.А. Глаголев, *Проективная геометрия*, М.: Высшая школа, (1963).

ООО НПМ Ньютоника, Екатеринбург, Россия
E-mail address: vladimir.permikin@yandex.ru

Уральский государственный университет, Екатеринбург, Россия
E-mail address: permikindv@mail.ru

ХРИСТИАН ФОН ШТАУДТ И ЕГО РАБОТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

ВЛАДИМИР СЕРГЕЕВИЧ ПЕРМИКИН, ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ПЕРМИКИН

Карл Георг Христиан фон Штаудт (*Karl Georg Christian von Staudt* , 24 января 1798 г. – 1 июня 1867 г.) немецкий математик, является одним из классиков проективной геометрии. Всем, кто знаком с проективной геометрией, хорошо известны следующие достижения Штаудта.

1. Обоснование независимости проективной геометрии от метрической геометрии.

2. Доказательство основной теоремы проективной геометрии: "*Каждое проективное соответствие прямой самой себе с тремя двойными точками является тождественным соответствием*".

3. Определение понятия проективности через гармоническое свойство полного четырехсторонника-четырехугольника.

4. Введение понятия вурфа – упорядоченной четверки элементов одномерного образа и проективное обоснование алгебры вурфов.

5. Проективное введение мнимых элементов в геометрию.

Все эти результаты изложены в четырех его основных трудах: 1. Geometrie der Lage, Nurnberg: Verlag von Bauer und Raspe – Fr, Korn, 1847 (Геометрия положения, с. 215).

2. Beitrage zur Geometrie der Lage, Erstes Heft, Nurnberg: Verlag von Bauer und Raspe -Julius Merz, 1856 (Приложение к геометрии положения, ч. 1, с. 1-129).

3. Beitrage zur Geometrie der Lage, Zweites Heft, Nurnberg: Verlag von Bauer und Raspe -Julius Merz, 1857 (Приложение к геометрии положения, ч. 2, с. 130-283).

4. Beitrage zur Geometrie der Lage, Drittes Heft, Nurnberg: Verlag von Bauer und Raspe - Julius Merz, 1860 (Приложение к геометрии положения, ч. 3, с. 284-396).

Синтетически-проективную геометрию, изложенную в этих четырех книгах, преемник Штаудта на кафедре, Герман Ганкель (1839 – 1873), охарактеризовал как "королевский путь для геометрии" [1].

Ф. Клейн так отзывался о трудах Штаудта по проективной геометрии: "Книги эти содержат исключительное богатство мысли, изложенные без пробелов в застывшей до безжизненности форме. Лично для меня штаудтовская манера изложения была абсолютно недоступной. И если, не смотря на это, я находился под большим влиянием его идей и немало поработал над их развитием, то я обязан этим исключительно своему товарищу Штольцу. Штольц много читал родственного ему по духу Штаудта и его рассказами я был введен в круг идей Штаудта, над которыми я в последствии много работал" [2].

Основная информация о достижениях Штаудта, доступная на русском языке, представлена в учебниках по проективной геометрии [3], в двух книгах Ф. Клейна [2,4] и в книгах по истории математики [5].

В процессе изучения проективной геометрии мы познакомились с трудами Штаудта, перевели все эти четыре книги и поняли, что информация о Штаудте и его работах по проективной геометрии на русском языке крайне скудна. Так при работе над переводом мы узнали, что конечная геометрия – не открытие 20 века, Штаудт занимался ею и рассчитал количество точек конечной проективной плоскости как $p^2 + p + 1$, если обозначить количество точек одной прямой через $p + 1$. Мы узнали также, что в университете имени Фридриха-Александра в Эрлангене и Нюрнберге 1991 г. учреждена премия имени Христиана фон Штаудта, которая присуждается раз в три года [1].

Данное сообщение преследуют цель ближе познакомить математическую общественность с трудами Карла Георга Христиана фон Штаудта и, возможно, получить рекомендацию Конференции на издание его трудов по геометрии на русском языке.

Пользуясь представленной возможностью, выражаем свою искреннюю благодарность нашему старшему товарищу, к сожалению ныне покойному, Владимиру Петровичу Хлебникову за перевод трудов Штаудта, Штольца, Клейна и др.

Список литературы

[1] Р. Фрич, *Георг Христиан фон Штаудт – математические и биографические заметки*, Пер. с нем. Тексты докладов в университете имени Фридриха-Александра в Эрлангене и Нюрнберге по случаю 200-летия со дня рождения фон Штаудта. Рукопись. 34 с.

[2] Ф. Клейн, *Лекции о развитии математики в XIX столетии*, Т. 1. Пер. с нем., М.: Наука, (1989).

[3] Н.А. Глаголев, *Проективная геометрия*, М.: Высшая школа, (1963).

[4] Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*, Т. 2: Геометрия. Пер. с нем., М.: Наука, (1987).

[5] *Математика XIX века. Геометрия. Теория Аналитических функций.*, Под редакцией А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича, М.: Наука, (1981).

ООО НПМ Ньютоника, Екатеринбург, Россия
E-mail address: vladimir.permikin@yandex.ru

Уральский государственный университет, Екатеринбург, Россия
E-mail address: permikindv@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОНФОРМНО ПЛОСКИХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

ЕВГЕНИЙ ДМИТРИЕВИЧ РОДИОНОВ, МАРИЯ ВИКТОРОВНА КУРКИНА,
ВИКТОР ВЛАДИМИРОВИЧ СЛАВСКИЙ

Локально конформно-плоская структура на римановых многообразиях естественным образом обобщает изотермическую систему координат [1,2] римановых поверхностей и аналитически определяется одной функцией – фактором. Это делает такие римановы многообразия наиболее привлекательными с точки зрения математического анализа. В работе [3] изучаются свойства функций (факторов), которым соответствуют конформно-плоские метрики неотрицательной одномерной кривизны.

Список литературы

[1] Ю. Решетняк, "Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. I", *Сиб. мат. журн.*, Vol. 1, No. 1, 88–116 (1960).

[2] Ю. Решетняк, "Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. II", *Сиб. мат. журн.*, Vol. 1, No. 2, 248–276 (1960).

[3] M. Kurkina, E. Rodionov, V. Slavskii, "Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature", *Doklady Akademii Nauk*, Vol. 462, No. 2, 141—143 (2015).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656064, Россия

Югорский государственный университет, ул. Чехова, 16, Тюменская область, ХМАО-Югра, г. Ханты-Мансийск, 628012, Россия

E-mail address: edr2002@mail.ru, mavi@inbox.ru, slavsky2004@mail.ru

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ 2263.2014.1), Правительства РФ (госконтракт ќ 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО "Алтайский государственный университет"(код проекта: 1148). РФФИ 15-41-00092 р-урал-а, 15-41-00063 р-урал-а, 15-01-06582 А.

О НЕПРЕРЫВНОСТИ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ГИПЕРПЛОСКОСТЯХ

АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ РОМАНОВ

Рассмотрим единичный куб $Q \subset R^n$ и пространство Соболева $W_p^1(Q)$. Элементом соболевского пространства является класс эквивалентных функций. Вообще говоря, функция $u \in W_p^1(Q)$ может быть не определена на множестве нулевой меры, но ее можно доопределить во всех точках Лебега, полагая равной пределу средних значений по шарам $B(x,r)$ при $r \to 0$. Уточненная функция будет эквивалентна исходной и однозначно определенна вне некоторого множества нулевой $(1,p)$-емкости. При $p > n$ все точки куба являются точками Лебега функции $u \in W_p^1(Q)$, уточненная функция оказывается непрерывной и даже гельдеровой с показателем $1 - n/p$.

При $p \leq n$ пространство Соболева $W_p^1(Q)$ содержит разрывные функции, а пространство следов на произвольном сечении S куба Q гиперплоскостью совпадает с пространством Бесова $B_p^{1-1/p}(S)$, которое тоже содержит разрывные функции. Однако при $n-1 < p \leq n$ конкретная уточненная функция $u \in W_p^1(Q)$ оказывается гельдеровой с показателем $1-(n-1)/p$ на почти всех сечениях ортогональных некоторой оси. Этот факт является простым следствием теоремы Фубини и теоремы вложения соболевских пространств в пространство непрерывных функций. Вполне очевидно, что должна существовать зависимость между показателем гельдеровости $0 < \alpha \leq 1-(n-1)/p$ и размерностью множества "плохих" сечений, на которых функция не принадлежит C^α.

Пусть $n-1 < p \leq n, n-p < d \leq 1$, множество $E \subset (-1,1)$ и является d-множеством, т.е. существует такая мера ν на E, что $C_1 r^d \leq \nu(E \cap B(x,r)) \leq C_2 r^d,\ x \in E$. Для всякого $t \in E$ рассмотрим сечение $G_t = \{x \in Q \mid x_n = t\}$.

Утверждение. *Если функция $u \in W_p^1(Q)$ и $\alpha = 1-(n-d)/p$, то $u|_{G_t} \in C^\alpha(G_t)$ при ν-почти всех $t \in E$.*

Доказательство основано на использовании результатов для обобщенных классов соболевского типа M_p^1, введенных П. Халашем [1].

Если множество $D = G_0 \times E$, а мера $\mu = \nu \times H^{n-1}$, то удается показать, что для уточненной функции $u \in W_p^1(Q)$ сужение $u|_D \in M_p^1(D, |*|^\gamma, \mu)$, и по теореме Фубини для ν-почти всех $t \in E$ сужение $u|_{G_t} \in M_p^1(G_t, |*|^\gamma, H^{n-1})$. Остается воспользоваться теоремой вложения классов M_p^1 в пространства гельдеровых функций [2].

При $d < n-p$ всякое d-множество E будет иметь нулевую $(1,p)$ - емкость, что позволяет легко построить пример функции $u \in W_p^1(Q)$, имеющей разрывы на сечениях G_t при всех $t \in E$.

Список литературы

[1] P. Hajlasz, "Sobolev spaces jn an arbitrary metric space", Potential Anal., Vol. 5, No. 4, 403–415 (1996).

[2] А.С. Романов, "О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа", Сиб. матем. журн, Т. 48, № 4, 848–866 (2007).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: asrom@math.nsc.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00552.

МНОГООБРАЗИЯ И ПОВЕРХНОСТИ С ЛОКАЛЬНО ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ

ИДЖАД ХАКОВИЧ САБИТОВ

1. Метрика риманового многообразия M^n называется локально евклидовой (л.е.), если у каждой его точки существует окрестность, изометричная некоторому шару в евклидовом пространстве R^n со стандартной метрикой. Мир многообразий с л.е. метрикой очень богат и он к настоящему времени изучен еще совсем мало. Достаточно напомнить, что любая многогранная поверхность произвольной размерности с проколотыми вершинами несет на себе л.е. метрику; на каждой двумерной минимальной поверхности с неравной нулю кривизной K и с метрикой ds^2_{min} квадратичная форма $ds^2 = \sqrt{-K}ds^2_{min}$ задает л.е. метрику.

2. В теории изометрических погружений л.е. метрик, в отличие от метрик ненулевой кривизны, есть специальный вопрос об изометрических погружениях этих метрик в стандартное евклидовое пространство той же размерности (кстати, аналогичный вопрос имеет смысл ставить и для любых метрик постоянной кривизны). Если мы можем изометрически погрузить или даже вложить данную л.е. метрику в евклидово пространство, то тогда мы можем сказать, что имеем натуральное представление этой метрики как метрики области с естественной евклидовой метрикой (например, геодезические этой метрики будут прямолинейными отрезками в этой области). В докладе будет рассказано о некоторых результатах, связанных с этим кругом вопросов в случае погружений двумерных л.е. метрик в евклидову плоскость.

3. Структура поверхностей с л.е. метрикой хорошо известна, начиная с предположения их C^2-гладкости. Для сохранения их аналогичного строения в классе поверхностей C^1-гладкости на эти поверхности нужно априори наложить некоторые дополнительные геометрические предположения. Мы даем аналитическое описание условий, которые являются необходимыми и достаточными для выполнении этих геометрических требований.

4. Для изометрических погружений двумерных метрик в трехмерное евклидово пространство, изученных с достаточной полнотой в случаях метрик со знакопостоянной кривизной, в случае л.е. метрик есть только частичные результаты. В частности, доказано, что если такая метрика допускает изометрическое погружение в двумерную евклидову плоскость, то для нее существует изометрическое вложение в R^3. В докладе будет рассказано об этом и других сопутствующих результатах об изометрических погружениях л.е. метрик.

5. Поверхности с л.е. метрикой и заданные в виде графика функции $z = f(x, y)$ являются решениями тривиального уравнения Монжа-Ампера $z_{xx}z_{yy} - z^2_{xy} = 0 \quad (1)$. Для решений этого уравнения можно поставить вопрос об их локальном и глобальном поведении в предположени наличия изолированных особенностей. Оказывается, для локального поведения можно получить некоторые аналоги поведения решений эллиптических уравнений.

Теорема 1. Пусть нормальная развертывающаяся поверхность $z = z(x, y)$ определена над кругом с проколотым центром $D_0 : 0 < x^2 + y^2 \leq r$ и принадлежит там классу C^1. Тогда функция $z(x, y)$ непрерывно продолжается в точку $(0, 0)$.

Теорема 2. Пусть решение $z(x, y) \in C^2$ уравнения (1) определено над областью D_0 и имеет в D_0 ограниченные вторые производные. Тогда его первые производные непрерывно продолжаются точку в $(0, 0)$.

Теорема 3. Пусть решение $z = z(x, y)$ уравнения (1) принадлежит классу $C^{n-1}(D) \cap C^n(D_0), n \geq 2$. Тогда функцию $z(x, y)$ можно непрерывно продолжить в функцию класса $C^n(D)$.

О глобальном поведении решений уравнения (1) можно доказать следующее утверждение

Теорема 4. Пусть на плоскости (x, y) задано произвольное конечное множество точек M. Тогда уравнение (1) имеет решения, определенные на всей плоскости, принадлежащие классу C^∞ всюду, кроме точек множества M, в которых они непрерывны и графически локально устроены как конические поверхности с вершиной в этих точках.

Список литературы

[1] И.Х. Сабитов, Изометрические погружения и вложения локально евклидовых метрик в R^2. *Известия РАН, серия Математика*, Т. 63, № 6, 147-166 (1999).

[2] И.Х. Сабитов, Многообразия и поверхности с локально евклидовой метрикой. *Труды международной конференции «Геометрия "в целом", топология их приложения», посвященной 90-летию со дня рождения А.В. Погорелова*, изд-во «Акта», Харьков, 2010, 124-140.

[3] I.Kh. Sabitov, Isometric Immersions and Embeddings of Locally Euclidean metrics. *Series "Reviews in Mathematics and Mathematical Physics"*, vol. 13, Part 1, edited A.T. Fomenko. Cambridge Scientific Publishers, 2009.

[4] И.Х. Сабитов, О развертывающихся линейчатых поверхностях с малой гладкостью. *Сибирски мат. журнал*, Т. 50, № 5, 1163-1175 (2009).

[5] И.Х. Сабитов, О внешней кривизне и внешнем строении C^1-гладких нормальных разертываающихся поверхностей. *Математические заметки*, Т. 87, № 6, 900-906 (2010).

[6] С.Н. Михалев, И.Х. Сабитов, Изометрические вложения локально евклидовых метрик в R^3 в виде конических поверхностей. *Математические заметки*, Т. 95, № 6, 63-73 (2014).

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские Горы, 119992, Москва, Россия

E-mail address: isabitov@mail.ru

НЕПРВОДИМАЯ $SO(3)$-СТРУКТУРА НА ПЯТМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

СЕДЫХ АННА ГЕННАДЬЕВНА

Определение 1. *Неприводимой $SO(3)$-структурой на 5-мерном римановом многообразии (M, g) называется тензорное поле $\mathbb{T}$ типа (0,3), для которого соответствующее линейное отображение*

$$TM \ni X \mapsto \mathbb{T}_X \in End(TM),$$

удовлетворяет следующим свойствам:

1) Симметричность, $g(X, \mathbb{T}_Y Z) = g(Z, \mathbb{T}_Y X) = g(X, \mathbb{T}_Z Y)$.

2) Нулевой след, $tr(\mathbb{T}_X) = 0$.

3) Для любого векторного поля $X \in TM$,

$$\mathbb{T}_X^2 X = g(X, X)X.$$

В работе [1] показано, что в каждом касательном пространстве можно выбрать адаптированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, в котором метрика g и тензор $\mathbb{T}$ будут иметь канонический вид, а именно, $g_{ij} = \delta_{ij}$ и

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}e^1(6(e^2)^2 + 6(e^4)^2 - 2(e^1)^2 - 3(e^3)^2 - 3(e^5)^2) + \frac{3\sqrt{3}}{2}e^4((e^5)^2 - (e^3)^2) + 3\sqrt{3}e^2e^3e^5.$$

Здесь $\{e^1, \ldots, e^5\}$ – дуальный репер. Из этого выражения мы получаем ненулевые компоненты тензора $\mathbb{T}$ в адаптированном репере:

$$t_{111} = -1,\ t_{122} = 1,\ t_{144} = 1,\ t_{133} = -\frac{1}{2},\ t_{155} = -\frac{1}{2},\ t_{433} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ t_{455} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ t_{235} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, неприводимая $SO(3)$-структура на многообразии – это риманова структура g и тензорное поле $\mathbb{T}$, обладающее указанными выше свойствами 1) – 3).

