РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ — 2016»,

21 — 24 сентября 2016 года

Новосибирск, 2016

УДК 514; 515.1; 517.518; 517.54; 517.938; 517.958

ББК 22.15

Д 548

ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ — 2016: Тезисы Международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2016. — 108 с.

ISBN 978-5-86134-202-5

Настоящее издание содержит тезисы докладов Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске — 2016» (г. Новосибирск, 21 — 24 сентября 2016 г.). Основная тематика докладов относится к следующим актуальным направлениям современной математики: дифференциальной геометрии, геометрии и топологии трехмерных многообразий, теории интегрируемых систем, квазиконформному анализу и функциональным пространствам, приложениям геометрии и топологии.

Сборник представляет интерес для научных работников и аспирантов, интересующихся современными проблемами геометрии, топологии и анализа.

Конференция и издание сборника поддержаны Лабораторией квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства 14.Z50.31.0020) и Российским фондом фундаментальных исследований (грант 16-01-20492).

Редакторы: И. А. Тайманов, А. Ю. Веснин

Ответственный редактор: Н. В. Абросимов

GEOMETRY DAYS IN NOVOSIBIRSK – 2016: Abstracts of the International Conference. Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2016. — 108 p.

Editors I. A. Taimanov, A. Yu. Vesnin, N. V. Abrosimov

$$\text{Д}\ \frac{1602050000 - 1}{\text{Я}82(03) - 2016}$$

ISBN 978-5-86134-202-5

Содержание

Дополнение

GENERALIZATIONS OF CASEY'S THEOREM FOR HIGHER DIMENSIONS

NIKOLAY ABROSIMOV, VLADISLAV ASEEV

In 1881 Irish mathematician John Casey ([1], p. 103) generalized Ptolemy's theorem in the following way.

Direct Casey's theorem. *Let circles O_1, O_2, O_3, O_4 on a plane touch given circle O in vertices p_1, p_2, p_3, p_4 of a convex quadrilateral. Denote by t_{ij} the length of a common tangent of the circles O_i and O_j. If O separates O_i and O_j then the internal tangent should be taken as t_{ij} else the external tangent should be taken. In both cases we assume that the tangents are exist. Then*

$$t_{12}\, t_{34} + t_{23}\, t_{14} = t_{13}\, t_{24}\,.$$

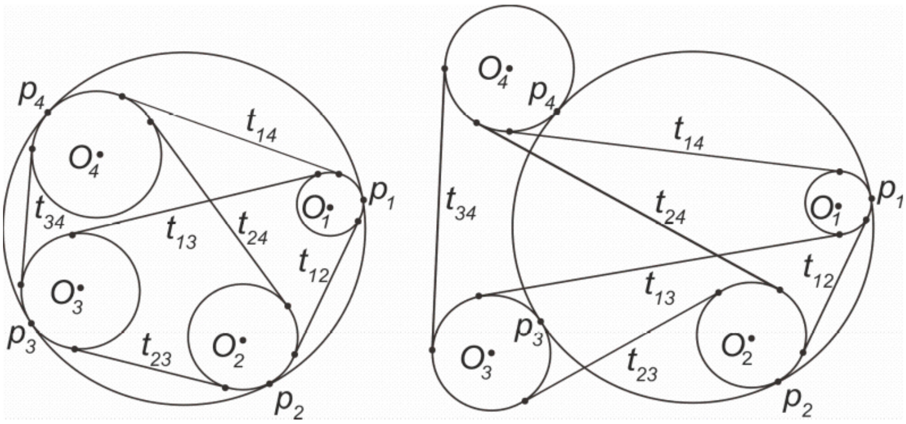

FIGURE 1. Circles O_1, O_2, O_3, O_4 touch a given circle O

A common tangent of two circles is said to be their *external tangent* if it does not intersect the segment joining the centers of the circles. Otherwise, it is said to be *internal tangent*.

The converse to Casey's theorem is seems more important for applications. It was proved somewhat later by different authors, and with different kinds of restrictions. One of the proofs belonging apparently to H. F. Baker, can be found in the famous book [2], p. 122.

Together, the direct and converse Casey's theorem gives a criterion of existence for the common tangent to four given circles. A similar question for three circles is known as the problem of Apollonius (see [2], p. 117). On the other hand, Casey's theorem is a direct generalization of Ptolemy's theorem. The latter is obtained by taking the radii of the circles O_1, O_2, O_3, O_4 equal to zero.

We give generalizations of Casey's theorem and its converse for higher dimensions. We also present a solution for multidimensional generalization of the problem of Apollonius. To do this we introduce a notion of ψ-tangent for a generalized k-sphere that touches a number of generalized n-balls in proper way. ψ-tangent is a natural generalization of a tangent in higher dimensions.

A *generalized ball* can be defined as $\mathbf{B} \cap R^n = \{x \in R^n : \alpha|x|^2 - 2(x, a) + \beta \leq 0\}$ where $\alpha, \beta \in R^1$, $a \in R^n$ and $|a|^2 - \alpha\beta \geq 0$. Thus, any generalized ball is represented by vector $\alpha \oplus a \oplus \beta \in R^{n+2}$ up to multiplication by a positive number. We introduce the following bilinear form in space R^{n+2}: $q(\alpha_1 \oplus a_1 \oplus \beta_1,\ \alpha_2 \oplus a_2 \oplus \beta_2) := 2(a_1, a_2) - (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$. Hence, $q(l, l) \geq 0$, at that, $q(l, l) = 0$ if and only if $\mathbf{B}$ is a one-point set.

This work was funded by the Russian Science Foundation (grant 16-41-02006).

Let non-one-point generalized balls $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ are equipped with unit vectors $e_1, e_2 \in R^{n-1}$ called *labels.* Then the quantity

$$\Psi(e_1\mathbf{B}_1, e_2\mathbf{B}_2) := (e_1, e_2) - \frac{q(l_1, l_2)}{\sqrt{q(l_1, l_1)q(l_2, l_2)}}$$

does not depend on a choice of direction vectors l_1, l_2 of coefficient rays $L(\mathbf{B}_1)$, $L(\mathbf{B}_2)$ and called Ψ*-characteristic* of pair of *labelled* generalized balls $e_1\mathbf{B}_1$, $e_2\mathbf{B}_2$.