Теорема 1. *$SO(3)$-тензор $\mathbb{T}$ приблизительно интегрируемый тогда и только тогда, когда структурные уравнения удовлетворяют набору линейных соотношений:*

$$C^1_{12} = 0,\ C^2_{12} = 0,\ C^1_{14} = 0,\ C^4_{14} = 0, C^2_{45} = -C^4_{25},\ C^4_{12} = -C^2_{14},\ C^1_{13} = \sqrt{3}(C^3_{14} + C^1_{34}),$$
$$C^1_{15} = \sqrt{3}(-C^5_{14} + C^1_{45}),\ C^3_{13} = \sqrt{3}C^3_{34},\ C^5_{15} = \sqrt{3}C^5_{45},\ C^3_{12} + C^2_{13} = \sqrt{3}C^2_{25},$$
$$C^2_{15} + C^5_{12} = \sqrt{3}C^2_{23},\ C^1_{15} = \sqrt{3}(C^1_{23} - C^3_{12}),\ C^1_{13} = \sqrt{3}(C^1_{25} - C^5_{12}),$$
$$2C^3_{13} + \sqrt{3}C^2_{24} = 2\sqrt{3}(C^2_{35} + C^3_{25}), 2C^5_{15} - \sqrt{3}C^2_{24} = 2\sqrt{3}(C^5_{23} - C^2_{35}),$$
$$2C^3_{35} + C^2_{25} = C^3_{24} + C^2_{34},\ 2C^3_{35} + C^4_{45} = C^3_{24} + C^4_{23},\ 2C^5_{35} - C^2_{23} - C^4_{25} = C^5_{24},$$
$$C^3_{34} + C^5_{45} = C^5_{23} + C^3_{25},\ C^3_{15} + C^5_{13} = \sqrt{3}(C^3_{23} + C^5_{25}),\ C^5_{34} - C^3_{45} = C^5_{25} - C^3_{23},$$
$$2(C^3_{15} + C^1_{35}) = 2\sqrt{3}C^3_{23} + C^2_{14} + C^1_{24},\ 2(C^5_{13} - C^1_{35}) = 2\sqrt{3}C^5_{25} - (C^2_{14} + C^1_{24}),$$
$$2(C^4_{35} + C^3_{45} - C^3_{23}) = C^4_{24}, C^4_{23} + C^2_{25} = C^4_{45} + C^2_{34},\ 2(C^5_{34} + C^5_{35} - C^5_{25}) = C^4_{24},$$
$$C^4_{34} = -C^2_{23},\ \sqrt{3}(C^4_{45} + C^2_{34} - C^4_{23}) = C^3_{12} + C^2_{13},\ C^4_{13} = -C^3_{14} - \sqrt{3}C^2_{23}.$$

Представляют интерес так называемые *приблизительно интегрируемые* $SO(3)$-структуры, поскольку этот тензор ведет себя подобно почти комплексной структуре приблизительно Кэлерова многообразия.

Работа выполнена пр финансовой поддержке фонда гранта Президента РФ (проект НШ-4382.2014.1).

Определение 2. *Неприводимая $SO(3)$-структура на многообразии M называется приблизительно интегрируемой, если*

$$(\nabla_X \Upsilon)(X, X, X) = 0$$

для любого векторного поля X на M.

Теорема 2. *Если $SO(3)$-структура $\mathbb{T}$ является приблизительно интегрируемой, то ковариантная дивергенция $\delta\mathbb{T} = 0$.*

Замечание 1. В общем случае в обратную сторону теорема не верна.

Замечание 2. Ковариантная дивергенция $\delta\mathbb{T} = 0$ тогда и только тогда, когда тензор $\nabla_{(i}\mathbb{T}_{jkl)}$ имеет нулевой след по любым двум индексам.

Теорема 3. *Ковариантная дивергенция $\delta\mathbb{T}$ тензора $\mathbb{T}$ равна нулю тогда и только тогда структурные константы удовлетворяют следующим линейным соотношениям:*

$$C^2_{12} + C^4_{14} = 0, \quad C^5_{13} + C^3_{15} = \sqrt{3}(C^3_{23} + C^5_{25} - 2C^1_{12}), \quad C^5_{15} - C^3_{13} = \sqrt{3}(C^5_{45} - C^3_{34} + 2C^1_{14}),$$
$$C^5_{12} + C^2_{15} - C^4_{13} - C^3_{14} = \sqrt{3}(C^2_{23} + C^4_{34}), \quad C^3_{12} + C^2_{13} + C^4_{15} + C^5_{14} = \sqrt{3}(C^2_{25} + C^4_{45}),$$
$$\sqrt{3}(C^5_{23} + C^3_{25}) = 3C^2_{12} + C^3_{13} + C^4_{14} + C^5_{15}, \quad C^4_{12} + C^2_{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}(C^3_{45} + C^5_{25} - C^3_{23} - C^5_{34}),$$
$$\sqrt{3}(C^1_{15} + 2C^2_{25} - C^4_{23} - C^3_{24} + 2C^3_{35} + C^4_{45}) = 2C^2_{13} - C^3_{12} - 3C^1_{23},$$
$$\sqrt{3}(C^1_{13} + 2C^2_{23} + C^5_{24} + C^4_{25} - C_{34}4 - 2C^5_{35}) = 2C^2_{15} + 3C^1_{25} + C^5_{12},$$
$$\sqrt{3}(C^1_{14} + C^2_{24} - C^5_{45} + 2C^5_{23} - 2C^2_{35} + 3C^3_{34}) = C^2_{12} + 3C^3_{13} + C^4_{14} + C^5_{15},$$
$$C^3_{14} + 3C^1_{34} - 2C^4_{13} = \sqrt{3}(C^1_{13} + C^2_{23} + C^5_{24} - C^2_{45} - 2C^4_{34} - 2C^5_{35}),$$
$$C^5_{13} + C^3_{15} = \sqrt{3}(-C^1_{12} - C^5_{34} - C^3_{45} + C^4_{24} + 2C^3_{23} - 2C^4_{35} + C^5_{25}),$$
$$C^2_{12} + C^3_{13} + C^5_{15} + 3C^4_{14} = \sqrt{3}(C^3_{34} + C^5_{45}),$$
$$-C^5_{14} + 2C^4_{15} + 3C^1_{45} = \sqrt{3}(C^1_{15} + C^2_{25} - C^3_{24} - C^2_{34} + 2C^3_{35} + 2C^4_{45}),$$
$$C^2_{12} + C^3_{13} + C^4_{14} + 3C^5_{15} = \sqrt{3}(-C^1_{14} - C^2_{24} - C^3_{34} + 3C^5_{45} + 2C^3_{25} + 2C^2_{35})$$

Список литературы

[1] M. Bobienski, P. Nurovski, “Irreducible $SO(3)$ geometry in dimension five”, *Math.*, Vol. 43, No. 605, 51–93 (2007).

[2] А. Г. Седых, “О приближенно интегрируемых $SO(3)$-структурах на 5-мерных многообразиях” *Вестник ТГУ: Математика и механика*, №3(23), 45–50 (2013).

[3] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Москва, (1981).

Кемеровский институт (филиал) РЭУ им. Г.В. Плеханова, Кузнецкий 39,650992, Россия
E-mail address: sedykh-anna@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КАТЕГОРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ К РАВНОМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВАМ И ДИСТРИБУТИВНЫМ РЕШЕТКАМ

ЕВГЕНИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ СКУРИХИН

1. В год памяти А. Гротендика уместно ещё раз вспомнить о тех общих понятиях, которые он ввёл, и в рамках которых были получены замечательные математические результаты. Остановлюсь на понятии топологии Гротендика, позволившей, в частности, расширить на произвольные категории и во многих случаях существенно углубить в применении к классическим алгебраическим и топологическим объектам теорию пучков и теорию когомологий. Сам Гротендик считал тему топосов "наиболее обширной по своей значимости" из перечисленных им 12 тем, при разработке которых по его мнению введены наиболее важные концепции. Он считал, что в её рамках осуществлён синтез геометрии, топологии и теории чисел.

В то же время, нет сомнений в том, что понятие сайта Гротендика шире того необъятного круга задач, в которых методы теории топосов традиционно применяются. И хотя результаты, о которых ниже пойдёт речь, не могут сравниваться ни по глубине, ни по значимости с результатами школы Гротендика, они показывают, что расширение области применения методов Гротендика полезно, целесобразно и имеет перспективы. Они показывают также целесобразность дальнейшей разработки теории топосов Гротендика, как абстрактной геометрической теории.

2. Категорные топологически пространства определяются в рамках теории топосов Гротендика и представляют из себя предпучки множеств на категории, снабжённые структурой, определяемой топологией Гротендика на той же категории. Гомологическая топология категорных топологических пространств, а также структурная теория их подпространств, несмотря на общекатегорный характер, может строится в теоретико - множественных рамках. Поскольку каждый объект произвольной категории представляется предпучком можеств, то он наделяется (варьируемой) структурой категорного топологического пространства, в том числе структурами, близкими к топологическим. Доказывается общая теорема об изоморфизме групп когомологий Гротендика и Чеха (более слабый вариант анонсировался в работе [1]).

3. Равномерное пространство, рассматриваемое, как категория всех его подмножеств и наделяемая топологией Гротендика, задаваемой классом конечных равномерных покрытий, определяет категорное топологическое пространство. При этом определяются два типа когомологий пар (пространство, подпространство), а в качестве подпространства рассматриваются произвольные (а не только открытые или замкнутые) подмножества. На рассматриваемый случай обобщаются теоремы о когомологиях, когомологических размерностях, размерностях Исбелла.

4. Определяем топологию τ Гротендика на дистрибутивной решётке, считая, что конечное семейство элементов является покрытием своего супремума. Отмечается доказанный ранее результат о том, что классические свойства производных функторов обратного предела на счётном множестве являются частными случаями свойств τ-когомологий Гротендика. Доказывается, что нормальность является достаточным условием изоморфизма групп τ-когомологий Гротендика и Чеха.

5. Рассматривается каноническая топология Гротендика и канонические когомологии Гротендика на категории M-множеств, то есть множеств с действием полугруппы с единицей. Частным случаем такого множества для случая, когда M аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел, являются монады в смысле В. И. Арнольда, которые он

использовал для определения понятия сложности конечной последовательности. Показывается, что результаты о когомологических размерностях и размерности лебеговского типа M-пространств, трансформированных в Чу-пространства, могут интерпретироваться в терминах сложности по Арнольду.

Список литературы

[1] Е. Е. Скурихин, "Когомологии и размерности квазиупорядоченных множеств", *УМН*, Vol. 56, No. 1, 179–180 (2001).

ИПМ ДВО РАН, ул. Радио,7, Владивосток, 690041, Россия; ДВФУ (Дальневосточный Федеральный Университет) ул. Суханова, 8, Владивосток, 690950, Россия.

E-mail address: eeskur@gmail.com, eesku@iam.dvo.ru

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ АФФИННОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ КОСОЭРМИТОВЫХ МАТРИЦ С НУЛЕВЫМ СЛЕДОМ

ЯРОСЛАВНА ВИКТОРОВНА СЛАВОЛЮБОВА

Остановимся на основных понятиях относительно почти контактных структур. Говорят, что дифференцируемое многообразие M^{2n+1} имеет почти контактную структуру (η, ξ, φ), если оно допускает поле эндоморфизмов касательных пространств, векторное поле ξ и 1-форму η, удовлетворяющих условиям $\varphi(\xi) = 0$, $\eta \circ \varphi = 0$, $\eta(\xi) = 1$, $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$, где I – тождественное преобразование TM^{2n+1}. Риманова метрика g на M^{2n+1} называется совместимой с почти контактной структурой (η, ξ, φ), если $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$. Условие $\eta(X) = g(\xi, X)$ (а также $ker\eta = \xi^{\perp}$) выполняется для любой совместимой метрики. Четверку (η, ξ, φ, g), где η, ξ, φ, g удовлетворяют условиям: $\varphi(\xi) = 0$, $\eta \circ \varphi = 0$, $\eta(\xi) = 1$, $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$, $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ называют почти контактной метрической структурой. Фундаментальная 2-форма почти контактной метрической структуры (η, ξ, φ) определяется по формуле: $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$. Для любой почти контактной метрической структуры выполняется неравенство $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$. Если совместимая метрика g удовлетворяет условию $d\eta = \Phi$, тогда многообразие $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$ называется контактным метрическим многообразием, а метрика g – ассоциированной метрикой (соответственно структура (η, ξ, φ, g) – контактной метрической структурой).

По определению ранг почти контактной структуры (η, ξ, φ) является рангом ее 1-формы η. Таким образом, структура (η, ξ, φ) имеет ранг $r = 2s$ (соответственно, $r = 2s + 1$), если $(d\eta)^s \neq 0$ и $\eta \wedge d\eta^s = 0$ (соответственно, $\eta \wedge (d\eta)^s = 0$ и $(d\eta)^{s+1} = 0$). При этом 1-форма η называется контактной формой, если ее максимальный ранг равен n, то есть $\eta \wedge (d\eta)^s \neq 0$. Данное условие всегда выполняется в случае контактной метрической структуры.

Рассмотрим 5-мерную алгебру Ли $aff(R) \times su(2)$, являющуюся прямым произведением аффинной алгебры Ли $aff(R)$ и алгебры косоэрмитовых матриц с нулевым следом $su(2)$. В базисе $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ скобки Ли имеют вид: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_4, e_5] = e_3$, $[e_3, e_5] = -e_4$. Определим на алгебре Ли $aff(R) \times su(2)$ левоинвариантную почти контактную метрическую структуру (η, ξ, φ, g). В качестве характеристического векторного поля ξ можно взять $\xi = e_i$, где $i = 1, ..., 5$. Соответствующие наиболее простые почти контактные формы $\eta = e^i$, $i = 1, ..., 5$. Определим аффинор φ, который должен удовлетворять условиям: $\varphi^2|_{ker\eta} = -I$, $\varphi(\xi) = 0$, $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$. Такой аффинор задается неоднозначно. Зафиксируем аффинор φ_0, который действует на векторах специального базиса (базиса контактного распределения, определяемого, как $ker\eta$, и поля Риба) $(E_1, ..., E_5)$ следующим образом: $\varphi_0(E_1) = E_2$, $\varphi_0(E_2) = -E_1$, $\varphi_0(E_3) = E_4$, $\varphi_0(E_4) = -E_3$, $\varphi_0(E_5) = 0$. Определим также метрику $g_0 = E^1 + ... + E^5$. В результате исследования структуры (η, ξ, φ, g) получим следующую теорему.

Теорема. *Пусть $Aff(R) \times SU(2)$ – группа Ли, наделенная левоинвариантной почти контактной метрической структурой (η, ξ, φ, g). Тогда:*

1. При $\eta = e^i$, $i = 1, 2$ левоинвариантная почти контактная метрическая структура $(\eta, \xi, \varphi_0, g_0)$ на алгебре Ли $aff(R) \times su(2)$ не является ни нормальной, ни $K-$контактной структурой.

Матрица оператора Риччи имеет вид: $RIC = diag(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$. Скалярная кривизна принимает значение: $S = -\frac{1}{2}$. Секционные кривизны имеют вид: $K_{1,2} = K_{1,3} = K_{1,4} = 0$, $K_{2,3} = K_{2,4} = K_{3,4} = \frac{1}{4}$, $K_{1,5} = -1$, $K_{2,5} = K_{3,5} = K_{4,5} = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда гранта Президента РФ (проект НШ-4382.2014.1).

2. При $\eta = e^i$, $i = 3,4,5$ *левоинвариантная почти контактная метрическая структура* $(\eta, \xi, \varphi_0, g_0)$ *на алгебре Ли* $aff(R) \times su(2)$ *не является ни нормальной, ни* $K-$*контактной структурой.*

Матрица оператора Риччи имеет вид: $RIC = diag(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$. *Скалярная кривизна принимает значение:* $S = -\frac{1}{2}$. *Секционные кривизны имеют вид:* $K_{1,2} = K_{1,3} = K_{1,4} = 0$, $K_{2,3} = K_{2,4} = K_{3,4} = \frac{1}{4}$, $K_{1,5} = -1$, $K_{2,5} = K_{3,5} = K_{4,5} = 0$.

Список литературы

[1] D.E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Progress in Mathematics*, Birkhauser Boston, Vol. 203, (2002).

Кемеровский институт (филиал) РЭУ имени Г.В. Плеханова, проспект Кузнецкий, 39, Кемерово, 650992, Россия

E-mail address: `jar1984@mail.ru`

ОБ ОСОБЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ШЕСТИМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

НИКОЛАЙ КОНСТАНТИНОВИЧ СМОЛЕНЦЕВ

Как известно, существует 34 класса изоморфных связных односвязных шестимерных нильпотентных групп Ли. Из них только 26 классов допускают [1] левоинвариантные симплектические структуры и только 18 – комплексные структуры [2]. При этом существует только 14 классов, которые допускают (псевдо)кэлеровы структуры [3, 4]. Восемь классов групп Ли, которые не допускают левоинвариантных симплектических структур будем называть *особыми*. Желательно определить на них какие-нибудь достаточно хорошие структуры. В данной работе мы показываем, что на всех особых группах Ли существуют левоинвариантные полукэлеровы псевдоэрмитовы и почти псевдоэрмитовы структуры и изучаем их свойства. Известно, что на всех шестимерных нильпотентных группах Ли существуют обобщенные комплексные структуры [5]. В данной работе изучены также левоинвариантные обобщенные комплексные структуры на данных группах Ли.

Шестимерные нильпотентные группы Ли, которые не допускают левоинвариантных либо симплектических, либо симплектических и комплексных структур, хорошо известны, коммутационные соотношения их алгебр Ли приведены ниже.

G_1: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_2, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_3, e_5] = -e_6.$
G_2: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_4] = e_6.$
G_3: $[e_1, e_2] = e_6,\ [e_3, e_4] = e_6.$
G_4: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = e_5,\ [e_3, e_4] = e_6,\ [e_2, e_5] = -e_6.$
G_5: $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_3, e_4] = e_6,\ [e_2, e_5] = -e_6.$
G_6: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_1, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_3, e_5] = e_6.$
G_7: $[e_1, e_2] = e_4,\ [e_2, e_3] = e_5,\ [e_1, e_4] = e_6,\ [e_3, e_5] = e_6.$
G_8: $[e_1, e_2] = e_5,\ [e_1, e_5] = e_6,\ [e_3, e_4] = e_6.$

Первые три группы Ли допускают комплексные, но не имеют симплектических структур, последние пять – не допускают ни комплексных, ни симплектической структур.

В случае почти эрмитова многообразия (M^{2n}, g, ω, J) свойство $d(\omega^{n-1}) = 0$ фундаментальной формы ω определяет полукэлеровы многообразия по классификации Грея–Харвеллы. В случае псевдоэрмитовых метрик мы также будем называть такие многообразия *полукэлеровыми*. В нашем случае это свойство выражается равенством $\omega \wedge d\omega = 0$.

Когда 2-форма ω незамкнута, можно рассматривать 3-форму $\Omega = d\omega$. Для 3-форм Ω Н. Хитчин определил [6] понятие невырожденности используя линейный оператор K_Ω, квадрат которого пропорционален тождественному оператору Id.

Теорема. *Нильпотентные группы Ли $G_1 - G_3$, не имеющие только симплектических структур, допускают левоинвариантные полукэлеровы псевдоэрмитовы структуры (J, g, ω), фундаментальные формы которых и псевдоримановы метрики обладают свойствами:*

- *на группе G_1 форма ω имеет вид: $\omega = \omega_0 + \omega_C$, где ω_0 – замкнутая 2-форма и ω_C – невырожденная 2-форма на идеале $C^1\mathfrak{g}$, форма $d\omega$ невырождена и выполняется свойство полукэлеровости $\omega \wedge d\omega = 0$, ассоциированная псевдориманова метрика g имеет неэрмитов тензор Риччи;*
- *на группе G_2 форма ω обладает свойством полукэлеровости $\omega \wedge d\omega = 0$, форма $d\omega$ вырождена, ассоциированная псевдориманова метрика g имеет тензор кривизны с одной ненулевой компонентой R_{1212} и нулевой тензор Риччи;*
- *на группе G_3 форма ω имеет вид: $\omega = \omega_0 + \omega_Z$, где ω_0 – замкнутая 2-форма и ω_Z – невырожденная 2-форма на центральном идеале $\mathcal{Z}$, форма $d\omega$ вырождена*

и выполняется свойство $\omega \wedge d\omega = 0$, ассоциированная псевдориманова метрика g имеет неэрмитов тензор Риччи и ненулевую скалярную кривизну.

Для особых групп $G_4 - G_8$, не допускающих ни симплектических, ни комплексных структур получены аналогичные результаты. Рассмотрим для примера группу Ли G_4. Пусть $\omega = a_{ij}e^i \wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Прямые вычисления показывают, что она является замкнутой только в том случае, когда $\omega = e^1 \wedge (a_{12}e^2 + a_{13}e^3 + a_{14}e^4 + a_{15}e^5) + e^2 \wedge (a_{23}e^3 + a_{15}e^4 - a_{34}e^5) + a_{34}e^3 \wedge e^4$. Такая форма ω является вырожденной на идеале $\{e^5, e^6\}$.

Теперь рассмотрим оператор Хитчина K_Ω для общей формы ω. Он имеет достаточно сложный вид. При этом:

- ${K_\Omega}^2 = \lambda\, Id$, где $\lambda = 4\,{a_{36}}^2{a_{56}}^2 - 4\,{a_{46}}^2 a_{56}\, a_{36} + {a_{46}}^4 - 4\,a_{46}\,{a_{56}}^2 a_{45} + 4\,{a_{56}}^3 a_{35} + 4\,{a_{56}}^3 a_{16}$ при $a_{56} \neq 0$ и
- ${K_\Omega}^2 = {a_{46}}^4 Id$ при $a_{56} = 0$.

Таким образом, форма $\Omega = d\omega$ является вообще говоря невырожденной ($\lambda \neq 0$). В случае $a_{56} = 0$ не существует полукэлеровых форм ω, поэтому будем считать, что $a_{56} \neq 0$.

Выберем невырожденную (незамкнутую) 2-форму ω в виде $\omega = \omega_0 + \omega_C$, где ω_0 – общая замкнутая 2-форма и ω_C – невырожденная 2-форма на идеале $C^2\mathfrak{g} = \mathbb{R}\{e_4, e_5, e_6\}$. Потребуем от формы ω выполнения свойства $\omega \wedge d\omega = 0$. В этом случае функция $\lambda = {a_{46}}^4 - 4a_{46}a_{56}a_{45}$ принимает значение -1 при $a_{45} = ({a_{46}}^4 + 1)/(4a_{46}a_{56})$. При этом форма ω принимает вид:

$$\omega = e^1 \wedge (a_{13}a_{46}\, e^2 + a_{13}\, e^3 - a_{23}\, e^4) + a_{23}\, e^2 \wedge e^3 + e^4 \wedge (\frac{{a_{46}}^4 + 1}{4a_{46}}\, e^5 + a_{46}\, e^6) + e^5 \wedge e^6.$$

Она является невырожденной при $a_{23} \neq 0$. Оператор K_Ω определяет левоинвариантную почти комплексную структуру согласованную с ω и имеет вид:

$$K_\Omega = \begin{bmatrix} -{a_{46}}^2 & -2\,a_{46} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{{a_{46}}^4+1}{2\,a_{46}} & {a_{46}}^2 & 2\,a_{46} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{a_{46}}^2 & -2\,a_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{{a_{46}}^4+1}{2\,a_{46}} & {a_{46}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{{a_{46}}^4+1}{2} & -\frac{{a_{46}}^4+1}{2\,a_{46}} & {a_{46}}^2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{{a_{46}}^8+2\,{a_{46}}^4+1}{8\,{a_{46}}^2} & 0 & -\frac{{a_{46}}^4+1}{2} & -{a_{46}}^2 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированная метрика $g(X, Y) = \omega(X, K_\omega Y)$ является псевдоримановой. Относительно этой метрики тензор Нейенхейса почти комплексной структуры K_Ω имеет следующий квадрат нормы: $\|N_K\|^2 = -64\frac{2\,a_{23}a_{46}+2\,a_{13}-1}{{a_{23}}^2}$. Скалярная кривизна: $R = \frac{8\,a_{23}a_{46}+8\,a_{13}-1}{{a_{23}}^2}$.

Список литературы

[1] M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina, "Symplectic or contact structures on Lie groups", *Diff. Geom. Appl.*, Vol. 21, No. 1, 41–54 (2004).

[2] S.M. Salamon, "Complex structure on nilpotent Lie algebras", *J. Pure Appl. Algebra.*, Vol. 157, 311–333 (2001).

[3] L.A. Cordero, M. Fernández and L. Ugarte "Pseudo-Kähler metrics on six dimensional nilpotent Lie algebras", *J. of Geom. and Phys.*, Vol. 50, 115–137 (2004).

[4] Н.К Смоленцев, "Канонические псевдокэлеровы метрики на шестимерных нильпотентных группах Ли", *Вестник КемГУ*, Вып. 3/1(47), 155–168 (2011).

[5] G.R. Cavalcanti, M. Gualtieri, "Generalized complex structures on nilmanifolds", *J. Symplectic Geom.*, Vol. 2, No. 3, 393–410 (2004).

[6] N.J. Hitchin, "The geometry of three-forms in six dimensions", *J. Diff. Geom.*, Vol. 55, 547–576 (2000).

Кемеровский государственный университет, ул. Терешковой, 40, Кемерово, 650043, Россия

E-mail address: `smolennk@mail.ru`

ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

СОСОВ ЕВГЕНИЙ НИКОЛАЕВИЧ

Рассмотрим некоторое множество $\mathbb{K}$ метрических пространств одной и той же мощности $N > 1$ и напомним определение основного метрического инварианта [1].

Определение 1. *Функция $F : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$, принимающая значения в множестве всех неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$, называется* **основным метрическим инвариантом** *(на $\mathbb{K}$), если выполняются следующие условия $(i - iii)$.*

(i) *$F(X) = F(Y)$ для любых изометричных метрических пространств X, $Y \in \mathbb{K}$.*

(ii) *Для любого метрического пространства $(X, \rho) \in \mathbb{K}$*

$$F(X) \in \{\rho(x, y) : x, \ y \in X, \ x \neq y\}.$$

(iii) *Для любых метрических пространств (X, ρ), $(Y, d) \in \mathbb{K}$*

$$|F(X) - F(Y)| \leq 2d_s(X, Y),$$

где [2] $d_s(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} f : \ f : X \to Y - \text{биекция}\}$,

$$\operatorname{dis} f = \sup\{|\rho(x, y) - d(f(x), f(y))| : \ x, \ y \in X\}.$$

Приведем известные примеры основных метрических инвариантов ограниченного метрического пространства $(X, \rho) \in \mathbb{K}$.

1. Диаметр пространства X: $D(X) = \sup\{\rho(x, y) : \ x, \ y \in X\}$ (см. [2], [3]).

2. K-радиусы пространства X, где K — натуральное число.

$$R_K(X) = \inf\{\beta(X, S) : \ S \subset X, \ 1 \leq \operatorname{card}(S) \leq K\},$$

здесь $\beta(X, S) = \sup\{\rho(x, S) : \ x \in X\}$, $\operatorname{card}(S)$ — мощность множества S (см. [2], где применялось обозначение $R_{KX}(X) = R_K(X)$).

В дальнейшем предполагаем, что N **— конечно**, т.е. в $\mathbb{K}$ метрические пространства одной и той же конечной мощности N.

3. Пусть $2 \leq K < N$. Минимальный диаметр из всех диаметров подмножеств мощности K [1].

$$D_K(X) = \min\{D(S) : \ S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = K\}.$$

4. Пусть $2 \leq K < N$, $1 \leq L \leq K - 1$. Максимальный L-радиус из всех L-радиусов подмножеств мощности K [1].

$$\operatorname{mar}_{\mathrm{LK}}(X) = \max\{R_L(S) : \ S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = K\}.$$

Отметим, что при $L = K - 1$, где K — натуральное число, это основной метрический инвариант для любой (возможно, не конечной) мощности $N > 3$.

5. Пусть $2 \leq K < N$, $1 \leq L \leq K - 1$. Минимальный L-радиус из всех L-радиусов подмножеств мощности K [1].

$$\operatorname{mir}_{\mathrm{LK}}(X) = \min\{R_L(S) : \ S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = K\}.$$

В общем случае при $N > 2$ для любого $X \in \mathbb{K}$ имеют место равенства

$$D(X) = \operatorname{mar}_{12}(X), \qquad D_2(X) = \operatorname{mir}_{(\mathrm{L-2})(\mathrm{L-1})}(X) = R_{N-1}(X),$$

где L — натуральное число, $2 < L \leq N$.

Введем следующие определения.

Определение 2. *Пусть* $S \subset X$, $\operatorname{card}(S) = K$, *где* $4 \leq K \leq N$, $\operatorname{Ld}(S)$ — *упорядоченный по неубыванию набор всех расстояний между различными точками в* S. $\operatorname{Ld}_m(S)$ — m*-й элемент из* $\operatorname{Ld}(S)$, *где* $1 \leq m \leq K(K-1)/2$. *Определим на множестве* $\mathbb{K}$ *следующие функции*

$$\mathrm{mild}_{\mathrm{mK}}(X) = \min\{Ld_m(S) : \ S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = K\},$$

$$\mathrm{mald}_{\mathrm{mK}}(X) = \max\{Ld_m(S) : \ S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = K\}.$$

Отметим, что при $K = N$ значения этих функций равны $\operatorname{Ld}_m(X)$. Кроме того,

$$\mathrm{mild}_{1\mathrm{K}}(X) = R_{N-1}(X), \qquad \operatorname{Ld}_2(X) = R_{N-2}(X), \qquad \mathrm{mild}_{(\mathrm{K}(\mathrm{K}-1)/2)\mathrm{K}}(X) = D_K(X);$$

$$\mathrm{mald}_{1\mathrm{K}}(X) = \mathrm{mar}_{(\mathrm{K}-1)\mathrm{K}}(X), \qquad \mathrm{mald}_{2\mathrm{K}}(X) = \mathrm{mar}_{(\mathrm{K}-2)\mathrm{K}}(X), \quad \mathrm{mald}_{(\mathrm{K}(\mathrm{K}-1)/2)\mathrm{K}}(X) = D(X).$$

Определение 3. *Пусть* $S \subset X$, $\operatorname{card}(S) = T$, *где* $1 \leq T \leq [N/2]$, $[N/2]$ — *целая часть* $N/2$. *Обозначим через* $\operatorname{Lc}(S)$ *упорядоченный по неубыванию набор всех расстояний между точками, первая из которых пробегает множество* S, *а вторая независимо пробегает множество* $X \backslash S$, *и* $\operatorname{Lc}_k(S)$ — k*-й элемент из* $\operatorname{Lc}(S)$, *где* $1 \leq k \leq T(N-T)$. *Определим на множестве* $\mathbb{K}$ *следующие функции*

$$\mathrm{milc}_{\mathrm{kT}}(X) = \min\{Lc_k(S) : \ S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = T\},$$

$$\mathrm{malc}_{\mathrm{kT}}(X) = \max\{Lc_k(S) : \ S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = T\}.$$

Отметим, что $\mathrm{milc}_{1\mathrm{T}}(X) = R_{N-1}(X)$, $\qquad \mathrm{malc}_{(\mathrm{T}(\mathrm{N}-\mathrm{T}))\mathrm{T}}(X) = D(X)$.

Теорема. *Пусть* $4 \leq K \leq N$, $1 \leq m \leq K(K-1)/2$, $1 \leq T \leq [N/2]$, $1 \leq k \leq T(N-T)$. *Тогда функции*

$$\mathrm{mild}_{\mathrm{mK}}, \qquad \mathrm{mald}_{\mathrm{mK}}, \qquad \mathrm{milc}_{\mathrm{kT}}, \qquad \mathrm{malc}_{\mathrm{kT}}$$

являются основными метрическими инвариантами.

Следствие. *Для любых* (X, ρ), $(Y, d) \in \mathbb{K}$ *имеет место неравенство*

$$DS(X,Y) := \max\{|\operatorname{Ld}_m(X) - \operatorname{Ld}_m(Y)| : \ 1 \leq m \leq N(N-1)/2\} \leq 2d_s(X,Y).$$

Рассмотрим подпространства

$$X = \{x_1 = (0;0;0), x_2 = (12;0;0), x_3 = (10;6;0), x_4 = (8;5;3)\},$$

$$Y = \{y_1 = (0;0;0), y_2 = (12;0;0), y_3 = (10;5;3), y_4 = (8;6;0)\}$$

метрического пространства $(\mathbb{R}^3, \rho)$ с метрикой

$$\rho((a^1;a^2;a^3),(b^1;b^2;b^3)) = \max\{|a^1 - b^1|, |a^2 - b^2|, |a^3 - b^3|\}.$$

В [1] показано, что $2d_s(X,Y) = 1$. Нетрудно показать, что любой из рассмотренных основных инвариантов J принимает на этих подпространствах одинаковые значения, т.е. $J(X) = J(Y)$. Можно привести много примеров метрических инвариантов, принимающих разные значения на этих подространствах, но пример основного метрического инварианта с таким же свойством не известен автору.

Список литературы

[1] Е. Н. Сосов, "Об основных метрических инвариантах конечных метрических пространств", *Изв. вузов. Матем.*, No. 5, 45-48 (2015).

[2] Е. Н. Сосов, "Относительный N-радиус ограниченного множества метрического пространства", *Уч. записки Казан. ун-та*, Vol. 153, No. 4, 28-36 (2011).

[3] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Москва–Ижевск: Институт компьютерных иследований, (2004).

[4] Е. Н. Сосов, "Относительный чебышевский центр конечного множества геодезического пространства", *Изв. вузов. Матем.*, No. 4, 66-72 (2008).

Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия

E-mail address: evgenii.sosov@kpfu.ru

О ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЛИФТАХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В РАССЛОЕНИЯ ВЕЙЛЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

АДГАМ ЯХИЕВИЧ СУЛТАНОВ

В работе приводятся некоторые вертикальные лифты тензорных полей, горизонтальные лифты векторных полей, заданных на гладком класса C^∞ многообразии M_n в его расслоение А. Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ второго порядка над алгеброй А. Вейля $\mathbb{A}$ высоты 2. Показано, что каждая линейная связность на M_n позволяет на расслоении $M_n^{\mathbb{A}}$ построить атлас суммы Уитни касательных расслоений исходя из естественного атласа гладкой структуры расслоения Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$.

Напомним, что вещественной алгеброй А. Вейля $\mathbb{A}$ называется конечномерная, коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{R}$, обладающая идеалом $\mathbb{I}$, причем $\mathbb{I}^2 \neq \{0\}$, а $\mathbb{I}^3 = \{0\}$, и факторалгебра $\mathbb{A}/\mathbb{I}$ изоморфна алгебре $\mathbb{R}$. В алгебре $\mathbb{A}$ выберем базис $\{e^0, e^1, \dots, e^m\}$, где $e^0 = 1$, а $e^1, e^2, \dots, e^m$ составляют базис идеала $\mathbb{I}$. Из определения алгебры Вейля следует, что структурные постоянные $\gamma_\sigma^{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta, \sigma \neq 0)$ удовлетворяют следующим соотношениям $\gamma_\sigma^{\alpha\beta}\gamma_\mu^{\sigma\tau} = 0$, где $\tau, \mu \neq 0$, а по индексу σ ведется суммирование от 1 до m. На расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ возникает естественная гладкая класса C^∞ структура. Пусть (u, x^i) – карта гладкой структуры на M_n, обозначим через x_o^i, x_α^i $(\alpha = 1, 2, ..., m)$ координатные функции на $\pi^{-1}(U)$, где $\pi : M_n^{\mathbb{A}} \to M_n$ является канонической проекцией. Если ∇ - линейная связность, заданная на M_n, и Γ_{jk}^i - компоненты этой связности в карте (U, x^i), то в области $\pi^{-1}(U)$ можно ввести новые координатные функции $x_{[0]}^i, x_{[\alpha]}^i$ $(\alpha = 1, 2, ..., m)$ по формулам:

$$x_{[0]}^i = x_0^i, x_{[\alpha]}^i = x_\alpha^i + \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^k \gamma_\alpha^{\sigma\tau}.$$

Координатные окрестности $(\pi^{-1}(U), x_{[0]}^i, x_{[\alpha]}^i)$ составляют атлас суммы Уитни на $M_n^{\mathbb{A}}$.

Пусть Q - тензорное поле типа $(1, 2)$ на M_n. На $M_n^{\mathbb{A}}$ возникает вертикальное векторное поле Q^V, определенное условием $Q^V = (Q_{jk}^i)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^k \gamma_\alpha^{\sigma\tau} \partial_i^\alpha$, где ∂_i^α - оператор частного дифференцирования по x_α^i, а по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до m. Векторное поле Q^V будем называть вертикальным лифтом тензорного поля Q. Для тензорного поля P типа $(1, 1)$ определим вертикальное векторное поле P^{V_α} $(\alpha = 1, 2, ..., m)$ (V_α-лифты) условиями $P^{V_\alpha} = (P_j^i)_{(0)} x_\sigma^j \gamma_\tau^{\sigma\alpha} \partial_i^\tau$. Для векторного поля X, заданного на M_n определим вертикальные векторные поля $X^{V_{(\alpha,\beta)}}$ условиями $X^{V_{(\alpha,\beta)}} = (X^i)_{(0)} \gamma_\sigma^{\alpha\beta} \partial_i^\sigma$.