If S is a tangent k-sphere to generalized ball $\mathbf{B}$ then there is a unique generalized ball $\mathbf{B}^S$ such that $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}^S$, $S \subset \partial\mathbf{B}^S$ and $\partial\mathbf{B}^S$ is a tangent $(n-1)$-sphere to $\mathbf{B}$.

Definition. *Let non-one-point generalized balls $\mathbf{B}_j$ $(j = 1, 2, ..., m)$ are equipped with unit vectors $e_j \in R^{n-k}$. A generalized k-dimensional sphere S $(1 \le k \le n-1)$ is called ψ-tangent k-sphere to the number of labelled balls $e_1\mathbf{B}_1, \dots, e_m\mathbf{B}_m$ if S is a tangent k-sphere to each of them and $\Psi(e_i\mathbf{B}_i^S, e_j\mathbf{B}_j^S) = 0$ for any $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$.*

The following are generalized direct and converse Casey's theorem for higher dimensions.

Theorem 1. *Let k-dimensional generalized sphere $S \subset \bar{R}^n$ $(n \ge 2,\ 1 \le k \le n-1)$ is ψ-tangent k-sphere to four labelled non-one-point generalized balls $e_j\mathbf{B}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. Then*

(1) *$\Psi(e_i\mathbf{B}_i, e_j\mathbf{B}_j) \ge 0$ for any $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ and equality is attained only when either $S \subset \partial\mathbf{B}_i \cup \partial\mathbf{B}_j$ or $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j$ are the balls of type (i) and $S \cap \mathbf{B}_i = S \cap \mathbf{B}_j$.*

(2) *For any renumbering $\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$*

$$\sqrt{\Psi(e_{\sigma(1)}\mathbf{B}_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}\mathbf{B}_{\sigma(2)}) \cdot \Psi(e_{\sigma(3)}\mathbf{B}_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)}\mathbf{B}_{\sigma(4)})} +$$
$$\sqrt{\Psi(e_{\sigma(1)}\mathbf{B}_{\sigma(1)}, e_{\sigma(4)}\mathbf{B}_{\sigma(4)}) \cdot \Psi(e_{\sigma(2)}\mathbf{B}_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\mathbf{B}_{\sigma(3)})} \ge$$
$$\sqrt{\Psi(e_{\sigma(1)}\mathbf{B}_{\sigma(1)}, e_{\sigma(3)}\mathbf{B}_{\sigma(3)}) \cdot \Psi(e_{\sigma(2)}\mathbf{B}_{\sigma(2)}, e_{\sigma(4)}\mathbf{B}_{\sigma(4)})}\,.$$

(3) *The equality in (2) is attained only in two cases:*
   3a) *either $S \subset \partial\mathbf{B}_j$ for some j,*
   3b) *or $S \cap \mathbf{B}_j = \{p_j\}$ for any j and tangent points p_1, p_2, p_3, p_4 lie on a generalized circle in order of their σ-numbers $\sigma(j)$.*

Theorem 2. *Let non-one-point Euclidean balls $\mathbf{B}_j := \bar{B}(a_j, r_j)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ with labels $e_j = \pm 1 \in R^1$ satisfy the following conditions*

(1) *for any $i, j = 1, 2, 3, 4$, the following inequality holds*

$$\Psi_{ij} := \Psi(e_i\mathbf{B}_i, e_j\mathbf{B}_j) \ge 0\,;$$

(2) *for any renumeration $\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, the Casey's inequality holds*

$$t_{\sigma(1)\sigma(2)}\ t_{\sigma(3)\sigma(4)} + t_{\sigma(1)\sigma(4)}\ t_{\sigma(2)\sigma(3)} \ge t_{\sigma(1)\sigma(3)}\ t_{\sigma(2)\sigma(4)}\,.$$

If among these balls there is a ball $\mathbf{B}_k$ such that

(3) *$\Psi_{jk} > 0$ for any $j = 1, 2, 3, 4$;*

(4) *$r_j > r_k$ for any $\mathbf{B}_j$ such that $e_j = e_k$ and $j \ne k$;*

then there is $(n-1)$-sphere S that is ψ-tangent either to the balls $e_j\mathbf{B}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ or to the balls $\bar{B}_j^*$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. The latter take place only in case $e_1 = e_2 = e_3 = e_4$.

References

[1] J. Casey, *A sequel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples. 5th. ed* // Hodges, Figgis and Co., Dublin, 1888.

[2] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry. An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle* // Dover Publications, New York, 1960.

Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyug ave., 4, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: abrosimov@math.nsc.ru

ON OVERLAPPING SELF-SIMILAR MEASURES

CHRISTOPH BANDT

A self-similar measure ν with respect to contracting maps $f_1, f_2, ..., f_m$ on $\mathbb{R}^n$ and probabilities $p_1, ..., p_m > 0$ is defined by an equation

$$\nu(B) = H\nu(B) = \sum_{k=1}^{m} p_k \nu(f_k^{-1}(B)) \qquad (*)$$

which has to hold for Borel sets B. There is always a unique solution, and the structure is rather simple if one assumes the so-called open set condition which says that the m pieces of the support are fairly separated.

The structure in the general case is much less understood, even the most simple case of two linear functions on an interval, say $f_1(x) = tx$, $f_2(x) = tx+1-t$, where $\frac{1}{2} \le t < 1$. The resulting measures ν_t are termed Bernoulli convolutions. For $t = \frac{1}{2}$ we get the uniform distribution on $[0, 1]$, for inverses $t = 1/\beta$ of so-called Pisot numbers we get singular measures, as proved by Erdös in 1939. Despite much work over more than 70 years, it is not clear yet which of these measures are represented by a density function.