Пусть X - векторное поле на M_n. На $M_n^{\mathbb{A}}$ определим следующие горизонтальные лифты этого векторного поля:

$$X^H = (X^i)_{(0)}(\partial_i^0 - ((\Gamma_{ij}^k)_{(0)} x_\alpha^j + \frac{1}{2}(\partial_j \Gamma_{is}^k - \Gamma_{ij}^t \Gamma_{ts}^k)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^s \gamma_\alpha^{\sigma\tau})\partial_k^\alpha),$$

$$X^{H_\tau} = (X^i)_{(0)}(\partial_i^\tau - (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} x_\sigma^j \gamma_\alpha^{\sigma\tau} \partial_k^\alpha),$$

$$X^h = (X^i)_{[0]}(\partial_i^{[0]} - (\Gamma_{ij}^k)_{[0]} x_{[\alpha]}^j \partial_k^{[\alpha]}),$$

$$X^{h_\tau} = (X^i)_{[0]} \partial_i^{[\tau]}.$$

Имеют место следующие тождества:

$$[X^H, Q^V] = (\nabla_X Q)^V,$$

$$[X^{H_\alpha}, Q^V] = (Q(X,\,\cdot) + Q(\cdot\,, X))^{V_\alpha},$$

$$X^h = X^H - \frac{1}{2}(R(X,\,\cdot))^V,$$

$$X^{h_\alpha} = X^{H_\alpha} + \frac{1}{2}(T(X,\,\cdot))^{V_\alpha},$$

где T, R - тензорные поля кручения и кривизны, соответственно, линейной связности ∇.

Используя эти тождества, доказаны следующие тождества:

$$[X^H, Y^H] = [X,Y]^H - (R(X,Y))^\nu + \frac{1}{2}(\nabla_X R_Y - \nabla_Y R_X - R_{[X,Y]})^V,$$

$$[X^H, Y^{H_\alpha}] = (\nabla_X Y)^{H_\alpha} + \frac{1}{2}(R(X,Y) + \hat{R}(X,Y) - \nabla_X T(Y,\,\cdot))^{V_\alpha},$$

$$[X^{H_\alpha}, Y^{H_\beta}] = (T(X,Y))^{V_{(\alpha,\beta)}},$$

где тензорные поля R_X, $\hat{R}$ определены условиями $R_X(Z_1, Z_2) = R(X, Z_1)Z_2$, и $\hat{R}(X,Y)Z = R(X,Z)Y$, а $(R(X,Y))^\nu = ((R(X,Y))^i_j)_{(0)} x^j_{[\alpha]} \partial^{[\alpha]}_i$.

Список литературы

[1] A. Weil, "Theore des points proches sur les varieties differentiables", *Colloq. internat. Centere nat, rech. sci.*, Vol. 52, 111–117 (1953).

[2] А. Султанов, "Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля", *Математические заметки*, Vol. 91, No. 6, 896–899 (2012).

Пензенский государственный университет, ул. Красная, д. 40, Пенза, 440026, Россия
E-mail address: sultanovaya@rambler.ru

СВЯЗЬ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СЛОЖНОСТИ УЗЛА В УТОЛЩЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ ТАРКАЕВ

Одним из естественных направлений развития классической теории узлов является изучение узлов в многообразиях, отличных от S^3. Узлы в утолщенных поверхностях привлекают к себе особое внимание в частности потому, что, во-первых, для них можно развивать подходы из классической теории, базирующиеся на задании узлов диаграммами, и, во-вторых, получаемые при этом обобщения часто обладают свойствами, отсутствующими в исходной классической ситуации.

Пусть S – замкнутая ориентируемая поверхность рода $g > 0$ и k –узел в $M = S \times I$.

Назовем узел $k \subset M$ *несущественным*, если он обладает диаграммой D такой, что на S существует нетривиальная простая замкнутая кривая c, для которой $D \cap c = \emptyset$. В противном случае узел будем называть *существенным*.

Гомологической характеристикой узла $k \subset M$ назовем неотрицательное целое число $H(k)$, определяемое по следующему правилу

- $H(k) = 0$, если узел k гомологически тривиален.
- $H(k) = r, r \geq 1$, если для некоторого базиса $\{h_1, \dots, h_{2g}\}$ группы $H_1(M)$ $k \underset{H_1(M)}{=} rh_i$, для какого-то i.

В классическом случае в силу тривиальности группы $H_1(S^3)$ аналогичное понятие являлось бы абсолютно бесполезным. Но в случае утолщенных поверхностей оно позволяет дать содержательную нижнюю оценку сложности узла. Под сложностью узла здесь понимается минимально возможное число перекрестков на его диаграмме.

Теорема. *Пусть S – замкнутая ориентируемая поверхность рода $g > 0$ и $k \subset S \times I$ – существенный узел с гомологической характеристикой $H(k)$. Тогда число $c(k)$ – минимально возможное число перекрестков в диаграмме узла k удовлетворяет неравенству*

$$c(k) \geq \begin{cases} H(k) + 1 & \text{если } g = 1, \\ H(k) + 2g - 2 & \text{если } g > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Эта оценка позволила построить бесконечные серии узлов в утолщенных поверхностях для которых известно точное значение сложности. Для этого достаточно для каждого значения гомологической характеристики предъявить существенные узлы такие, что неравенство (1) для них обращается в равенство.

Челябинский Государственный Университет, ул. Братьев Кашириных, 129, г.Челябинск, 454021, Россия

E-mail address: trk@csu.ru

О ФУНКЦИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБОБЩЕННОМУ УСЛОВИЮ РИДА — БАЙРАКТАРЕВИЧА

АНДРЕЙ ВИКТОРОВИЧ ТЕТЕНОВ

Аффинные фрактальные интерполяционные функции на отрезке $I = [0, 1]$ являются неподвижными точками в $C(I)$ оператора Рида — Байрактаревича, который в этом случае задается равенством

$$Tf(x) = \sum_{k=1}^{m} p_k f(L_k^{-1}(x)) + q_k x + r_k,$$

где $L_k : [0, 1] \to [x_{k-1}, x_k]$ — линейные функции, точки $0 = x_0 < x_1 < ..., x_m = 1$ задают разбиение отрезка $[0, 1]$, а все коэффициенты p_i по модулю строго меньше 1.

Рассмотрим более общую ситуацию, когда отрезки $I_k = [a_k, b_k] \subset [0, 1]$ задают конечное покрытие I, и подобия L_k переводят I в I_k.

Будем говорить, что функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *обобщенному условию Рида — Байрактаревича*, если для любого $k = 1, ..., m$ справедливо равенство

$$f|_{I_k} = p_k f(L_k^{-1}(x)) + q_k x + r_k.$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть функция $f : I \to \mathbb{R}$ удовлетворяет обобщенному условию Рида — Байрактаревича, а $S = \{L_1, ..., L_m\}$ — соответствующая система сжимающих подобий отрезка I. Если система S не удовлетворяет слабому условию отделимости (WSP), то f — квадратичная функция. Если система S удовлетворяет условию WSP, то f является граф-ориентированной аффинной фрактальной интерполяционной функцией.*

Список литературы

[1] M. F. Barnsley, “ Fractal functions and interpolation”, *Constructive Approximation*, Vol. 2, 303–329 (1986).
[2] A. Deniz, Y. Özdemir, “Graph-Directed Fractal Interpolation Functions”, arXiv:1503.04073 [math.MG].
[3] M. P. W. Zerner, “Weak separation properties for self-similar sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 124, No. 11, 3529–3539 (1996).

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, д. 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия
E-mail address: atet@mail.ru

ОЦЕНКА НЕКОТОРОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

ИРИНА ВЛАДИМИРОВНА ТРУХЛЯЕВА

Рассмотрим следующую полиномиальную характеристику области $\Omega \subset R^n$

$$\lambda_N = \inf_P \frac{\left(\int\limits_\Omega |\nabla P|^2\, dx\right)^{1/2}}{\sqrt{\Omega} \sup\limits_\Omega |\nabla P|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам $P(x_1, \cdots, x_n)$ степени не более чем N по каждой переменной. Отметим, что подобные величины часто встречаются в вопросах сходимости приближенных решений различных краевых задач (см. [2]).

Далее нам понадобится следующее неравенство Маркова (см. [1], ч. 1, гл. VI, §6) для многочлена $Q(x)$ одной переменной степени N на отрезке

$$|Q'(x)| \leq \frac{2N^2}{b-a} \max_{[a,b]} |Q(x)|.$$

Получим оценку для произвольной области Ω. Для любого $z_0 \in \Omega$ найдем максимальный куб $K \subset \Omega$, не обязательно со сторонами, параллельными осям координат, такой что $z_0 \in K$. Пусть $a(z_0)$ сторона этого куба. Положим

$$\Delta(\Omega) = \inf_{z_0 \in \Omega} a(z_0).$$

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *Если для области Ω выполнено $\Delta(\Omega) > 0$, то верно неравенство*

$$\lambda_N \geq \frac{1}{2^{n+1}N^n} \frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2}\sqrt[4]{n^n}} \frac{\Delta^{\frac{n}{2}}(\Omega)}{\sqrt{|\Omega|}}, \tag{1}$$

где ω_n – объем единичного шара.

Отметим, что для области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей величина $\Delta(\Omega) > 0$ и поэтому $\lambda_N = O(\frac{1}{N^n})$ при $N \to \infty$.

Рассмотрим область Ω, ограниченную эллипсоидом, т.е.

$$\Omega = \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} < 1 \right\}, a_1 > a_2 > \ldots > a_n.$$

Несложно показать, что любая точка $z_0 \in \Omega$ попадает в некоторый шар радиуса

$$R = \frac{\prod\limits_{i=2}^n a_i^2}{a_1^{n-1}},$$

лежащий внутри эллипсоида. Поэтому для эллипсоида получаем

$$\Delta(\Omega) \geq \frac{\prod\limits_{i=2}^n a_i^2}{a_1^{n-1}} \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Работа поддержана РФФИ (проект №15-41-02517- р_поволжье_а).

Следовательно,

$$\lambda_N \geq \frac{1}{2^{n+1} N^n \sqrt[n]{n}} \left(\frac{\prod\limits_{i=2}^{n} a_i^2}{a_1^{n-1}} \right)^{\frac{2n+1}{4}}$$

Список литературы

[1] Н. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Гостехиздат, (1949).
[2] С. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*, М.-Л., (1970).

Волгоградский государственный университет, пр. Университетский,100, г. Волгоград, 400062, Россия
E-mail address: irishka2027@mail.ru

ОЦЕНКИ НА МОДУЛИ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ВЕСОВЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ (p,q)-ИСКАЖЕНИЕМ

МАКСИМ ВЛАДИМИРОВИЧ ТРЯМКИН

Понятие модуля семейства кривых на плоскости было введено в 1950 г. Л. Альфорсом и А. Бьерлингом [1], а затем распространено на многомерные пространства Б. Фугледе [2] и Б. В. Шабатом [3]. На языке этого понятия было сформулировано одно из эквивалентных описаний квазиконформных отображений, в связи с чем метод модулей приобрел важное значение в работе с этим классом отображений, позволив найти альтернативный подход к их изучению. Приведем определение. Пусть Γ — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ (под кривой понимается непрерывный образ промежутка вещественной оси). Борелевская функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для Γ, если $\int_\gamma \rho\, ds \geqslant 1$ для каждой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$. Совокупность всех допустимых функций обозначим $\operatorname{adm}\Gamma$. Для локально суммируемой функции $\omega\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, которая почти всюду отлична от нуля, и числа $p \in [1,\infty)$ определим *ω-весовой p-модуль* семейства Γ формулой

$$\operatorname{mod}_p^\omega \Gamma = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p \omega\, dx.$$

При $\omega \equiv 1$ получаем обычное определение p-модуля, и вместо $\operatorname{mod}_p^1 \Gamma$ будем писать $\operatorname{mod}_p \Gamma$.

В 60-е годы прошлого века Ю. Г. Решетняк начал систематическое исследование отображений с ограниченным искажением, представляющих собой неоднолистный аналог квазиконформных отображений (см. [4]). Пусть Ω — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Отображение $f = (f_1, \dots, f_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если для почти всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство $|Df(x)|^n \leqslant KJ(x,f)$, где $K \in [1,\infty)$ — постоянная, $Df(x)$ — матрица Якоби, $|Df(x)|$ и $J(x,f)$ — ее операторная норма и определитель соответственно.

В 1970 г. Е. А. Полецкий [5] применил метод модулей к изучению отображений с ограниченным искажением, установив, что под действием этих отображений модуль образа семейства кривых оценивается сверху через модуль прообраза. Такого рода оценки играют ключевую роль в задачах об устранении особенностей и в других вопросах квазиконформного анализа.

Недавно (см. [6]) С.К. Водопьянов сформулировал естественное обобщение класса отображений, введенных Ю. Г. Решетняком.

Определение. Пусть $\theta, \sigma\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — локально суммируемые функции (называемые *весовыми*) такие, что $\theta > 0$, $\sigma > 0$ почти всюду. Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с (θ,σ)-весовым ограниченным (p,q)-искажением*, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, если:

1) f непрерывно, открыто и дискретно;
2) f принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;
3) якобиан $J(x,f) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$;
4) отображение f имеет конечное искажение:

$$\text{для почти всех } x \in \Omega \text{ из } J(x,f) = 0 \text{ следует } Df(x) = 0;$$

Работа выполнена при частичной поддержке фонда РФФИ (код проекта № 14-01-00552) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (проект НШ-2263.2014.1).

5) функция локального (θ,σ)-весового q-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K_q^{\theta,\sigma}(x,f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df(x)|}{\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f)\neq 0,\\ 0, & \text{если } J(x,f)=0,\end{cases}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\Omega)$, где $\varkappa$ находится из условия $\frac{1}{\varkappa}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ ($\varkappa=\infty$ при $q=p$).

Через $K_{q,p}^{\theta,\sigma}(f;\Omega)$ обозначим величину $\|K_q^{\theta,\sigma}(x,f)\mid L_\varkappa(\Omega)\|$.

В [7] мы устанавливаем модульные неравенства для введенного класса отображений без ряда аналитических требований, характерных для результатов выходивших ранее работ. В частности, мы не предполагаем, что отображение обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина.

Теорема 1. *Пусть $f\colon \Omega\to\mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1<q\leqslant p<\infty$, а весовая функция $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если Γ — семейство кривых в области Ω, то справедливо неравенство*

$$(\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma))^{1/p'} \leqslant K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}(\operatorname{mod}_{q'}^{\omega}\Gamma)^{1/q'},$$

где $p'=\frac{p}{p-(n-1)}$, $q'=\frac{q}{q-(n-1)}$.

Теорема 2. *Пусть $f\colon \Omega\to\mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1<q\leqslant p<\infty$, а весовая функция $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Пусть Γ — семейство кривых в Ω, Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, и m — положительное целое число. Предположим, что выполняется следующее условие: для каждой кривой $\beta\colon I\to\mathbb{R}^n$ в Γ' существуют кривые $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ в Γ такие, что для всех $x\in\Omega$ и $t\in I$ равенство $\alpha_j(t)=x$ справедливо не более чем для $i(x,f)$ значений числа j, где $i(x,f)$ — локальный индекс отображения f в точке x. Тогда*

$$(\operatorname{mod}_{p'}\Gamma')^{1/p'} \leqslant \frac{K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}}{m^{1/p'}}(\operatorname{mod}_{q'}^{\omega}\Gamma)^{1/q'},$$

где $p'=\frac{p}{p-(n-1)}$, $q'=\frac{q}{q-(n-1)}$.

Список литературы

[1] L. Ahlfors, A. Beurling, “Conformal invariants and function-theoretic null-sets”, *Acta Math.*, V. 83, 101–129 (1950).

[2] B. Fuglede, “Extremal length and functional completion”, *Acta Math.*, V. 98, 171–219 (1957).

[3] Б. В. Шабат, *Нелинейные, гиперболические и пространственные задачи теории квазиконформных отображений*, Докторская диссертация, гл. IV, (1961).

[4] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск: Наука, (1982).

[5] Е. А. Полецкий, “Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений”, *Мат. сб.*, Т. 83 (125), № 2, 261–272 (1970).

[6] А. Н. Байкин, С. К. Водопьянов, “Емкостные оценки, теоремы Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным (p,q)-искажением”, *Сиб. матем. журн.*, Т. 56, № 2, 290–321 (2015).

[7] М. В. Трямкин, “Модульные неравенства для отображений с ограниченным весовым (p,q)-искажением”, *Сиб. матем. журн.*, Т. 56, № 5, в печати (2015).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: maxtryamkin@yandex.ru

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ БУТЫЛКИ КЛЕЙНА В E^3

МИРА АРТЕМОВНА ЧЕШКОВА

Впервые уравнение неориентируемой поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В работах [3,4] исследуются бутылка Клейна и плоский лист Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Тогда функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi))), \tag{1}$$

есть 2π-периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v + 2\pi))) \tag{2}$$

есть 2π-антипериодическая не равная нулю.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Рассмотрим замкнутую поверхность K:

$$r(u, v) = (p + cos(u))s(v) + sin(u)l(v), p \neq \mp 1, u = -\pi, .., \pi, v = -\pi, .., \pi. \tag{3}$$

Теорема 1. Поверхность K односторонняя.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую кривую (дезориентирующий контур)

$$r(0, v) = (p + 1)s(v), r_1 = r_u|_{u=0} = l(v), r_2 = r_v|_{u=0} = (p + 1)s'(v).$$

Касательное пространство в точках кривой $S : r(0, v) = (p + 1)s(v)$ примет вид $T_pK = \{l(v), s'(v)\}, p \subset S$. Замечаем, что базисы $\{r_1(v), r_2(v)\} = \{l(v)), s'(v)\}$, $\{r_1(v + 2\pi), r_2(v + 2\pi)\} = \{l(v+2\pi), s'(v+2\pi)\}$ противоположно ориентированы. Поверхность односторонняя.

Нетрудно проверить, что и вдоль замкнутой кривой $S^* : r(\pi, v) = (p-1)s(v)$ локальные базисы также меняют ориентацию.

Теорема 2. Формула (3) определяет модель бутылки Клейна.

Доказательство. Рассмотрим бутылку Клейна как фактор-пространство [5, с.75] $K^* = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \big/ [(-\pi, v) \sim (\pi, v), (-u, -\pi) \sim (u, \pi)]$.

Действительно, $r(-\pi, v) = (p - 1)s(v) = r(\pi, v)$, $r(-u, -\pi) = (p + cos(-u))s(-\pi) + sin(-u)l(-\pi) = (p + cos(-u))s(\pi) - sin(-u)l(\pi) = r(u, \pi)$.