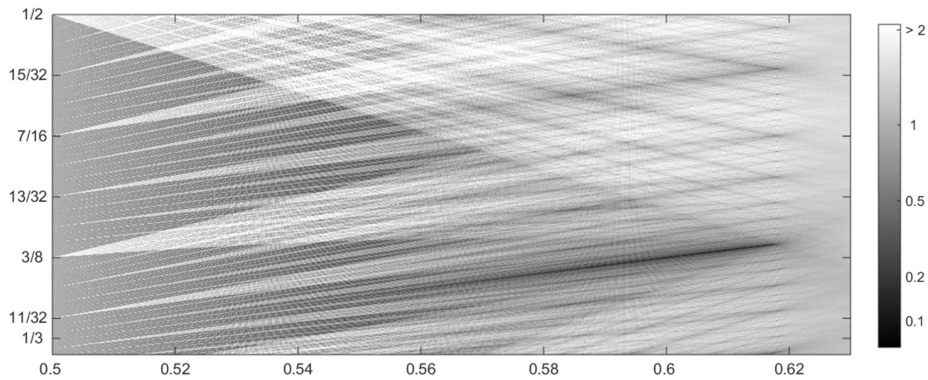

FIGURE 1. Two-dimensional density of Bernoulli convolutions, $t \in [\frac{1}{2}, .63], y \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

This talk will discuss recent work on Bernoulli convolutions, using a dynamic and geometric approach to the two-dimensional density of the ν_t which exists by a theorem of Solomyak. We consider the multivalued map $G(x) = \{f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x)\}$ as a dynamical system and study its finite orbits. Some of them are ordinary periodic and preperiodic orbits, studied by Erdös, Jóo, Komornik, Sidorov, de Vries, Jordan, Shmerkin, Solomyak and others as 'points with unique address'. The truly multivalued dynamics leads to network-type orbits, however, which appear only for very special parameters. We show how network-type orbits lead to singularities, extending a result by Feng and Wang.

Given the fact that this is not a conference on fractals, the talk will introduce to the subject and will touch related questions: the numerical approximation of self-similar measures by Markov chains, the spectral gap of the Hutchinson operator H in (*), and, if time permits, analysis on fractal measures.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF GREIFSWALD, 17487 GREIFSWALD, GERMANY.
E-mail address: bandt@uni-greifswald.de

Supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft, grant Ba 1332/11-1.

MÖBIUS STRUCTURES AND TIMED CAUSAL SPACES ON THE CIRCLE

SERGEI BUYALO

Abstract. We discuss a conjectural duality between hyperbolic spaces on one hand and spacetimes on the other hand, living on the opposite sides of the common absolute. This duality goes via Möbius structures on the absolute, and it is easily recognized in the classical case of symmetric rank one spaces. In a general case, no trace of such duality is known. As a first step in this direction, we show how Möbius structures on the circle from a large class including those which stem from hyperbolic spaces give rise to 2-dimensional spacetimes, which are axiomatic versions of de Sitter 2-space.

It is classical that the quadratic form

$$g(v) = x^2 + y^2 - z^2$$

on $\mathbb{R}^3$, $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, induces on any connected component of the set $g(v) = -1$ a Riemannian metric of the hyperbolic plane H^2, while on the set $g(v) = 1$ a Lorentzian metric of de Sitter 2-space dS^2. The (set of lines in the) cone $g(v) = 0$ serves as the common absolute S^1 of the both H^2 and dS^2. A similar picture takes place in any dimension and even for all rank one symmetric spaces of noncompact type.

In other words, we observe a life on the other side of the absolute S^1 of H^2 that is de Sitter space dS^2. This rises a bold question: Is there any life (a spacetime) on the other side of the absolute, i.e., the boundary at infinity, of any Gromov hyperbolic space with the same symmetry groups? The main result of the paper is the answer "yes" for a large class of hyperbolic spaces with the absolute S^1.

A Möbius structure on a set X is a class of semi-metrics having one and the same cross-ratio on any given ordered 4-tuple of distinct points in X. Every hyperbolic space Y induces on its boundary at infinity $X = \partial_\infty Y$ a Möbius structure which encodes most essential properties of Y and in a number of cases allows to recover Y completely, e.g., in the case Y is a rank one symmetric space of noncompact type.

We axiomatically describe a class $\mathcal{M}$ of *monotone* Möbius structures on the circle S^1. The class $\mathcal{M}$ includes every Möbius structure M which is induced on S^1 by a hyperbolic CAT(0) surface Y without singular points. In particular, the isometry group of Y is included in the group of Möbius automorphisms of M.

On the other hand, the set aY of unordered pairs of distinct points on the circle S^1 has a natural causal structure, which is independent of anything else. Points of aY are called *events*. There is a large class $\mathcal{T}$ of 2-dimensional spacetimes compatible with that causal structure, and we characterize it axiomatically. Any spacetime $T \in \mathcal{T}$ is a triple $T = (\mathrm{aY}, \mathcal{H}, t)$, where $\mathcal{H}$ is a class of timelike curves in aY called *timelike lines*, which are actually timelike geodesics, and t is the time between events in the causal relation. We prove

Theorem. *There is a bijection between the class $\mathcal{M}$ of monotone Möbius structures on the circle and the class $\mathcal{T}$ of timed causal spaces such that automorphism groups of any $M \in \mathcal{M}$ and the respective $T \in \mathcal{T}$ are canonically isomorphic.*

In other words, the class $\mathcal{M}$ of Möbius structures on the circle on one hand, and the class $\mathcal{T}$ of timespaces on the other hand, are different sides of one and the same phenomenon.

POMI Ran, Fontanka 27, St.Petersburg, 191023, Russia
E-mail address: sbuyalo@pdmi.ras.ru

Supported by RFFI Grant 14-01-00062.

TURAEV-VIRO INVARIANTS AND COMPLEXITY OF VIRTUAL 3-MANIFOLDS

EVGENY FOMINYKH

Virtual 3-manifolds were introduced by S. Matveev in 2009 as a natural generalization of the classical 3-manifolds. In this talk we define the complexity of virtual 3-manifolds and calculate it for virtual 3-manifolds defined by special polyhedra with one, two and three 2-components. As a corollary, we establish the exact values of complexity for infinite families of hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary.

A part of the talk is based on a joint work with V. Turaev and A. Vesnin.

Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University, Brat'ev Kashirinykh st. 129, Chelyabinsk 454001, Russia

E-mail address: efominykh@gmail.com

This work was supported in part by the Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University (contract no. 14.Z50.31.0020) and RFBR (grant number 16-01-00609).

SMALL COVERS OF GRAPH-ASSOCIAHEDRA AND URC-MANIFOLDS

ALEXANDER GAIFULLIN

A closed oriented manifold M^n is called a *URC-manifold* if it satisfies the following condition: For any topological space X and any homology class $z \in H_n(X;\mathbb{Z})$, there exists a finite-sheeted covering $\widehat{M}^n$ of M^n and a continuous mapping $f\colon \widehat{M}^n \to X$ such that $f_*[\widehat{M}^n] = kz$ for some nonzero integer k. In 2008 the speaker proved that URC-manifolds exist in every dimension n, and, moreover, as an example of a URC-manifold serves the so-called Tomei manifold of isospectral symmetric tridiagonal real matrices. Until recently this manifold has remained the simplest known example of a URC-manifold. In the talk, we shall present simpler examples of URC-manifolds. These examples will be the small covers of certain special polytopes called graph-associahedra.

Steklov Mathematical Institute, Gubkina str., 8, Moscow, 119991, Russia
E-mail address: agaif@mi.ras.ru

The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 16-51-55017).

HITCHIN THORPE INEQUALITY IN GENERALIZATION OF RICCI SOLITONS

ALI JIZANY

We apply Hitchin-Thorpe inequality in Generalization of Einstein metrics specially Gradient Ricci Solitons by using the diameter estimates. Also, the comparisons among the results have been done. Other conditions, that depend on the potential function or Einstein constant, were investigated in Koiso-Coa Soliton $\mathbb{C}P^2\#1\overline{\mathbb{C}P^2}$.

References

[1] A. Brasil, E. Costa, E. Ribeiro Jr, *HitchinThorpe inequality and Kaehler metrics for compact almost Ricci soliton* // J. Math. Mech., Annali di Matematica Pura ed Applicata, **193**:6 (2014), 1851-1860.

[2] Xiang-Dong Li, *On the first eigenvalue of the Witten-Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons* // Annals of Global Analysis and Geometry, **44**:2 (2013), 105-114.

[3] Homare Tadano, *An upper diameter bound for compact Ricci solitons with applications to the Hitchin-Thorpe inequality* // arXiv:1504.05577v1,(2015).

[4] Homare Tadano, *Remark on a diameter bound for Complete Riemannian manifolds with Positive Ricci Curvature* // Differential Geometry and its Applications, **44** (2016), 136143.

[5] J. A. Thorpe, *Some remarks on the Gauss-Bonnet formula* // J. Math., **18** (1969), 779-786.

[6] Li Ma, *Remarks on compact shrinking Ricci solitons of dimension four* // C.R. Acad. Sci. Paris, **1351** (2013), 817-823.

[7] Manuel Fernandez-Lopez and Eduardo Garcia-Rio, *Diameter Bounds And Hitchin-Thorpe Inequalities For Compact Ricci Solitons* // Quart. J. Math., **61** (2010),319-327.

[8] N. J. Hitchin, *Compact four-dimensional Einstein manifolds* // J. Differential Geometry **9** (1974),435441.

University of Buckingham, Buckingham MK18 1EG, UK
E-mail address: 1305535@buckingham.ac.uk, ali.jizany@gmail.com

Ministry of Higher Education and Scientific research in Iraq.

ON UNIQUE DETERMINATION OF DOMAINS BY THE CONDITION OF LOCAL ISOMETRY OF BOUNDARIES IN THE RELATIVE METRICS

ANATOLY P. KOPYLOV

The lecture contains results of recent author's investigations of rigidity problems of domains in Euclidean spaces undertaken for a development of a new approach to the classical problem about the unique determination of bounded closed convex surfaces [1] which is represented by work [2] in a sufficiently complete content.

In the lecture, the full characterization of a plane domain U with smooth boundary (i.e., the Euclidean boundary $\mathrm{fr}\,U$ of U is a one-dimensional manifold of class C^1 without boundary) that is uniquely determined in the class of domains in $\mathbb{R}^2$ with smooth boundaries by the condition of local isometry of boundaries in the relative metrics was produced. In the case where U is bounded, the necessary and sufficient condition for the unique determination of the type under consideration in the class of all bounded plane domains with smooth boundaries is the convexity of U. And if U is unbounded then its unique determination in the class of all plane domains with smooth boundaries by the condition of local isometry of boundaries in the relative metrics is equivalent to its strict convexity.

In the second part of the lecture, we consider the case of space domains.

The theorem on the unique determination of a strictly convex domain in $\mathbb{R}^n$, where $n \geq 2$, in the class of all n-dimensional domains by the condition of local isometry of Hausdorff boundaries in the relative metrics, which is a generalization of A. D. Aleksandrov's theorem on the unique determination of a strictly convex domain by the condition of (global) isometry of boundaries in the relative metrics, is proved.

It is also established that in the case of a plane domain U with nonsmooth boundary and of a three-dimensional domain A with smooth boundary, the property of domain to be convex is no longer necessary for their unique determination by the condition of local isometry of boundaries in the relative metrics.

References

[1] A. V. Pogorelov, *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, AMS, Providence (1973).

[2] A. P. Kopylov, On the unique determination of domains in Euclidean spaces, *J. of Math. Sciences*, **153**, no.6, 869-898 (2008).

Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyuga pr. 4, and Novosibirsk State University, Pirogova str., 2, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail address: apkopylov@yahoo.com

The author was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 11-01-00819-a), the Interdisciplinary Project of the Siberian and Far-Eastern Divisions of the Russian Academy of Sciences (2012-2014 no. 56), the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools of the Russian Federation (Grant NSh-921.2012.1) and the Exchange Program between the Russian and Polish Academies of Sciences (Project 2014-2016).

REDUCED $L_{q,p}$-COHOMOLOGY OF TWISTED CYLINDERS

YAROSLAV KOPYLOV

We establish vanishing results for the reduced $L_{q,p}$-cohomology of twisted cylinders, a generalization of warped cylinders, for $q \leq p$. The results obtained extend some results by Gol′dshtein, Kuz′minov and Shvedov about the L_p-cohomology of warped cylinders. One of the main observations is the vanishing of the "middle-dimensional" cohomology for a large class of manifolds. This is a joint work with Prof. V. M. Gol′dshtein.