Поверхность Клейна можно получить “склеив” два листа Мебиуса по краю. Так как бутылка Клейна в E^3 имеет самопересечение, то, по крайней мере, один из листов имеет самопересечение.

Рассмотрим кривую $r = r(u_0, v), v = [-2\pi, 2\pi]$ на K и разрежем K вдоль нее.

Получили криволинейный лист Мебиуса $K1$ (криволинейный)

$$r(u, v) = (p + cos(u))s(v) + sin(u)l(v), u = -u_0, .., u_0, v = -\pi, .., \pi. \tag{4}$$

Для листа $K1$ средней линией является линия $S : r = (p + 1)s(v)$, а краем – кривая $r = r(u_0, v), v = [-2\pi, 2\pi]$.

Второй лист $K2$ задается уравнением

(5) $$r(u,v) = (p + cos(u))s(v) + sin(u)l(v), u = u_0, .., 2\pi - u_0, v = -\pi, .., \pi.$$

Для листа $K2$ средней линией является линия $S^* : r(\pi, v) = (p-1)s(v)$. Край листа $K1$ совпадает с краем листа $K2$.

Замечание. Если $p+1 = 0 (p-1 = 0)$, то средняя линия $S : r = (p+1)s(v) (S^* : r(\pi, v) = (p-1)s(v))$ вырождается в точку. Один из листов Мебиуса вырождается в конус, гомеоморфный сфере с дырой. Поверхность (3) в этом случае гомеоморфна сфере с дырой, заклеенной листом Мебиуса. Имеем модель проективной плоскости [5, стр. 25]. Такая модель называется скрещенным колпаком [3, с.304].

Будем исследовать эти поверхности, когда кривая $\rho = \rho(v)$ расположена на торе (обмотка тора).

Рассмотрим тор $r(u,v) = ((2 + cos(u))cos(v), (2 + cos(u))sin(v), sin(u))$. Зададим линию $u = v/2$.

Имеем

(6) $$s(v) = (2cos(v), 2sin(v), 0), l(v) = (cos(v/2)cos(v), cos(v/2)sin(v), sin(v/2)).$$

Построим поверхности $K1, K2$ (рис.1).

Рассмотрим кривую $r = r(\pi/4, v), v = [-2\pi, 2\pi]$ и разрежем K вдоль нее.

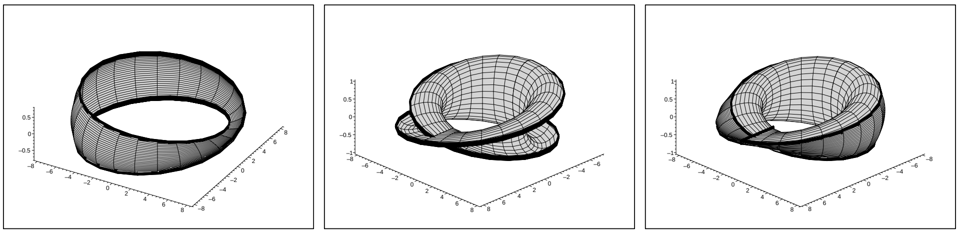

Рис. 1. Листы Мебиуса $K1, K2, p = 3$, склеенные $K1, K2$

Замечаем, что лист $K1$ не имеет самопересечение, $K2$ – лист с самопересечением.
Построим K, когда $p = 1$ (скрещенный колпак) (рис.2).

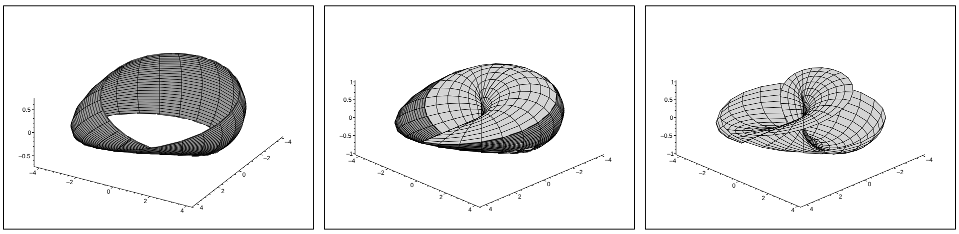

Рис. 2. Лист Мебиуса $K1, p = 1$, $K1$ на K,фрагмент K

Список литературы

[1] H. Mashke, “Note on the unilateral surface of Moebius”, *Trans.Amer.Math.Sos.*, Vol. 1, No. 1, 12–21 (1900).
[2] И.Х. Сабитов, “Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства”, *Известия РАН*, Vol. 71, No. 5, 197–224 (2007).
[3] М.А. Чешкова, “О плоском листе Мебиуса”, *Известия Алтайского университета, Барнаул*, Vol. 77, No. 1/1, 52–57 (2013).
[4] М.А. Чешкова, “О бутылке Клейна”, *Известия Алтайского университета, Барнаул*, Vol. 73, No. 1/1, 130–133 (2012).
[5] Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н., Введение в топологию. М. 1995.

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
E-mail address: cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru

НЕСКОЛЬКО ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

НАДЕЖДА АЛЕКСАНДРОВНА ЧУЕШЕВА

В работе [1] исследуются краевые задачи для уравнения $Au - Bu + Su = f(t,x)$, где $A = A(t, D_t)$ – обыкновенный дифференциальный оператор порядка $l \geq 2$ по переменной t; оператор $B = B(x, D_x)$, порядка 2ν по переменным $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, является равномерно эллиптическим; $S = S(t, x, D_t, D_x)$ – дифференциальный оператор меньшего порядка, чем порядки A и B.

Задача. В области $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ x \in (0, x_0),\ t \in (0, t_0)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{ttt} - u_{tt} - u_t + u_{xxxxxx} - u_{xxxx} + 2u_{xx} - u = f(x,t), \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0,\ t=t_0} = u|_{x=0,\ x=x_0} = u_{xx}|_{x=0,\ x=x_0} = u_{xxxx}|_{x=0,\ x=x_0} = 0. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть правая часть уравнения (1) $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть выполнено неравенство $3 - 2t_0 \geq \delta > 0$. Тогда решение задачи (1), (2), из пространства $H^{3,2}(D)$ существует и единственное.*

Здесь пространство $H^{3,2}(D)-$ является замыканием пространства бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям (2) по норме

$$\|u\|_{H^{3,2}(D)} = \left(\int\limits_D (u^2 + u_x^2 + u_t^2 + u_{xx}^2 + u_{tt}^2 + u_{xxx}^2)\, dD\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пример 1. В области $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ t > 0\}$ рассмотрим уравнение (1) с правой частью $f(x,y) = 0$ и с начальными условиями $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = u_{tt}|_{t=0} = \frac{e^{-x}}{n}$.

Не устойчивым решением этой задачи будет функция $u(x,t) = \frac{e^{t-x}}{n}$.

В этой же области D неустойчивым решением задачи Коши по переменной x

$u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xxx}|_{x=0} = u_{xxxx}|_{x=0} = u_{xxxxx}|_{x=0} = \frac{e^{-t}}{n}$

уравнения (1) будет функция $u(x,t) = \frac{e^{-t+x}}{n}$.

Пример 2. Пусть $t_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Заметим, что уравнение $e^{-x} + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ имеет бесконечно много решений на луче $[0,\ \infty)$. Рассмотрим только два решения этого уравнения 0 и x_0, где $x_0 \in \left(\pi + \frac{\pi}{4},\ \pi + \frac{\pi}{2}\right)$. В области $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ x \in (0, x_0),\ t \in (0, t_0)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{ttt} - u_{tt} + u_t + u_{xxxxxx} - u_{xxxx} - u_{xx} + u = 0, \tag{3}$$

с краевыми условиями $u|_{t=0} = u_t|_{t=0,\ t=t_0} =$

$= u|_{x=0,\ x=x_0} = u_x|_{x=0} = u_{xxxx}|_{x=0,\ x=x_0} = u_{xxxxx}|_{x=0} = 0$. Ненулевым решением поставленной задачи будет функция

$$u(x,t) = \left(e^{-x} + \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})\right) \cdot \left(\sqrt{3} + e^{\frac{t}{2}}(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right) \cdot$$

Пример 3. Уравнениям Кортевега-де-Фриза и Кадомцева-Петвиашвили посвящено много работ. Например, - книга [1].

В статье [6] рассматривается задача Коши для следующего уравнения Кортевега-де-Фриза пятого порядка

$$u_t - u_{xxxxx} + c_1\ (u^3)_x + c_2\ \left((u_x)^2\right)_x + c_3\ (u\ u_{xx})_x = 0$$

в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $u(0,x) = u(x),\ x \in \mathbb{R}$, где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, c_3 \neq 0$. Функция $u(x,t)$ является действительной или комплексной. Доказаны условия корректности задачи.

Можно показать, что решением этого уравнения при:

1) $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ будет вещественная функция:

$$u(x,t) = -\frac{4b^2}{3} \cdot \frac{(65+\sqrt{145})}{3-\sqrt{145}} + \frac{2b^2(25-31\sqrt{145})}{77-3\sqrt{145}} \tanh^2\left(-a - bx + 2b^5(17+\sqrt{145})t\right).$$

2) $c_1 = -1,\ c_2 = c_3 = 1$ будет комплексная функция:

$$f(z) = -\frac{4b^2}{3} \cdot \frac{(55+i\sqrt{95})}{3+i\sqrt{95}} - \frac{2b^2(35+29i\sqrt{95})}{43-3i\sqrt{95}} \tanh^2\left(-a - bx + 2b^5(7+i\sqrt{95})t\right).$$

3) $c_2 = -1,\ c_1 = c_3 = 1$ будет вещественная функция:

$$u(x,t) = 8b^2 - 12b^2 \tanh^2\left(-a - bx + 16b^5 t\right),$$

где постоянные $a, b \in \mathbb{R}$.

Пример 4. В статье [5] изучаются симметрические и точные решения (2+1)-мерного уравнения Кадомцева-Петвиашвили

$$u_{xt} + \frac{3}{2}u_x u_{xx} + \frac{1}{4}u_{xxxx} + \frac{3}{4}u_{yy} = 0.$$

Можно показать, что одним из точных решений этого уравнения будет функция

$$u(x,t,y) = d + 2b\tanh\left(a + bx - \frac{4b^4+3c^2}{4b}t + cy\right),$$

где постоянные $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Замечание. В тезисах доклада [4] на стр.93 в примере 1 две описки:

1. Написано: $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\quad x \in (0,\pi),\quad t \in (0,\frac{1}{2}\}$.

Нужно написать: $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\quad x \in (0,\pi),\quad t \in (0,1\}$.

2. Написано в правой части уравнения (5) $\frac{3}{4}\sin(1-\frac{t}{2})$. Нужно написать:$\frac{3}{4}\sin x\left(1-\frac{t}{2}\right)$.

Список литературы

[1] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков *Интегрируемые системы. I. — Динамические системы — 4*, Итоги науки и техн.(Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления), М.: ВИНИТИ, Т. 4, 179–284. (1985).

[2] А.В. Чуешев, “Об одном нелинейном уравнении смешанного типа нечетного порядка”, *Вестник Новосиб. ун-та, серия "математика, механика, информатика"*, Т. 1, Вып. 1, 107–123 (2001).

[3] Н. А. Чуешева, “Краевые задачи для некоторых уравнений третьего порядка”, *Вестник Кемеровского Государствен-ного университета, серия математика*, No. 3 (7), 193–199 (2001).

[4] Н. А. Чуешева, “Несколько линейных и нелинейных дифференциальных уравнений”, *Дни геометрии в Новосибирске: тез. междунар. конф., Новосибирск, 28-31 августа– Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН.*, No. 3 (7), 93–94 (2013).

[5] Bansal Anupma, “Similarity reductions and new invariant solutions of (2+1)-dimensional potential Kadomstev-Petviashvili equation.”, *Int. J. Nonlinear Sci*, Vol. 16, No. 3, 268–279 (2013).

[6] Kato Takamori, “KWell-posedness for the fifth order KdV equation.”, *Funkc. Ekvacioj=Funct. Equat*, Vol. 55, No. 1, 17–53 (2012).

Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: chuesheva@ngs.ru

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НАД ПРОСТРАНСТВОМ ТЕЙХМЮЛЛЕРА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ТОРОВ

ОЛЬГА АЛЕКСАНДРОВНА ЧУЕШЕВА

Пусть F_0 — фиксированная компактная риманова поверхность рода $g = 1$, с отмечанием $\{a_1, b_1\}$, и попарно различные точки $P_1, \ldots, P_m \in F_0$. Обозначим через $F'_\mu = F_\mu \backslash \{P_1, \ldots, P_m\}$ — поверхность типа $(1, m)$, $m \geq 2$, комплексно аналитическая структура которой задается дифференциалом Бельтрами $\mu(z)d\bar{z}/dz$ (на F_0).

Характером ρ для F'_μ называется любой гомоморфизм

$$\rho : (\pi_1(F'_\mu), \cdot) \to (\mathbf{C}^*, \cdot), \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

$q-$дифференциалом Прима относительно фуксовой группы Γ' для ρ, или $(\rho, q)-$дифференциалом, называется дифференциал $\omega(z)dz^q$ такой, что

$$\omega(Tz)(T'z)^q = \rho(T)\omega(z), z \in U, T \in \Gamma', \rho : \Gamma' \to \mathbf{C}^*, q \in \mathbf{N}.$$

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ пространство мероморфных дифференциалов второго рода для характера ρ с конечным числом полюсов на F'_μ, а через $\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$ — подпространство всех мультипликативно точных дифференциалов Прима для ρ на F'_μ.

Теорема 1. *Векторное расслоение*

$$\bigcup \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга m над базой

$$\mathbf{T}_{1,m} \times Hom(\Gamma', \mathbf{C}^*)\backslash L_1$$

при $m \geq 2$. Причем следующие наборы классов смежности дифференциалов Прима: либо

$$\tau_{P_2 P_1}, \ldots, \tau_{P_m P_1}, \tau_{Q^2 P_1},$$

либо

$$\tau_{\rho;P_1}, \ldots, \tau_{\rho;P_m},$$

задают базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где $Q \in F'_\mu$.

Обозначим через $\Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'_\mu)$ пространство дифференциалов для ρ, кратных дивизору $\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}$ на F'_μ, а через $\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ — его подпространство голоморфных мультипликативно точных дифференциалов для ρ на F'_μ.

Теорема 2. *Векторное расслоение*

$$\bigcup \Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \ldots Q_s}; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1, F'_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $m + s$ над базой

$$\mathbf{T}_{1,m} \times Hom(\Gamma', \mathbf{C}^*)\backslash L_1$$

для попарно различных точек $Q_1, \ldots, Q_s$, $s \geq 1$, на поверхности F'_μ типа $(1, m)$, $m \geq 2$. Причем наборы классов смежности дифференциалов Прима: либо

$$\tau_{\rho;P_2 P_1}, \ldots, \tau_{\rho;P_m P_1}, \tau_{\rho;Q_1 P_1}, \ldots, \tau_{\rho;Q_s P_1}, \tau_{\rho;P_2^2 P_1},$$

либо

$$\tau_{\rho;P_1}, \ldots, \tau_{\rho;P_m}; \tau_{\rho;Q_1}, \ldots, \tau_{\rho;Q_s},$$

задают базисы локально голоморфных сечений этого расслоения.

Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: simran@mail.ru

Автор поддержан грантом правительства РФ, договор N 14.Y26.31.0006.

КАК ПО РАЗВЕРТКЕ ОКТАЭДРА ОПРЕДЕЛИТЬ, ЧТО ЕГО ЭКВАТОР ПЛОСКИЙ

АНТОН ВЯЧЕСЛАВОВИЧ ШЕРСТОБИТОВ

Пусть дана натуральная развертка выпуклого октаэдра $ABCDEF$, у которого вершины A и C, B и D, E и F являются противоположными (не смежными). Через K, L, M, N и K', L', M', N' обозначим основания перпендикуляров на стороны AB, BC, CD, AD из вершин E и F соответственно. Введем следующие обозначения: $AK = a_1$, $BK = b_2$, $BL = b_1$, $CL = c_2$, $CM = c_1$, $DM = d_2$, $DN = d_1$, $AN = a_2$, $AK' = a_1'$, $BK' = b_2'$, $BL' = b_1'$, $CL' = c_2'$, $CM' = c_1'$, $DM' = d_2'$, $DN' = d_1'$, $AN' = a_2'$. Число a_1 будем считать больше или равно нулю, если точка K лежит на луче AB, в противном случае число a_1 будет отрицательным. Аналогично определим знаки остальных чисел.

Теорема. *Дана натуральная развертка выпуклого октаэдра $ABCDEF$, у которого вершины A и C, B и D, E и F являются противоположными. Тогда по нижеприведенному алгоритму, можно установить, будут ли вершины A, B, C, D после склеивания развертки лежать в одной плоскости.*

1. Проверяем истинность условий:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 \tag{1}$$

$$a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2 + d_1'^2 = a_2'^2 + b_2'^2 + c_2'^2 + d_2'^2 \tag{2}$$

Если хотя бы одно из них будет неверным, то вершины A, B, C, D не будут лежать в одной плоскости. Положим, что условия 1, 2 выполняются.

2. Если

$$AB = CD \quad \text{и} \quad BC = AD \tag{3}$$

то вершины A, B, C, D октаэдра будут лежать в одной плоскости в том и только в том случае, если:

$$d_1 - c_2 = d_1' - c_2' \tag{4}$$

3. Если

$$AB \neq CD \quad \text{или} \quad BC \neq AD \tag{5}$$

то рассмотрим четыре системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1^2 - 2b_1y - y^2 = b_2^2 - 2a_2x - x^2 \\ a_1'^2 - 2b_1'y - y^2 = b_2'^2 - 2a_2'x - x^2 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} b_1^2 - 2c_1y - y^2 = c_2^2 - 2b_2x - x^2 \\ b_1'^2 - 2c_1'y - y^2 = c_2'^2 - 2b_2'x - x^2 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} c_1^2 - 2d_1 y - y^2 = d_2^2 - 2c_2 x - x^2 \\ c_1'^2 - 2d_1' y - y^2 = d_2'^2 - 2c_2' x - x^2 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} d_1^2 - 2a_1 y - y^2 = a_2^2 - 2d_2 x - x^2 \\ d_1'^2 - 2a_1' y - y^2 = a_2'^2 - 2d_2' x - x^2 \end{cases} \tag{9}$$

Чтобы четырехугольник $ABCD$ был плоским необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из этих систем имела корни x и y в положительных числах такие, чтобы:

$$\begin{array}{llll} x < y + AB, & y < x + AB, & AB < x + y & \text{для системы 6} \\ x < y + BC, & y < x + BC, & BC < x + y & \text{для системы 7} \\ x < y + CD, & y < x + CD, & CD < x + y & \text{для системы 8} \\ x < y + AD, & y < x + AD, & AD < x + y & \text{для системы 9} \end{array}$$

Список литературы

[1] А.Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, М-Л., (1950).
[2] Н.А. Глаголев, *Проективная геометрия*, М., (1963).

Областная специализированная школа-лицей для детей, одаренных в области математики, физики и информатики, Усть-Каменогорск, 019, Казахстан
E-mail address: sherstobitov_a55@mail.ru

INJECTIVE MAPPINGS TRANSFORMING SPHERES TO QUASISPHERES

VLADISLAV VASILJEVICH ASEEV

In 1937, Caratheodory proved the following theorem ([1], Theorem 2, Remark):

Suppose that some locally injective mapping $f : G \to f(G) \subset \bar{\mathbf{C}}$ *is defined in a domain* $G \subset \bar{\mathbf{C}}$. *For the mapping* f *to be Möbius, it is necessary and sufficient that every point* $z_0 \in G$ *have an open neighborhood* $U(z_0) \subset G$ *such that, for every generalized circle* $S \subset U(z_0)$*, its image* $f(S)$ *is also a generalized circle.* (This theorem does not require the continuity of f.)

In 2014 I proved in [2] the quasiconformal analog of the Caratheodory's theorem: *a local injective mapping of plane domain which transforms circles to quasicircles must be quasiconformal*, and the upper estimate for it's coefficient of quasiconformality has been obtained. Now the similar situation in the space $\bar{R}^n$ has been investigated, and the following result has been obtained:

Theorem. *Let an injective mapping* $f : D \to \bar{R}^n$ *of a domain* $D \subset \bar{R}^n$ *has the following property: the umage of each sphere in* D *is a* K*-quasisphere (that is the image of a unite sphere under a* K*-quasiconformal automorphism of* $\bar{R}^n$*). Then* f *is continuous in* D *and quasiconformal with upper bound for it's outer coefficient of quasiconformality* $K_O[f]$ *depending only on* n *and* K*:*

$$K_O[f] \le 2^n \exp\left(n \left(\frac{K\omega_{n-1}}{\Psi_n(1)} \right)^{1/(n-1)} \right) .$$

Here ω_{n-1} is $(n-1)$-volume of the unite sphere in R^n, and $\Psi_n(1)$ is conformal capacity of Teichmüller extremal ring in R^n with parameter 1.

References

[1] C. Caratheodory, "The most general transformation of plane regions which transform circles into circles", *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, Vol. 43, 537–579 (1937).

[2] V. V. Aseev, "A quasiconformal analog of Caratheodory's criterion for the Möbius property of mappings", *Siberian Math. Journal*, Vol. 55, No. 1, 1–6 (2014).

Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyuga pr., 4, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: btp@math.nsc.ru

UNIQUE DETERMINATION OF THREE-DIMENSIONAL CONVEX POLYHEDRAL DOMAINS BY RELATIVE CONFORMAL MODULI OF BOUNDARY CONDENSERS

VLADISLAV V. ASEEV, ANATOLY P. KOPYLOV

Let $U \subset \mathbb{R}^n$ ($U \neq \mathbb{R}^n$) be a domain in space $\mathbb{R}^n$ with $n \geq 3$ whose boundary ∂U is a Lipschitz manifold of dimension $n-1$ without boundary. A boundary condenser $F = \{F_1, F_2\}$ of U is a pair of closed subsets F_1 and F_2 of the boundary ∂U of this domain such that at least one of them is bounded and $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. The relative conformal modulus $M^U(F)$ of such a condenser F is, by definition, the n-modulus

$$M_n(\Gamma_{F_1,F_2,U}) = \inf_{\rho \in \mathcal{R}(\Gamma_{F_1,F_2,U})} \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\rho(x)]^n dx$$

of the family $\Gamma_{F_1,F_2,U}$ of all continuous paths $\gamma : [0,1] \to \operatorname{cl} U$, where $\operatorname{cl} U$ is the closure of U, such that $\gamma(0) \in F_1$, $\gamma(1) \in F_2$, and $\gamma(t) \in U$ for $0 < t < 1$; $\mathcal{R}(\Gamma_{F_1,F_2,U})$ denotes the set of all nonnegative Borel measurable functions $\rho : \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$, where $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \,]-\infty, \infty[$ is the two-point compactification of the real line $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, satisfying the condition $\int_\gamma \rho ds \geq 1$ for each rectifiable path $\gamma \in \Gamma_{F_1,F_2,U}$. Suppose that $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(n)$ is a subclass of the class $\mathcal{L} = \mathcal{L}(n)$ of all domains U in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$, $U \neq \mathbb{R}^n$) such that their boundaries are Lipschitz $(n-1)$-manifolds without boundary. A domain $U \in \mathcal{L}_0$ is said to be uniquely determined by the relative conformal moduli of its boundary condensers in the class $\mathcal{L}_0$ if the following condition holds. Suppose that $V \in \mathcal{L}_0$ and there exists a homeomorphism $f : \partial V \to \partial U$ between the boundaries ∂V and ∂U which preserves the relative conformal moduli of boundary condensers, i.e., such that $M^V(F) = M^U(f(F))$ ($f(F) = \{f(F_1), f(F_2)\}$) for each boundary condenser F of V. Then the domain V can be conformally mapped onto the domain U. The main our result is the following assertion.

Theorem. *Any bounded convex polyhedral domain U in three-dimensional real Euclidean space $\mathbb{R}^3$ (i.e., any nonempty bounded finite intersection of open three-dimensional half-spaces) is uniquely determined by the relative conformal moduli of its boundary condensers in the class $\mathcal{P}$ of all bounded convex polyhedral domains $V \subset \mathbb{R}^3$. Moreover, the domain U is determined in the class $\mathcal{P}$ uniquely up to a similarity transformation $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.*

A result similar to this theorem (see [1]-[2]) was earlier obtained for bounded convex polyhedral domains in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ for $n \geq 4$. The special case $n = 3$ was announced in [3] and its complete proof was obtained in a joint work by V. V. Aseev and A. P. Kopylov (submitted).

In conclusion, note that in the case $n \geq 4$, one of the most important points is proving the following two propositions: (i) if $f : \partial V \to \partial U$ is a homeomorphism between the boundaries of domains V and U preserving the relative conformal moduli of boundary condensers, then each $(n-1)$-face s of the boundary ∂V of V has an open (in this face) connected subset σ such that $f(\sigma)$ is an open subset of some $(n-1)$-face of the boundary ∂U of the domain U; moreover, the restriction $f|_\sigma$ is an $(n-1)$-dimensional conformal mapping; (ii) the equality $\sigma = \operatorname{Int} s$ holds. In this part of the proof of our theorem (in the case $n \geq 4$), the most important role is played by the property of spatial conformal mappings that each conformal mapping $g : \lambda \to \mathbb{R}^m$ of

This work was partially supported by the Interdisciplinary Project of the Siberian and Far-Eastern Divisions of the Russian Academy of Sciences (2012-2014 no. 56), the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools of the Russian Federation (Grant NSh-921.2012.1), and the Exchange Program between the Russian and Polish Academies of Sciences (Project 2014-2016).

a domain λ in Euclidean m-space $\mathbb{R}^m$, where $m \geq 3$, is the restriction $G|_\lambda$ of some Möbius transformation $G : \bar{\mathbb{R}}^m \to \bar{\mathbb{R}}^m$. In the case of $m = 2$ $(n = 3)$, in a similar situation, we must use properties of plane conformal mappings, which differ fundamentally from those of spatial transformations.

References

[1] A. P. Kopylov, Unique Determination of Convex Polyhedral Domains by Relative Conformal Moduli of Boundary Condensers, *Doklady Mathematics*, Vol. 74, No. 2, 637–639 (2006).

[2] A. P. Kopylov, On the unique determination of domains in Euclidean spaces, *J. of Math. Sciences (NY)*, Vol. 153, No. 6, 869–898 (2008).

[3] A. P. Kopylov, Unique Determination of Convex Polyhedral Domains in Three-Dimensional Euclidean Space by Relative Conformal Moduli of Boundary Condensers, *Doklady Mathematics*, Vol. 84, No. 3, 789–790 (2011).

Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyuga pr. 4, and Novosibirsk State University, Pirogova str. 2, 630090, Novosibirsk, Russia

E-mail address: `btp@math.nsc.ru, apkopylov@yahoo.com`

INCIDENCE AXIOMS FOR THE BOUNDARY AT INFINITY OF COMPLEX HYPERBOLIC SPACES

SERGEI BUYALO, VIKTOR SCHROEDER

We characterize the boundary at infinity of a complex hyperbolic space $\mathbb{C}\,\mathrm{H}^k$, $k \geq 1$, as a compact Ptolemy space that satisfies four incidence axioms.

POMI RAS, Fontanka 27, St. Petersburg, 191023, Russia
E-mail address: sbuyalo@pdmi.ras.ru

Supported by RFFI Grant 14-01-00062 and SNF Grant.

HOMOGENEITY OF LORENTZIAN THREE-MANIFOLDS WITH RECCURENT CURVATURE

E. GARCÍA-RÍO, P. GILKEY, S. NIKČEVIĆ

k-Curvature homogeneous three-dimensional Walker metrics are described for $k \leq 2$. This allows a complete description of locally homogeneous three-dimensional Walker metrics, showing that there exists exactly three isometry classes of such manifolds. As an application one obtains a complete description of all locally homogeneous Lorentzian manifolds with recurrent curvature. Moreover, potential functions are constructed in all the locally homogeneous manifolds resulting in steady gradient Ricci and Cotton solitons.

University of Belgrade, Vojvode Stepe 450, 11000 Belgrade, Serbia
E-mail address: stanan@mi.sanu.ac.rs

GEOMETRY AND COMBINATORICS OF PHASE PORTRAITS OF GENE NETWORKS MODELS

VLADIMIR GOLUBYATNIKOV, ANTON KALENYKH, AND MAXIM KAZANTSEV

We study n-dimensional nonlinear dynamical systems

$$\dot{x_1} = f_1(x_n) - x_1, \qquad \dot{x_j} = f_j(x_{j-1}) - x_j, \qquad j = 2 \dots n, \qquad x_j \geq 0 \tag{1}$$

as models of gene networks functioning. Here, the functions f_j are non-negative and smooth or piecewise constant for all values of j. We assume that some of them are monotonically non-increasing (L-functions) and the others are monotonically non-decreasing (Γ-functions). This corresponds to negative, respectively, to positive feedbacks in gene networks. Let x^0 be an equilibrium point of the system (1) contained in an invariant parallelepiped Q^n. We decompose Q^n by hyperplanes $\{x_j = x_j^0\}$. The constructed smaller 2^n parallelepipeds (blocks) $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ of this decomposition are enumerated by boolean indices:

$$\varepsilon_j = 0 \quad \text{if} \quad 0 \leq x_j \leq x_j^0; \quad \varepsilon_j = 1 \quad \text{if} \quad x_j^0 < x_j.$$

Let G_n be the oriented graph (*domain graph*) such that its vertices correspond to the blocks of this decomposition of Q^n, and directions of arcs correspond to directions of trajectories of the system (1), cf. [1]. We call the amount of outgoing arcs of a vertex of G_n its *potential.* We also call a union of all vertices with the same potential a *potential level.* We assume that potential of a potential level equals to the potential of any of its vertices.

In the case of piecewise constant functions f_j, these trajectories are piecewise linear and their angle points are located on common faces of adjacent blocks of the decomposition. Each of these faces corresponds to some arc of the graph G_n.

For the system (1), we define *characteristic vector* Ψ of length n. Its j-th coordinate Ψ_j equals 1 if f_j is a Γ-function and $\Psi_j = 0$ if f_j is an L-function. Given n, there are 2^n systems with different characteristic vectors.

We call the system (1) *even* if $\sum \Psi_j = 0 \pmod 2$ and *odd* if $\sum \Psi_j = 1 \pmod 2$.

We define inversion operator $Inv_j : \Psi \to \Phi$ as follows:

$$\Phi_i = \Psi_i | i \notin \{j-1, j\}, \qquad \Phi_i = \Psi_i \oplus 1 | i \in \{j-1, j\}$$

We denote here by $\oplus$ addition (mod 2), ans assume that $\Psi_0 = \Psi_n, \Psi_{n+1} = \Psi_1$ etc.

Operators Inv_j obviously preserve parity of system for any j. Moreover, each characteristic vector can be transformed to any of the characteristic vectors with same parity by a sequence of operators Inv_j with different j's.

Lemma 1. *A loop in G_n exists on its every potential level except n and 0.*

Lemma 2. *Domain graphs of systems with characteristic vectors Ψ and $Inv_j(\Psi)$ are isomorphic for any j.*

Theorem 1. *Domain graphs of all dynamical systems of same dimension and same parity are isomorphic to each other.*

Let now $n = 4$, and let the functions f_j be piecewise constant: $f_1(w) = L_1(w) = A_1$ for $w \in [0,1]$; $f_1(w) = L_1(w) = 0$ for $w > 1$; $f_j(w) = \Gamma_j(w) = 0$ for $w \in [0,1]$, $f_j(w) = \Gamma_j(w) = A_j$ for $w > 1$; $j = 2, 3, 4$.

Here the cube Q^4 is decomposed as above by hyperplanes $x_j = 1$ containing the point $E_4 = (1,1,1,1)$ where all the functions f_j have discontinuities. Some low-dimensional dynamical systems of similar types were studied in [2, 3, 4], where some cycles in the phase portraits were

The work was supported by RFBR, grant 15-01-00745.

described. In order to simplify calculations, we restrict ourselves here to the symmetric case: $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A = \text{const} > 2$. So, we get dynamical system

$$\dot{x_1} = L(x_4) - x_1; \quad \dot{x_2} = \Gamma(x_1) - x_2; \quad \dot{x_3} = \Gamma(x_2) - x_3; \quad \dot{x_4} = \Gamma(x_3) - x_4. \tag{2}$$

Consider subgraph of G_4 represented by the *state transition diagram*

$$\begin{array}{ccccccc} \{1,1,0,1\} & \longrightarrow & \{0,1,0,1\} & \longrightarrow & \{0,1,0,0\} & \longrightarrow & \{0,1,1,0\} \\ \Big\uparrow & & & & & & \Big\downarrow \\ \{1,0,0,1\} & \longleftarrow & \{1,0,1,1\} & \longleftarrow & \{1,0,1,0\} & \longleftarrow & \{0,0,1,0\} \end{array} \tag{3}$$

It was shown in [5] that for sufficiently large values of A the union U_8 of 8 blocks which are not listed in (3) contains a stable cycle $\mathcal{C}_4$. Actually, this result was obtained for arbitrary n in the "asymmetric" case with different functions Γ_j (sufficiently large parameters A_j).

Theorem 2. *i) The domain $Q^4 \setminus U_8$ contains a unique invariant surface M^2 of the system* (2) *composed by* 8 *planar domains with common vertex E_4.*

ii) Each of these planar domains is contained in corresponding block of the diagram (3).

iii) All trajectories on this surface are attracted by the point E_4, pass from block to block according to (3), *and never enter the domain U_8.*

Remark. *The surface M^2 and the cycle $\mathcal{C}_4$ have non-trivial linking in Q^4.*

References

[1] Akinshin A. A., Golubyanikov V. P. On cycles in symmetric dynamical systems // Bull. NSU. 2012. V. 12. N. 2, p. 3–12.

[2] Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P. On the uniqueness of a cycle in an asymmetric three-dimensional model of a melecular repressilator // Journal of Industrial and Applied mathematics. 2014, v. 8, N 2, p. 1–6.

[3] Gaidov Yu. A., Golubyatnikov V. P. On cycles and other geometric phenomena in phase portraits of some nonlinear dynamical systems. In: "Geometry and applications". Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, v. 72. Springer NY, 2014, p. 225–233.

[4] Volokitin E. P., Gil'derman Yu. I. The realization of flows by continuous piecewise-affine systems // (Russian) Diff. Uravneniya (1982). v. 18, N 6, p. 934-938.

[5] Glass L., Pasternack J. S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // Journal of Math. Biology. 1978. v. 6, p. 207–223.

Sobolev Institute of Mathematics, Koptyug av., 4, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: glbtn@math.nsc.ru

Novosibirsk state university, Pirogova st., 2, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: kalenuxanton@mail.ru

Altai state technical university, Lenin av., 46, Barnaul, 656038, Russia
E-mail address: markynaz.astu@gmail.com

COMPOSITION OPERATORS ON WEIGHTED SOBOLEV SPACES ON A CARNOT GROUP

NIKITA EVSEEV

We study measurable mappings $\varphi : D \to D'$ inducing a bounded composition operator on weighted Sobolev spaces on Carnot groups:

$$\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_q(D, u), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D').$$

An analytical description of these mappings is given in terms of integrability of weighted distortion function. For the special cases we prove that mapping which generates a bounded composition operator is partially absolutely continuous on almost all horizontal lines.

The research is based mostly on the framework developed in [1, 2, 3, 4], see the history of the subject and bibliography therein. A slightly more detailed presentation will appear in [5].

A Carnot group $\mathbb{G}$ is a connected, simply connected stratified nilpotent Lie group. This means that the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the group $\mathbb{G}$ admits a nilpotent stratification: $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, and $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ for $j = 1, \dots, m-1$, whereas $[V_1, V_m] = \{0\}$.
By $X_1, \dots, X_{n_1}$ denote orthonormal basis of the horizontal subspace V_1.

Let D be an open subset of $\mathbb{G}$ and let $w : \mathbb{G} \to [0, \infty)$ be a locally summable nonnegative function (*weight*). Weighted Sobolev space $L^1_p(D, w)$, $1 < p < \infty$, is a space of locally integrable, weakly differentiable functions $f : D \to \mathbb{R}$, equipped with the following seminorm:

$$\|f \mid L^1_p(D, w)\| = \Big(\int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} f|^p(x) w(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

where $\nabla_{\mathcal{L}} f(x) = (X_1 f(x), \dots, X_n f(x))$ is *weak horizontal gradient*.

Let D and D' are domains in $\mathbb{G}$. A mapping $\varphi : D \to D'$ *induces a bounded composition operator* $\varphi^* : C_0^\infty(D') \cap L^1_p(D', v) \to L^1_q(D, u)$ if $f \circ \varphi \in L^1_q(D, u)$ and

$$\|\varphi^* f \mid L^1_q(D, u)\| \leq K \|f \mid L^1_p(D', v)\|$$

for any $f \in C_0^\infty(D') \cap L^1_p(D', v)$, a constant K does not depend on f.