Sobolev Institute of Mathematics, Pr. Koptyuga 4, 630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: yakop@math.nsc.ru

THE BRIDGE BETWEEN DUBOVITSKIĬ-FEDERER THEOREMS AND THE COAREA FORMULA

MIKHAIL KOROBKOV

The talk is based on the recent joint preprint [2] with Jan Kristensen (University of Oxford) and Piotr Hajłasz (University of Pittsburgh).

The Morse–Sard theorem requires that a mapping $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is of class C^k, $k \geq \max(n-m+1, 1)$. In 1957 Dubovitskiĭ generalized this result to the case of C^k mappings for all integers $k \geq 1$ by proving that, for almost all $y \in \mathbb{R}^m$ the intersection $Z_{v,m} \cap v^{-1}(y)$ has zero s–dimensional Hausdorff measure for $s = \max(n-m-k+1, 0)$, where $Z_{v,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rank} \nabla v(x) < m\}$ is the m–critical set. Another generalization was obtained independently by Dubovitskiĭ and Federer in 1966, namely for C^k mappings $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ and arbitrary $m \leq d$ they proved that the set of m–critical values $v(Z_{v,m})$ has zero q_o–dimensional Hausdorff measure for $q_o = m - 1 + \frac{n-m+1}{k}$.

Here we prove that Dubovitskiĭ's theorem can be generalized to the case of mappings of the Sobolev–Lorentz class $W^k_{p,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$, $p = \frac{n}{k}$ (this is the sharp case that guarantees the continuity of mappings). In this situation the mappings need not to be everywhere differentiable and in order to handle the set of nondifferentiability points, we establish for such mappings an analog of the Luzin N–property with respect to lower dimensional Hausdorff content. Finally, we formulate and prove a "bridge theorem" that includes all the above results as particular cases. As the limiting case in this "bridge theorem" we also establish a new coarea type formula: if $E \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rank} \nabla v(x) \leq m\}$, then $\int\limits_E J_m v(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{n-m}(E \cap v^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^m(y)$. The new fact is that we prove this formula for $\mathbb{R}^d$–valued mappings with arbitrary d without usual restrictions on the image of the mapping (such as m-rectifiability or σ–finiteness with respect to the m-Hausdorff measure, see, e.g., [3, 5]). These last results are new also for smooth mappings, but are presented here in the general Sobolev context.

This paper summarizes a series of our previous works (see, e.g., [1, 4]).

References

[1] J. Bourgain J., M.V. Korobkov M.V., and J. Kristensen, *On the Morse–Sard property and level sets of $W^{n,1}$ Sobolev functions on $\mathbb{R}^n$* // Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), **2015**:700 (2015), 93–112. http://dx.doi.org/10.1515/crelle-2013-0002

[2] P.Hajlasz, M.V. Korobkov, J. Kristensen, *A bridge between Dubovitskii-Federer theorems and the coarea formula,* // submitted to Journal of Functional Analysis, see also http://arxiv.org/abs/1603.05858

[3] M. Karmanova, *Rectifiable sets and coarea formula for metric-valued mappings* // J. Funct. Anal., **254**:5 (2008), 1410–1447. http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2007.10.013

[4] M.V. Korobkov and J. Kristensen, *The trace theorem, the Luzin N- and Morse-Sard properties for the sharp case of Sobolev - Lorentz mappings* // submitted to Journal of Geometric Analysis, see also Report no. OxPDE-15/07 https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/OxPDE%2015.07.pdf

[5] M. Ohtsuka, *Area formula* // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, **6**:2, part 2 (1978), 599–636.

Sobolev Institute of Mathematics, Prospekt Akademika Koptyuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail address: korob@math.nsc.ru

The author was partially supported by the Russian Foundations for Basic Research and (Grants No. 14-01-00768-a and No. 15-01-08275-a).

THE GAP PHENOMENON IN PARABOLIC GEOMETRY

BORIS KRUGLIKOV

In 2014 together with Dennis The we resolved the gap problem in complex and split-real parabolic geometry, i.e. we computed the amount of submaximal symmetry for every geometry in the class. Results of this type have been known for selected geometries since Ricci, Tresse, Fubini, Cartan, Egorov, Kobayashi, Sinyukov, Yano and some others via specific techniques. However it was in our paper that we first presented a universal solution for a large class of geometries, including conformal structures, systems of second order ODE, almost Grassmanian and Lagrangian structures, generic parabolic distributions, exceptional geometries etc. In the later developments we covered CR-structures, c-projective structures and some other real (non-split) specifications. I will review the results and overview further developments and problems.

References

[1] Boris Kruglikov, Dennis The, *The gap phenomenon in parabolic geometries*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) DOI: 10.1515/crelle-2014-0072 (2014)

[2] Boris Kruglikov, *Submaximally symmetric CR-structures*, Journal of Geometric Analysis; DOI: 10.1007/s12220-015-9663-x (2015)

[3] Boris Kruglikov, Vladimir Matveev, Dennis The, *Submaximally symmetric c-projective structures*, International Journal of Mathematics **27**, No. 3, 1650022 - 34 pp, (2016)

[4] Boris Kruglikov, Henrik Winther, *Almost complex structures in 6D with nondegenerate Nijenhuis tensors and large symmetry groups*, Annals of Global Analysis and Geometry (to appear: 2016)

[5] Boris Kruglikov, Henrik Winther, Lenka Zalabova, *Submaximally symmetric quaternionic structures* (in preparation: 2016)

Institute of Mathematics and Statistics, NT-faculty, University of Tromsø, Tromsø 90-37, Norway.

E-mail address: boris.kruglikov@uit.no

MONADOLOGY TODAY

SEMEN KUTATELADZE

Monadology stems from Leibniz (see [1]). This talk is an overview of the present-day versions of monadology with some applications to vector lattices and linear inequalities.

The notion of monad is central to topology in external set theory. Justifying the use of infinitesimals and the technique of descending and ascending in various branches of mathematics requires adaptation of monadology for the implementation of filters in Boolean valued universes. This is still a rather uncharted area of research.

The two approaches are available now. One is to apply monadology to the descents of objects. The other consists in applying the standard monadology inside the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ over a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$, while ascending and descending by the Escher rules. For more details see [2] and [3].