Banach indicatrix $N(y, \varphi) = \#\{x \in D \mid \varphi(x) = y\}$ is the number of pre-images of $y \in D'$.

The basic notions of our work are following.
Definition 1. *A mapping $\varphi : D \to D'$ is said to be partially absolutely continuous on lines ($\varphi \in ACL_{\text{part}}(D)$), if for almost all integral curves γ of horizontal vector field X_j ($j = 1, \dots, n$) there is an open subset $\omega_\gamma \subset \gamma$ of full measure such that for any segment $[\alpha, \beta] \subset \omega_\gamma$ the mapping φ is absolutely continuous on $[\alpha, \beta]$.*
Definition 2. *A mapping φ has a finite (u, v)-weighted distortion if its horizontal differential $D_h\varphi(x) = 0$ almost everywhere on the set $Z_v = \{x \in D | J(x, \varphi) v(\varphi(x)) = 0\}$.*
Definition 3. *A* weighted distortion function *for mapping φ is defined as follows*

$$D' \ni y \mapsto H^{u,v}_q(y) = \begin{cases} v^{-\frac{1}{p}}(y) \Bigg(\sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v)} \frac{|D\varphi|^q(x) u(x)}{|J(x, \varphi)|} \Bigg)^{\frac{1}{q}}, \\ 0, \quad \textit{if } \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v) = \emptyset. \end{cases}$$

Below we formulate the main results of the work.

This research was partially supported by Grant of the Russian Federation for the State Support of Researches (Agreement No 14.B25.31.0029).

Theorem 1. *Let $N(y,\varphi)v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $u^{\frac{1}{1-p}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $1 \le p < \infty$. If measurable mapping $\varphi : D \to D'$ induces a bounded composition operator on weighted Sobolev spaces $\varphi^* : L^1_p(D',v) \cap C^\infty_0(D') \to L^1_p(D,u)$. Then the mapping φ has the following properties:*
1) *is of the class $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,*
2) *has a finite (u,v)-weighted distortion,*
3) *the distortion function $H^{u,v}_p(\cdot) \in L_\infty(D')$.*
Moreover $\|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\infty(D')\| \le C\|\varphi^*\|$.

Theorem 2. *Let $1 \le q \le p < \infty$. If a mapping $\varphi : D \to D'$ has the following properties:*
1) *is of the class $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,*
2) *has a finite (u,v)-weighted distortion,*
3) *the distortion function $H^{u,v}_p(\cdot) \in L_\infty(D')$.*
Then the mapping φ induces a bounded composition operator on weighted Sobolev spaces $\varphi^* : L^1_p(D',v) \cap C^\infty_0(D') \to L^1_q(D,u)$.
Moreover $\|\varphi^*\| \le \|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\kappa(D')\|$, where $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

In the case $q = p = \nu$ and $v \circ \varphi \le u$ necessary conditions are also sufficient:

Theorem 3. *Let $v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $u^{\frac{1}{1-p}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ and $v \circ \varphi \le u$ a. e. on D. A measurable mapping $\varphi : D \to D'$ induces a bounded composition operator on weighted Sobolev spaces $\varphi^* : L^1_p(D',v) \cap C^\infty_0(D') \to L^1_p(D,u)$ if and only if the mapping φ has the following properties:*
1) *is of the class $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,*
2) *has a finite (u,v)-weighted distortion,*
3) *the distortion function $H^{u,v}_p(\cdot) \in L_\infty(D')$.*
Moreover
$$C\|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\infty(D')\| \le \|\varphi^*\| \le \|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\infty(D')\|.$$

References

[1] S. K. Vodopyanov, A. D. Ukhlov, "Superposition operators in Sobolev spaces", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, Vol. 46, No. 10, 9–31 (2002).

[2] S. K. Vodopyanov, A. D. Ukhlov, "Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev Spaces. I", *Siberian Adv. Math.*, Vol. 14, No. 4, 78–125 (2004).

[3] A. Ukhlov, S. K. Vodopyanov, "Mappings Associated with Weighted Sobolev Spaces", *Contemporary Mathematics*, Vol. 455, 369–382 (2008).

[4] S. K. Vodopyanov, N. A. Evseev, "Isomorphisms of Sobolev spaces on Carnot groups and metric properties of mappings", *Dokl. Math.*, Vol. 464, No. 2, (2015) (to appear).

[5] N. A. Evseev, "Composition operators on weighted Sobolev spaces on a Carnot group", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, (to appear).

Novosibirsk State University, Pirogova str., 2, Novosibirsk, 630090 Russia
E-mail address: nikita@phys.nsu.ru

SOME REMARKS TO THE CLASS OF HQC DIFFEOMORPHISMS OF THE UNIT DISK

MILJAN KNEŽEVIĆ

We analyze the properties of harmonic quasiconformal mappings and by comparing some suitably chosen conformal metrics defined in the unit disc we obtain some geometrically motivated inequalities for those mappings (see for instance [1, 2, 3, 4]). In particular, we obtain the answers to many questions concerning these classes of functions which are related to the determination of different properties that are of essential importance for validity of the results such as those that generalize famous inequalities of the Schwarz-Pick type. The approach used is geometrical in nature, via analyzing the properties of the Gaussian curvature of the conformal metrics we are dealing with. As a consequence of this approach we give a note to the co-Lipschicity of harmonic quasiconformal self mappings of the unit disc at the origin.

Theorem. *Let f be a harmonic k-quasiconformal mapping of the unit disc $\mathbb{D}$ onto itself and let $f(0) = 0$. Then, for all $z \in \mathbb{D}$ we have*

$$\frac{1}{K}|z| \leqslant |f(z)| \leqslant K|z|,$$

where $K = \dfrac{1+k}{1-k}$.

In [2] we obtained a result, similar to the result stated in the previous theorem, for the class of k-quasiconformal hyperbolic harmonic self diffeomorphisms of the unit disc $\mathbb{D}$, which fix the point $z = 0$. In particular, for a mapping f that belongs to such a class we get $2|z|/(K+1) \leqslant |f(z)| \leqslant \sqrt{K}\,|z|$, for all $z \in \mathbb{D}$, where $K = (1+k)/(1-k)$.

References

[1] M. Knežević, Some Properties of Harmonic Quasi-Conformal Mappings, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (LTAPH) 36 (2013) 531–539.

[2] M. Knežević, On the Theorem of Wan for K-Quasiconformal Hyperbolic Harmonic Self Mappings of the Unit Disk, Matehematica Moravica, Vol 19.1 (2015) 81–85.

[3] M. Knežević, M. Mateljević, On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings, Journal Math. Anal. Appl. 334/1 (2007) 404–413.

[4] M. Knežević, A Note on Harmonic Quasiconformal Diffeomorphisms of the Unit Disc, Filomat 29/2 (2015) 335–341.

[5] M. Mateljević, V. Božin, M. Knežević, Quasiconformality of Harmonic mappings between Jordan domains, Filomat 24:3 (2010) 111–124.

University of Belgrade, Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Serbia
E-mail address: kmiljan@matf.bg.ac.rs

AFFINOR METRIC STRUCTURES AND CHARACTERISTIC VECTOR FIELDS

EVGENIY KORNEV

An affinor metric structure is generalization of an almost contact metric Structure for arbitrary regular 1-form on arbitrary manyfold of any dimension. An afinor metric structure on n-dimensional manyfold M is the triple (α, Φ, β). Where α is a regular 1-form on M having nontrivial radical R, Φ is continuous field of tangent spaces endomorphisms called the *Affinor*, and β is so called *Radical Metric*. The radical of 1-form α is the radical of its exterior derivation $d\alpha$ as 2-form, i. e. $R = \{X \in C^\infty(TM) : d\alpha(X, .) = 0\}$. If we chose the complementary D of radical R then affinor Φ have a properties: $\Phi|_R \equiv 0$, Φ restricted to D is complex structure on D preserving the closed 2-form $d\alpha$. The Radical Metric β is symmetric 2-form on M so that $\mathrm{rad}\beta = D$ and β restricted to $R = \mathrm{rad}\alpha$ is nondegenerated positive-defined 2-form. This structure allow us to constract the Riemannian metric $g_\Phi : g_\Phi(X, Y) = d\alpha(X, \Phi Y) + \beta(X, Y)$ for any vector fields X, Y on M. By Riesz theorem on M exists the unique vector field $\xi : \alpha(X) = g_\Phi(\xi, X)$ for any vector field X on M. This vector field is called *Characteristic Vector Field*. When characteristic vector field ξ is a Killing vector field on M the affinor metric structure is called *K-affinor*. When characteristic vector field ξ belongs to $\mathrm{rad}\alpha$ the affinor metric structure is called *Strictly*. Also, an important class of affinor metric structures are an affinor metric structures with characteristic vector field of constant length. There we provide some results and theorem for K-affinor metric structures, strictly affinor metric structures, and affinor metric structures with characteristic vector field of constant length those have been accomplished in [1]. In particular, we show a relationship between these classes of affinor metric structures, provide the generalizations of some well-known results for contact metric structures, and provide the generalized properties of affinor metric g_Φ sectional and Ricci curvatures along the directions containing characteristic vector field. In contact case, the complement distribution D coincides with $\ker\alpha$. But for 1-forms having a radical dimension ≥ 2 the distribution D may as belong, as not belong to $\ker\alpha$. However, a Characteristic Vector Field is always orthogonal to $\ker\alpha$ with respect to affinor metric g_Φ. Thus, the complement distribution D can be the integrable distribution that induces a almost Kähler submanyfold in M, where almost Kähler structure is restriction of g_Φ, Φ, $d\alpha$ to this submanyfold. We note that standart contact metric structures can't generate such almost Kähler submanyfolds. We proved that strictly affinor metric structure (when characteristic vector field $\xi \in \mathrm{rad}\alpha$) can't generate an almost Kähler submanyfold.

References

[1] E. S. Kornev, "Affinor structures on vector bundles", *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 55, No. 6, 1045-1055 (2014).

Kemerovo State University, Krasnaya street, 6, Kemerovo, 650043, Russia
E-mail address: q148@mail.ru

This work supported by grant RFBR 12-01-00873-a, and president grant for scientific schools support SS-4382.2014.1.

ON GROUPS G_n^k AND THEIR APPLICATIONS TO GEOMETRY, TOPOLOGY AND DYNAMICAL SYSTEMS

VASSILY OLEGOVICH MANTUROV

Classical knot theory deals with *diagrams* and *invariants.* By means of horizontal *trisecants*, we construct a new theory of classical braids with invariants valued in *pictures.*

The key idea in the simplest case is to consider braids as motions of points on the plane and mark those moments where three points are collinear by a generator.

These pictures are closely related to diagrams of the initial object. The main tool is the notion of *free k-braid group* G_n^k (the above mentioned case corresponds to $k=3$). In the simplest case $k=2$, for free 2-braids, the word problem and the conjugacy problem can be solved by finding the minimal representative, which can be thought of as a graph, and is unique, as such.

In general, provided that for some topological objects (considered up to isotopy, homotopy etc) some easy axioms (coming from some dimensional constraints) hold, one can construct similar dynamical systems and picture-valued invariants. These easy axioms correspond to some *codimension*-1 *conditions*, which lead to generators.

For two integers $n>k$, we define the group G_n^k as the group having the following $\binom{n}{k}$ generators a_m, where m runs the set of all unordered k-tuples $m_1,\dots,m_k$, whereas all m_i are pairwise distinct numbers from $\{1,\dots,n\}$.

For each $(k+1)$-tuple U of indices $u_1,\dots,u_{k+1}\in\{1,\dots,n\}$,consider the $k+1$ sets $m^j=U\backslash\{u_j\}, j=1,\dots,k+1$. With U, we associate the relation

$$a_{m^1}\cdot a_{m^2}\cdots a_{m^{k+1}}=a_{m^{k+1}}\cdots a_{m^2}\cdot a_{m^1}; \tag{1}$$

for two tuples U and $\bar{U}$, which differ by order reversal, we get the same relation.

Thus, we totally have $\frac{(k+1)!\binom{n}{k+1}}{2}$ relations.

We shall call them the *tetrahedron relations.*

For k-tuples m,m' with $\mathrm{Card}(m\cap m')<k-1$, consider the *far commutativity relation:*

$$a_m a_{m'}=a_{m'}a_m \tag{2}$$

Note that the far commutativity relation can occur only if $n>k+1$.

Besides that, for all multiindices m, we write down the following relation:

$$a_m^2=1 \tag{3}$$

Define G_n^k as the quotient group of the free group generated by all a_m for all multiindices m by relations (1), (2) and (3).

We prove a general theorem about invariants of dynamical systems which are valued in such groups and hence, in pictures. We describe various applications of the above theory: braids, knots, groups, graphs, weavings (collections of skew lines in $\mathbb{R}^3$), and many other objects in geometry and topology.

References

[1] V.O.Manturov, “Non-Reidemeister Knot Theory and Its Applications in Dynamical Systems, Geometry, and Topology”, *http://arxiv.org/abs/1501.05208* (2015)

Bauman Moscow State Technical University, ul. Baumanskaya 2-ya, 5, Moscow,105005, Russia, and Laboratory of Quantum Topology of the Chelyabinsk State University,Br. Kashirinykh str., 129, room 419, 430, 454001, Chelyabinsk, Russia

E-mail address: vomanturov@yandex.ru

The present work is supported by the Laboratory of Quantum Topology of the Chelyabinsk State University (Russian Govenrment Grant No, 14.Z50.31.0020) and by RFBR grants 13-01-00830, 14-01-91161, 14-01-31288.

VERSIONS OF KELLOGG — WARSCHAWSKI THEOREM FOR HARMONIC MAPS-INVERTIBLE HARMONIC MAPPINGS

MIODRAG MATELJEVIĆ

Kalaj [4] has extended the Rado-Choquet-Kneser theorem to mappings with Lipschitz boundary data and essentially positive Jacobian at the boundary without restriction on the convexity of image domain. The proof is based on a recent extension of the Rado-Choquet-Kneser theorem by Alessandrini and Nesi and it uses an approximation scheme. Recently, in [6] Kalaj extends Rado-Choquet-Kneser theorem for the mappings with weak homeomorphic Lipschitz boundary data f and Dinis smooth boundary but without restriction on the convexity of image domain, provided that the Jacobian of $F = P[f]$ (Poisson integral of f) satisfies a certain boundary condition. The proof is based on a recent extension of Rado-Choquet-Kneser theorem by Alessandrini and Nesi and it is used the approximation methods. Also important fact is that in this setting there is a continuous function T on $\mathbb{T}$ such that $J(F,z) = |\partial_t F(z)|T(z)$ a.e. $t \in [0, 2\pi]$, where $z = e^{it}$ and $\mathbb{T}$ denotes the unit circle. [1]

Throughout this paper, $\mathbb{U}$ (or $\mathbb{D}$) will denote the unit disc $\{z : |z| < 1\}$, $\mathbb{T}$ the unit circle, $\{z : |z| = 1\}$ and we will use notation $z = re^{i\theta}$.

By $\partial_\theta h$ and $\partial_r h$ (or sometimes by h'_r and h'_θ), h'_x and h'_y we denote partial derivatives with respect to θ and r, x and y respectively.

Every harmonic function h in $\mathbb{D}$ can be written in the form (i) $h = f + \bar{g}$, where f and g are holomorphic functions in $\mathbb{D}$. Then an easy calculation shows

$\partial_\theta h(z) = i(zf'(z) - \overline{zg'(z)})$, $h'_r = e^{i\theta} f' + \overline{e^{i\theta} g'}$, $\; h'_\theta + irh'_r = 2izf'$ and therefore rh'_r is the harmonic conjugate of h'_θ.

If γ is 2π-periodic and L^1 on $[0, 2\pi]$, by $P[\gamma]$ we denote Poisson integral of γ. Note that if γ is absolutely continuous on $[0, 2\pi]$ (and therefore $\gamma' \in L^1[0, 2\pi]$) and $h = P[\gamma]$, then

$$(h'_r)^*(e^{i\theta}) = H(\gamma')(\theta) \text{ a.e.},$$

where H denotes the Hilbert transform.

Let Γ be a curve of $C^{1,\mu}$ class (Lyapunov curve of order μ) and $\gamma : \mathbb{R} \to \Gamma^*$ be arbitrary topological (homeomorphic) parametrization of Γ. If γ is absolutely continuous we define $s(\varphi) = s_\gamma(\varphi) = \int\limits_0^\varphi |\gamma'(t)| \mathrm{d}t$. Sometimes it is convenient to abuse notation and to denote by $\Gamma(s)$ natural parametrization.

For $\Gamma(s) = \gamma(\varphi)$, we define $n = n_\gamma(\varphi) = i\Gamma'\big(s(\varphi)\big)$ and

$$R_\gamma(\varphi, t) = (\gamma(t) - \gamma(\varphi), n_\gamma(\varphi)).$$

For $\theta \in \mathbb{R}$ and $h = P[\gamma]$, define

$$E_\gamma(\theta) = \big((h'_r)^*(e^{i\theta}), n_\gamma(\theta)\big) = \big(H(\gamma')(\theta), n_\gamma(\theta)\big) \; a.e. \tag{1}$$

Note that $\upsilon_*(t, \theta) = \big(H(\gamma'_*)(t), n_\gamma(\theta)\big)$ a.e. Define

$$e_\gamma = e_\gamma(\theta, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\big(\gamma(\theta + t) - \gamma(\theta), n_\gamma(\theta)\big)}{\sin^2(t/2)}.$$

Then the formula $E_\gamma(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} e_\gamma(\theta, t) dt$ plays an important role in the subject.

Define

[1] It seems that the function T which appears in [6] is the function E defined in our paper [3] (see also [7]) and that there is some overlaps of obtained results.

$$E_\gamma^+(\theta) = \overline{E}_\gamma^\mu(\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\gamma(\theta+t)-\gamma(\theta)|^{1+\mu}}{\sin^2(t/2)}\,dt,$$

$F_\gamma(\theta,\eta) = \int_{-\eta}^{\eta} e_\gamma(\theta,t)\,dt$, $G(\theta,\eta) = \int_{-\pi}^{-\eta} e(\theta,t)\,dt + \int_\eta^\pi e(\theta,t)\,dt, \quad \eta > 0,$
and $E_h(z) = E(r,\theta) = \big(h'_r(re^{i\theta}), n_\gamma(\theta)\big)$.