These approaches are illustrated by order convergence and fragmentation of positive operators in vector lattices. Also, Lagrange's principle is shortly addressed in polyhedral environment with inexact data.

References

[1] G. W. Leibniz, *Monadology*// In: Collected Works, Vol. 1. Mysl′, 1982, pp. 143–429.
[2] A. G. Kusraev and S. S. Kutateladze, *Introduction to Boolean Valued Analysis*// Nauka Publishers, 2005.
[3] E. I. Gordon, A. G. Kusraev, and S. S. Kutateladze, *Infinitesimal Analysis: Selected Topics*// Nauka Puiblishers, 2011.

Sobolev Institute, Koptyug Avenue, 4, Nivisubirsk, 630090, Russia
E-mail address: sskut@math.nsc.ru

ON SINGULARITIES OF LINEAR-FRACTIONAL $SU(2,2)$-ACTION IN $U(1,1)$

ALEXANDER LEVICHEV

Chronometric theory (which is due to Segal, see [1]) is based on the space-time $\mathbf{D}$ which can be represented as a causal Lie group. The causal structure is determined by an invariant Lorentzian form on the Lie algebra $u(2)$. Similarly (in author's publications), the space-time $\mathbf{F}$ is represented as a causal Lie group where the causal structure is now determined by an invariant Lorentzian form on the Lie algebra $u(1,1)$. Lie groups G, G_F are introduced as $SU(2,2)$-reps which are related by conjugation: $h = WgW$. Here g is arbitrary in the original $G = SU(2,2)$ whereas W is a certain 4 by 4 matrix (see [2]) with 2 by 2 blocks P, Q, Q, P (in that order). Linear-fractional G-action on $\mathbf{D}$ is global and conformal; it is fundamental for the analysis in space-time bundles based on the parallelizing group $U(2)$. This analysis has been done by Paneitz and Segal in 1980s. Linear-fractional (locally defined) G_F-action in $\mathbf{F} = U(1,1)$

$$h(U) = (VU + W)(XU + Y)^{-1} \ (1)$$

has been introduced in [2]. Here each h is viewed as consisting of 2 by 2 blocks V, W, X, Y. For a 2 by 2 matrix M denote $W(M) = (PM + Q)(QM + P)^{-1}$ when it exists. Define the imbedding of $\mathbf{F}$ into $\mathbf{D}$ by

$$Z = W(U). \ (2)$$

One can verify that (2) is well-defined for arbitrary U in $\mathbf{F}$. This W-mapping is conformal but here that property is not exploited. Equation (2) is a special case of the *Sviderskiy formula* (see [3]). It is easy to verify that the inverse map

$$U = W(Z) = (PZ + Q)(QZ + P)^{-1} \ (3)$$

is only defined for those Z which do not belong to the thorus $\mathbf{T}$ which consists of all matrices K in $\mathbf{D}$ of the form

$$K = \begin{bmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{bmatrix}.$$

Here p, q can be arbitrary complex numbers of modulus 1. The following statement has been proven in [4]:

Theorem 1. *If $h(U)$ is defined then*

$$g(W(U)) = W(h(U)). \ (4)$$

Remark. In [4] it has not been determined *when* (i.e., *for which* U in $\mathbf{F}$) the r.h.s. of (4) is well-defined. Clearly (see (1) above), it is defined if (and only if) the matrix $(XU + Y)$ is non-singular. However, this is equivalent to a condition which is easier to verify: see below.

Theorem 2. *Let h be in G_F, and let U be in $\mathbf{F}$. The matrix $h(U)$ is defined if (and only if) $g(W(U))$ is not an element of $\mathbf{T}$.*

References

[1] Paneitz, S.M., Segal, I.E., *Analysis in space-time bundles I: General considerations and the scalar bundle* // Journal of Functional Analysis, **47**:1 (1982), 78–142.

[2] Levichev, A.V., *Pseudo-Hermitian realization of the Minkowski world through DLF theory* // Physica Scripta, **83**: 1 (2011), 1–9.

[3] Levichev, A.V., Feng, J., *More on the Mathematics of the DLF-theory: Embedding of the Oscillator World L into Segal's Compact Cosmos D* // AJUR, **11**: 3-4 (2013), 29–33.

[4] Kon, M., Levichev, A., *Towards Analysis in Space-Time Bundles Based on Pseudo-Hermitian Realization of the Minkowski Space* // Journal of Functional Analysis (2016), submitted.

SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS SB RAS, 4 KOPTIUG PR., NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
E-mail address: alevichev@gmail.com

ON ATTRACTORS OF IFS IN UNIFORM SPACES

MARY SAMUEL, ANDREI TETENOV

A self-similar set in a complete metric space X is the unique non-empty compact set $K \subset X$ satisfying equation $K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K)$, where $S_i : X \to X$ are contraction maps. Such set K may be considered as the fixed point of the contraction operator T in the hyperspace $C(X)$ defined by $T(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)$, Hutchinson[1], 1981.

It is natural to get rid of metrics by means of passing to uniform spaces.As we found, in order to obtain meaningful results, we have to impose the requirement that X is supercomplete, well-chained, Hausdorff uniform space and the maps S_i are $\mathbf{B}$-contractions studied by Taylor [3].

This allows us to develop the theory of self-similar sets in uniform spaces. Particularly, we prove the following non-metric versions of of Hutchinson theorem:

Theorem 1. *Let X be a supercomplete, well-chained, Hausdorff uniform space and $S = \{S_1, ..., S_m\}$ be a system of $\mathbf{B}$-contractions in X. There is a unique non-empty compact $K \subset X$ such that $K = \bigcup S_i(K)$*

and of Kigami's connectedness theorem [2]:

Theorem 2. *Under the conditions and notation of Theorem 1, The following statements are equivalent:*

1. *The intersection graph of the family of sets $S_i(K)$ is connected.*
2. *K is connected.*
3. *K is arcwise connected.*

References

[1] J. Hutchinson, *Fractals and self-similarity* // Indiana Univ. Math. J. , **30**:5 (1981), 713-747.

[2] J. Kigami, *Analysis on fractals* // Cambridge univ. Press, 2001.