In general h'_r can not be extended to be continuous on $\overline{\mathbb{U}}$ if h is a harmonic quasi conformal (abbreviated HQC) mapping between $\mathbb{U}$ and smooth domain. However E is continuous and $(h_r'^*, n_h) = E$ a.e. on $\mathbb{T}$ and therefore the function E plays an important role in the subject. We also prove in [3] that $E \neq 0$.

In [8], we review some results from Bozin-Mateljevic manuscript [3] concerning bi-Lipschitz property of hqc mappings and related results in planar case using some novelty. We also extend some recent results of Alessandrini-Nesi and Kalaj concerning invertibility for planar harmonic mappings. In particular, we prove:

Theorem. *Let Γ be a curve of $C^{1,\mu}$ class.*
Suppose

(a1) $\gamma : \mathbb{T} \to tr(\Gamma)$ *Lipschitz.*

If (a1) holds then

(A1) E_γ *and* $\overline{E}_\gamma^\mu$ *are continuous.*

If $h = P[\gamma]$ and if we use definition (1) for E_h one can consider this result as a version of Kellogg and Warschawski theorem for harmonic maps. Then
(I1) J_h^* exists a.e. and there continuous function E such that $J_h^*(e^{it}) = |\underline{\gamma}'(t)|E(t)$ a.e. $t \in [0, 2\pi]$.
(I2) If $\underline{\gamma}'$ is continuous at t_0, then J_h is continuous at $z_0 = e^{it_0}$.

We study mappings in plane and space which satisfy (the Poisson-Laplace differential inequality)

$$|\Delta u| \leq a|\nabla u|^2 + b\,.$$

We prove local version of Kellogg and Warschawski theorem for harmonic maps and of Interior estimate of Heinz-Bernstein type and use it to study Lipschitz type property of mappings which satisfy the Poisson-Laplace differential inequality.

References

[1] G. Alessandrini, V. Nesi, "Inverttibile Harmonic mappinngs, beyond Kneser", arXiv:0712.3840v2 [math.AP]

[2] G. Alessandrini, V. Nesi, "Invertible harmonic mappings, beyond Kneser", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci.* (5) VIII, 451-468 (2009).

[3] V. Božin, M. Mateljević, *Quasiconformal harmonic mapping between $C^{1,\alpha}$ Jordan domains* (to appear), manuscript around 2009.

[4] D. Kalaj, "Invertible harmonic mappings beyond Kneser theorem and quasiconformal harmonic mappings", *Studia mathematica*, Vol. 207, No. 2, 117-136 (2011).

[5] D. Kalaj, "Quasiconformal harmonic mappings between Dini smooth Jordan domains", arXiv:1407.1367v1 [math.CV]

[6] D. Kalaj, "Invertible harmonic mappings of unit disk onto onto Dini smooth Jordan domain", arXiv:1503.01605v1 [math.CV]

[7] M. Mateljević, *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic maps*, Zavod za udžbenike, Beograd, (2012).

[8] M. Mateljević, "Quasiconformal harmonic mappings between Dini smooth Jordan domains-Invertible harmonic mappings", `https://www.researchgate.net/publication/276880805_Quasiconformal_harmonic_mappings_between_Dini_smooth_Jordan_domains_Invertible_harmonic_mappings`

Faculty of mathematics, Univ. of Belgrade, Studentski Trg 16, Belgrade, Serbia
E-mail address: miodrag@matf.bg.ac.rs

LEFT INVARIANT COMPLEX STRUCTURES ON NILPOTENT LIE GROUPS

DMITRY MILLIONSHCHIKOV

The Newlander-Nirenberg theorem implies that a left-invariant complex structure on a real simply connected Lie group G can be defined as an almost-complex structure J on the tangent Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G ($J^2 = -1$) satisfying the integrability condition – vanishing of the Nijenhuis tensor:

$$[JX, JY] = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY], \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

We study the algebraic constraints on the structure of nilpotent Lie algebra $\mathfrak{g}$, that corresponds to a nilpotent Lie group G, which arise because of the presence of a left invariant complex structure J on G. Examples of positively graded Lie algebras with complex structures have been constructed, in particular, we construct an infinite family $\mathfrak{D}(n)$ of such algebras that we have for their nil-index $s(\mathfrak{D}(n))$:

$$s(\mathfrak{D}(n)) = \left[\frac{2}{3}\dim\mathfrak{D}(n)\right].$$

The main result is

Theorem. *Let $\mathfrak{g}$ be a nilpotent Lie algebra endowed with an integrable complex structure and* $\dim\mathfrak{g} \geq 8$. $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$ *denotes k-th ideal of the descending central sequence of the Lie algebra $\mathfrak{g}$. Then we have the following estimates:*

$$\dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}^4 \geq 5, \ \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}^6 \geq 8.$$

.

References

[1] D.V. Millionshchikov, “Complex structures on nilpotent Lie algebras and descending central series”, http://arxiv.org/abs/1412.0361.

Lomonosov Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Leninskie gory, 1, Moscow, 119992, Russia

E-mail address: million@mech.math.msu.su

Supported by the grant of Russian Scientific Foundation N 14-11-00414.

ON THE CLASSIFICATION OF GENERALIZED WALLACH SPACES

YURIĬ NIKONOROV

This talk is based on the paper [5] and is devoted to the classification of generalized Wallach spaces, a remarkable class of compact homogeneous spaces. These spaces were introduced in the paper [4], where they were called three-symmetric spaces. Now we prefer to call them *generalized Wallach spaces* as in [6]. A detailed discussion on generalized Wallach spaces could be found in [3], [6, pp. 6346–6347] or [5].

Let G/H be a compact homogeneous spaces with connected compact semisimple Lie group G and its compact subgroup H. Denote by $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{h}$ Lie algebras of G and H respectively. We suppose that G/H is almost effective, i. e. there is no non-trivial ideals of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Denote by $B = B(\cdot\,,\cdot)$ the Killing form of $\mathfrak{g}$. Since G is compact, B is negatively defined on $\mathfrak{g}$. Therefore, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle := -B(\cdot\,,\cdot)$ is a positive definite inner product on $\mathfrak{g}$. Let $\mathfrak{p}$ be the $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$-orthogonal complement to $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$. It is clear that $\mathfrak{p}$ is $\operatorname{Ad}(H)$-invariant (and $\operatorname{ad}(\mathfrak{h})$-invariant, in particular). The module $\mathfrak{p}$ is naturally identified with the tangent space to G/H at the point eH. Every G-invariant Riemannian metric on G/H generates an $\operatorname{Ad}(H)$-invariant inner product on $\mathfrak{p}$ and vice versa. Therefore, it is possible to identify invariant Riemannian metrics on G/H with $\operatorname{Ad}(H)$-invariant inner products on $\mathfrak{p}$. Note that the Riemannian metric generated by the inner product $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\big|_{\mathfrak{p}}$ is called *standard* or *Killing*.

Suppose that a homogeneous space G/H has the following property: the modules $\mathfrak{p}$ is decomposed as a direct sum of three $\operatorname{Ad}(H)$-invariant irreducible modules pairwise orthogonal with respect to $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, i. e. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3$, such that $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i] \subset \mathfrak{h}$ for $i \in \{1,2,3\}$. Homogeneous spaces with this property are called *generalized Wallach spaces*.

There are many examples of these spaces, e. g. the manifolds of complete flags in the complex, quaternionic, and Cayley projective planes: $SU(3)/T_{\max}$, $Sp(3)/Sp(1)\times Sp(1)\times Sp(1)$, $F_4/Spin(8)$. These spaces (known as *Wallach spaces*) are also interesting in that they admit invariant Riemannian metrics of positive sectional curvature (see [7]).

Note, that every generalized Wallach space admits a 3-parameter family of invariant Riemannian metrics determined by inner products $(\cdot\,,\cdot) = x_1 \langle\cdot\,,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \langle\cdot\,,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_2} + x_3 \langle\cdot\,,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_3}$, where x_1, x_2, x_3 are positive real numbers.

In [4], it was shown that every generalized Wallach space admits at least one invariant Einstein metric. Later in [3], a detailed study of invariant Einstein metrics was developed for all generalized Wallach spaces. In particular, it is proved that there are at most four Einstein metrics (up to homothety) for every such space. In the recent papers [1, 2], generalized Wallach spaces were studied from the point of view of the Ricci flow.

Denote by d_i the dimension of $\mathfrak{p}_i$. Let $\{e_i^j\}$ be an orthonormal basis in $\mathfrak{p}_i$ with respect to $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, where $i \in \{1,2,3\}$, $1 \le j \le d_i = \dim(\mathfrak{p}_i)$. Consider the expression $[ijk]$ defined by the equality $[ijk] = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left\langle \left[e_i^\alpha, e_j^\beta\right], e_k^\gamma \right\rangle^2$, where α, β, and γ range from 1 to d_i, d_j, and d_k respectively. The symbols $[ijk]$ are symmetric in all three indices by the bi-invariance of $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Moreover, for spaces under consideration, we have $[ijk] = 0$ if two indices coincide. Therefore, the quantity $A := [123]$ plays an important role. It easy to see that $d_i \ge 2A$ for all $i = 1,2,3$ (see [4]), hence the following constant $a_i = \frac{A}{d_i}$, $i \in \{1,2,3\}$, are such that $(a_1, a_2, a_3) \in [0, 1/2]^3$. Note, that these constants completely determine some important properties of a generalized Wallach space G/H, e. g. the equation of the Ricci flow on G/H, see [1, 2]. Now we are ready to state the main result.

The project was supported in part by Grant 1452/GF4 of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan for 2015-2017 (Agreement N 299, February 12, 2015).

Table 1. The pairs $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ corresponded to generalized Wallach spaces G/H with simple G.

N	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	d_1	d_2	d_3	a_1	a_2	a_3
1	$so(k+l+m)$	$so(k)\oplus so(l)\oplus so(m)$	kl	km	lm	$\frac{m}{2(k+l+m-2)}$	$\frac{l}{2(k+l+m-2)}$	$\frac{k}{2(k+l+m-2)}$
2	$su(k+l+m)$	$s(u(k)\oplus u(l)\oplus u(m))$	$2kl$	$2km$	$2lm$	$\frac{m}{2(k+l+m)}$	$\frac{l}{2(k+l+m)}$	$\frac{k}{2(k+l+m)}$
3	$sp(k+l+m)$	$sp(k)\oplus sp(l)\oplus sp(m)$	$4kl$	$4km$	$4lm$	$\frac{m}{2(k+l+m+1)}$	$\frac{l}{2(k+l+m+1)}$	$\frac{k}{2(k+l+m+1)}$
4	$su(2l), l\geq 2$	$u(l)$	$l(l-1)$	$l(l+1)$	l^2-1	$\frac{l+1}{4l}$	$\frac{l-1}{4l}$	$\frac{1}{4}$
5	$so(2l), l\geq 4$	$u(1)\oplus u(l-1)$	$2(l-1)$	$2(l-1)$	$(l-1)(l-2)$	$\frac{l-2}{4(l-1)}$	$\frac{l-2}{4(l-1)}$	$\frac{1}{2(l-1)}$
6	e_6	$su(4)\oplus 2sp(1)\oplus\mathbb{R}$	16	16	24	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
7	e_6	$so(8)\oplus\mathbb{R}^2$	16	16	16	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
8	e_6	$sp(3)\oplus sp(1)$	14	28	12	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$
9	e_7	$so(8)\oplus 3sp(1)$	32	32	32	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
10	e_7	$su(6)\oplus sp(1)\oplus\mathbb{R}$	30	40	24	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$
11	e_7	$so(8)$	35	35	35	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$
12	e_8	$so(12)\oplus 2sp(1)$	64	64	48	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$
13	e_8	$so(8)\oplus so(8)$	64	64	64	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$
14	f_4	$so(5)\oplus 2sp(1)$	8	8	20	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$
15	f_4	$so(8)$	8	8	8	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Theorem 1. *Let G/H be a connected and simply connected compact homogeneous space. Then G/H is a generalized Wallach space if and only if one of the following assertions holds:*

1) G/H is a direct product of three irreducible symmetric spaces of compact type;

2) The group G is simple and the pair $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ is one of the pairs in Table 1;

3) $G=F\times F\times F\times F$ and $H=\operatorname{diag}(F)\subset G$ for some connected simply connected compact simple Lie group F, with the following description on the Lie algebra level:

$$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\big(\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{f}\oplus\mathfrak{f},\ \operatorname{diag}(\mathfrak{f})=\{(X,X,X,X)\,|\,X\in f\}\big),$$

where $\mathfrak{f}$ is the Lie algebra of F, and (up to permutation) $\mathfrak{p}_1=\{(X,X,-X,-X)\,|\,X\in f\}$, $\mathfrak{p}_2=\{(X,-X,X,-X)\,|\,X\in f\}$, $\mathfrak{p}_3=\{(X,-X,-X,X)\,|\,X\in f\}$.

References

[1] N. A. Abiev, A. Arvanitoyeorgos, Yu. G. Nikonorov, P. Siasos, "The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces", *Differential Geometry and its Applications*, Vol. 35, Supplement, 26–43 (2014).

[2] N. A. Abiev, A. Arvanitoyeorgos, Yu. G. Nikonorov, P. Siasos, "The Ricci flow on some generalized Wallach spaces". In: V. Rovenski, P. Walczak (eds.). Geometry and its Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, V. 72, Springer (2014), P. 3–37.

[3] A.M. Lomshakov A.M., Yu.G. Nikonorov, E.V. Firsov, "Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces", *Matem. tr.*, Vol. 6, No. 2, 80–101 (2003) (Russian); English translation in: *Siberian Adv. Math.*, Vol. 14, No. 3, 43–62 (2004).

[4] Yu. G. Nikonorov, "On a class of homogeneous compact Einstein manifolds", *Sibirsk. Mat. Zh.*, Vol. 41, No. 1, 200–205 (2000) (Russian); English translation in: *Siberian Math. J.*, Vol. 41, No. 1, 168–172 (2000).

[5] Yu. G. Nikonorov, "Classification of generalized Wallach spaces", to appear, available as arXiv:1411.3131.

[6] Yu. G. Nikonorov, E. D. Rodionov, V. V. Slavskii, "Geometry of homogeneous Riemannian manifolds", *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*), Vol. 146, No. 7, 6313–6390 (2007).

[7] N. Wallach, "Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature", *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 96, 277–295 (1972).

South Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 22, Markus st., Vladikavkaz, 362027, RUSSIA

E-mail address: `nikonorov2006@mail.ru`

$\mathbf{F_Q[M_N]}$, $\mathbf{F_Q[GL_N]}$ AND $\mathbf{F_Q[SL_N]}$ AS QUANTIZED HYPERALGEBRAS

ZORAN RAKIĆ

In the first part of the lecture we give an introduction to the problem which we studied. The notions such are Hopf algebra, quantum group, quantum function algebra, quantum Frobenius morphism, are given. Some of the basic examples are provided.

In the second part we considered the quantum function algebra $F_q[GL_n]$, and study the subset

$$\mathcal{F}_q[GL_n] \;:=\; \Big\{ f \in F_q[GL_n] \;\Big|\; \big\langle f, \mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)\big\rangle \subseteq \mathbb{Z}\big[q,q^{-1}\big] \Big\} \;,$$

of all elements of $F_q[GL_n]$ which are $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$–valued when paired with $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_n)$, the unrestricted $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$–integral form of $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ introduced by De Concini, Kac and Procesi. We obtain a presentation of it by generators and relations, and a PBW-like theorem. Moreover, it was given a direct proof that $\mathcal{F}_q[GL_n]$ is a Hopf subalgebra of $F_q[GL_n]$, and that $\mathcal{F}_q[GL_n]\Big|_{q=1} \cong U_{\mathbb{Z}}({\mathfrak{gl}_n}^*)$. We describe explicitly its specializations at roots of 1, say ε, and the associated quantum Frobenius (epi)morphism from $\mathcal{F}_\varepsilon[GL_n]$ to $\mathcal{F}_1[GL_n] \cong U_{\mathbb{Z}}({\mathfrak{gl}_n}^*)$. The same analysis is done for $\mathcal{F}_q[SL_n]$ and (as key step) for $\mathcal{F}_q[M_n]$.

University of Belgrade, Studentski trg 16, 11 001, Belgrade, SERBIA
E-mail address: zrakic@matf.bg.ac.rs

The lecture is based on joint work with Fabio Gavarini, University Tor Vergata, Rome, Italy.

QUASI-ISOMETRIC INVARIANTS OF THE FUNDAMENTAL GROUP OF AN ORTHOGONAL GRAPH-MANIFOLD

ALEKSANDR SMIRNOV

Graph-manifold is called orthogonal, if all of its gluing maps are just permutations of coordinates. Kapovich and Leeb proved that the fundamental group of any 3-dimensional graph-manifold is quasi-isometric to the fundamental group of some orthogonal graph-manifold of dimension 3. Unfortunately already in dimension 4 this result is not true.

We will discuss certain quasi-isometric invariants of fundamental groups of 4-dimensional orthogonal graph-manifolds, such as asymptotic dimension, linearly-controlled asymptotic dimension, etc.

References

[1] S. Buyalo, V. Kobel'skiy, "Generalized graph-manifolds of nonpositive curvature", *Algebra i Analys*, Vol. 11, Issue 2, 64–87 (1999).

[2] M. Kapovich, B. Leeb, "3-manifold groups and nonpositive curvature", *Geometric Analysis and Functional Analysis*, Vol. 8, 841–852 (1998).

[3] D. Hume, A. Sisto, "Embedding Universal Covers of Graph Manifolds in Products of Trees", *Proc. Amer. Math. Soc.*, No. 141:10, 3337–3340 (2013)

[4] A. V. Smirnov, "Quasi-isometric embedding of the fundamental group of an orthogonal graph-manifold into a product of metric trees", *Algebra i Analiz*, Vol. 24, No. 5, 165–180 (2012)

St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 27 Fontanka, St. Petersburg, Russia

E-mail address: alvismi@gmail.com

Supported by RFFI Grant 11-01-00302-a and 14-01-00062.

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ — 2015»,

26 — 29 августа 2015 года

Подписано в печать 01.07.2015 Формат 60×84 1/8

Усл. печ. л. 10.7 Уч.-изд. л. 8.7 Тираж 100 экз. Заказ 123

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга 4.

Отпечатано в ООО «Технотрэйд»
630005, г. Новосибирск, ул. Журинская 78, 2 этаж.
тел. +7 (383) 201-49-82