[3] W.W. Taylor, *Fixed-point theorems for nonexpansive mappings in linear topological space* // J.Math.Anal.Appl., **40** (1972), 164-173.

Department of Mathematics, Bharata Mata College, Kochi, India
E-mail address: marysamuel2000@gmail.com

Novosibirsk State University
E-mail address: atet@mail.ru

This work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 16-01-00414).

4-DIMENSIONAL GRAPH-MANIFOLDS WITH THE FUNDAMENTAL GROUP QUASI-ISOMETRIC TO THE FUNDAMENTAL GROUP OF AN ORTHOGONAL GRAPH-MANIFOLD.

ALEKSANDR SMIRNOV

We introduce a topological invariant, $\operatorname{type} M$, of a 4-dimensional graph-manifold that is a natural number. For an orthogonal graph-manifold its type does not exceed 2.

The main result of our talk is the following Theorem.

Theorem. *Let M be the 4-dimensional graph-manifold with* $\operatorname{type} M \leq 2$. *There is an orthogonal graph-manifold N that the universal cover of M is bilipschitz equivalent to the universal cover of N.*

As a consequence we get the following Corollary.

Corollary. *The fundamental group of any 4-dimensional graph-manifold M with* $\operatorname{type} M \leq 2$ *can be quasi-isometrically embeded into the product of four metric trees. As a consequence* $\operatorname{asdim} \pi_1(M) = \ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M) = 4$, *where* asdim *and* ℓ-asdim *are asymptotic and linearly-controlled asymptotic dimension.*

References

[1] S. Buyalo, V. Kobel'skiy, "Generalized graph-manifolds of nonpositive curvature", *Algebra i Analys*, Vol. 11, Issue 2, 64–87 (1999).

[2] M. Kapovich, B. Leeb, "3-manifold groups and nonpositive curvature", *Geometric Analysis and Functional Analysis*, Vol. 8, 841–852 (1998).

[3] D. Hume, A. Sisto, "Embedding Universal Covers of Graph Manifolds in Products of Trees", *Proc. Amer. Math. Soc.*, No. 141:10, 3337–3340 (2013)

[4] A. V. Smirnov, "Quasi-isometric embedding of the fundamental group of an orthogonal graph-manifold into a product of metric trees", *Algebra i Analiz*, Vol. 24, No. 5, 165–180 (2012)

St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Institution Name, 27 Fontanka, St. Petersburg, Russia

E-mail address: alvismi@gmail.com

Supported by RFFI Grant 14-01-00062.

INTRODUCTION TO FLAT MANIFOLDS

ANDRZEJ SZCZEPAŃSKI

By flat manifold we understand a compact Riemannian manifold with sectional curvature equal to zero. During my talk I will present the most important results as for example Bieberbach theorems. Moreover, I am going to give some achievements from the last decade. I promise to illustrate my talk with examples and some open problems.

Institute of Mathematics, University of Gdansk, ul. Wita Stwosza 57, Gdansk, Poland
E-mail address: aszczepa@mat.ug.edu.pl

SPECIAL BOHR-SOMMERFELD GEOMETRY

NIKOLAI TYURIN

Let (M, ω) be a compact simply connected symplectic manifold of real dimension $2n$ with integer symplectic form; let (L, a) be the prequantization data on M, so $L \to M$ is a $\mathbb{C}$-bundle and a is a hermitian connection with the curvature form $F_a = 2\pi i \omega$. Then a lagrangian submanifold $S \subset M$ is Bohr-Sommerfeld (BS for short) iff the restriction $(L, a)|_S$ admits covariantly constant sections. We say that a Bohr-Sommerfeld lagrangian submanifold is special (SBS for short) with respect to a smooth section $\alpha \in \Gamma(M, L)$ iff $\alpha|_S = f e^{ic} \sigma_S$, where σ_S is a covariantly constant section, c is a real constant and f is a strictly positive real function.

The presented SBS condition cuts a subset in the direct product $\mathcal{U}_{SBS} \subset \mathbb{P}(\Gamma(M, L)) \times \mathcal{B}_S$ where the second direct summand is the moduli space of Bohr-Sommerfeld lagrangian cycles. This subset is fibered over the projective space $\mathbb{P}(\Gamma(M, L))$ with discrete fibers, therefore the standard Fubini-Study Kahler structure can be lifted to $\mathcal{U}_{SBS}$; this result is interesting since we have constructed something Kahler strarting from pure symplectic situation.

Consider the case when (M, ω) admits a compatible integrable complex structure I. This means that we are working with **algebraic varieties** with standard Kaher metrics of the Hodge type. In this case our hermitian connection a defines a holomorphic structure on L which cuts a finite dimensional subspace $H^0(M_I, L) \subset \Gamma(M, L)$ of holomorphic sections, and we can consider the space of lagrangian cycles which are SBS with respect to holomorphic sections so

$$\mathcal{M}_{SBS} = \{(p, S) \quad | \quad p \in \mathbb{P}H^0(M_I, L), S \in \mathcal{B}_S\}$$

and S is SBS with respect to α where α presents point p.

The main fact is that $\mathcal{M}_{SBS}$ is a finite dimensional object. Indeed, take the projection $p_1 : \mathcal{M}_{SBS} \to \mathbb{P}H^0(M_I, L)$. Then we claim that the fiber of p_1 consists of a finite number of points. The arguments are based on the following reduction of SBS in the holomorphic case.

For any $\alpha \in H^0(M_I, L)$ define the following function $\phi_\alpha = -\ln|\alpha|_{\mathrm{h}}$, where the brackets denote the hermitian norm of the section. This function is correctly defined on $M \backslash D$ where D is the zeroset of α, so is a complex submanifold (following algebro geometric tradition we call it divisor). This function is plurisubharmonic w.r.t. the complex structure I, therefore its isolated critical points have Morse indices less or equal to n. Then we have

Theorem. *A lagrangian submanifold $S \subset M$ is SBS w.r.t. $\alpha \in H^0(M_I, L)$ iff* $\mathrm{grad}\phi_\alpha \in \mathrm{TS}$ *at each point of S.*

This implies that if $\phi_\alpha|_S$ has a critical point $x \in S \subset M$ then $x \in M$ is a critical point of ϕ_α on M. For a generic holomorphic section in this algebro geometric situation one has just a finite number of critical points of ϕ_α on $M \backslash D$, while each SBS lagrangian cycle S must carry at least two critical points; therefore the number of SBS lagrangian cycles for fixed α must be finite. On the other hand it shows how such SBS lagrangian cycles can be constructed: one just takes all finite trajectories of the gradient flow of ϕ_α and form the big set B_α as the union of these trajectories. Due to an old Milnor observation every smooth irreducible open part of B_α must be lagrangian or isotropic. Thus if we have an n - dimensional piece of B_α we can construct a singular SBS lagrangian cycle, compactifying this piece.

From the sight of algebraic geometry it leads to the following observation. Let X be an algebraic variety and $D \subset X$ be a very ample divisor. Then by the very definition the complete linear system $|D|$ defines an embedding $X \to \mathbb{CP}^N$ for certain N, and taking any standard Fubini-Study metric on the last projective space we get the corresponding Kahler metric of the Hodge type on X and the corresponding hermitian structure on $L_D \to X$. Suppose that

The study has been funded by the Russian Academic Excellence Project '5-100'.

for the corresponding holomrophic section α_D it exists SBS lagrangian cycle. Then we get a correspondence between pure algebro geometric objects (very ample divisor) and lagrangian object. It is natural to call this SBS lagrangian cycle **lagrangian shadow** of the divisor D; as in the real life where the shadow depends on the Sun position, our lagrangian shadow depends on the choice of standard Fubini-Study metric, but it is not hard to see that the topological type of the shadow doesn't depend on this choice.

Untill now this is mostly phenomenological observation which can be illustrated by the following simple examples.

Example 0. Take $X = \mathbb{CP}^1$ and $[D] = 2h$, where h is the class of point. Then for irreducible D the function ϕ_α has 4 singular points: 2 infinite maxima (the zeros of D), one local minimum and one saddle point. Consequently a separatix, joining the minimum and the saddle, must exist, and this separatix is SBS loop since it is tangent to the vector field $\mathrm{grad}\phi_{\mathrm{D}}$. In contrast if D is reducible (double point) then ϕ_D has only two critical points, and no separatix appears.

Example 1. More interesting case $X = Q = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ — complex quadric, let D has type (1,1). Then for irreducible D the lagrangian shadow is Hamiltonian isotopic to lagrangian sphere given by anti diagonal embedding of S^2 to Q; for reducible D we get again emptyset.

Example 2. Let X be the flag variety F^3 realized as the incidence cycle in the direct product $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$, and D represents the type (1,1). Then the lagrangian shadow of an irreducible divisor is Hamiltonian isotopical to the Gelfand-Zeytlin lagrangian 3-sphere. If D is reducible we again have trivial lagrangian shadow.

All the details of these constructions and observations can be found in the authors preprints **arXiv:1504.02589**, **arXiv:1508.06804** , **arXiv:1601.05974** and in the references therein.

BLTPh JINR (Dubna) and NRU HSE (Moscow)
E-mail address: ntyurin@theor.jinr.ru

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ НА ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ УОЛЛАХА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

НУРЛАН АБИЕВ

Цель работы — исследование эволюции инвариантных римановых метрик на обобщенных пространствах Уоллаха под влиянием нормализованного потока Риччи, описываемого уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(t) = -2\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + 2\mathbf{g}(t)\frac{S_{\mathbf{g}}}{n}, \tag{1}$$

где $\mathbf{g}(t)$ означает 1-параметрическое семейство римановых метрик на римановом многообразии M^n, $\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$ и $S_{\mathbf{g}}$ — тензор Риччи и скалярная кривизна метрики $\mathbf{g}$ соответственно.

Согласно определениям работ [6] и [9] обобщенные пространства Уоллаха (или трилокально-симметрические пространства в другой терминологии), как специальный класс римановых многообразий M^n, представляют собой компактные однородные пространства G/H, представление изотропии которых раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3$ трех $\operatorname{Ad}(H)$-инвариантных неприводимых модулей, удовлетворяющих условию $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i] \subset \mathfrak{h}$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ [6, 7]. Стоит отметить, что полная классификация обобщенных пространств Уоллаха получена недавно в работах [4] и [8] в независимости друг от друга.

Для фиксированного $\operatorname{Ad}(G)$-инвариантного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G произвольная G-инвариантная риманова метрика $\mathbf{g}$ на G/H определяется $\operatorname{Ad}(H)$-инвариантным скалярным произведением

$$(\cdot, \cdot) = x_1\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_2} + x_3\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_3}, \tag{2}$$

где x_1, x_2, x_3 — положительные действительные числа. Метриками *общего положения* назовем метрики с попарно различными x_i, $i = 1, 2, 3$.

Известно, что каждое обобщенное пространство Уоллаха характеризуется тройкой параметров $a_i := A/\mathbf{d_i} \in [0, 1/2]$, $i = 1, 2, 3$, где A — неотрицательное число, $\mathbf{d_i} = \dim(\mathfrak{p}_i)$ (см. подробности в [6, 7]). Данная работа посвящена специальному случаю таких пространств, для которых $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *На обобщенном пространстве Уоллаха G/H с $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$ нормализованный поток Риччи переносит все метрики общего положения в метрики с положительной кривизной Риччи.*

Отметим, что случай $a_1 = a_2 = a_3 \neq 1/4$ был исследован в работе [1], где доказаны следующие теоремы, обобщающие некоторые результаты работ [3] и [5].

Теорема 2 (Теорема 3 в [1]). *Пусть G/H является обобщенным пространством Уоллаха с $a_1 = a_2 = a_3 := a$, где $a \in (0, 1/4) \cup (1/4, 1/2)$. Тогда если $a < 1/6$, то нормализованный поток Риччи переносит все метрики общего положения с положительной кривизной Риччи в метрики со смешанной кривизной Риччи; если же $a \in (1/6, 1/4) \cup (1/4, 1/2)$, то нормализованный поток Риччи переносит все метрики общего положения в метрики с положительной кривизной Риччи.*

Теорема 3 (Теорема 4 в [1]). *Пусть G/H является обобщенным пространством Уоллаха с $a_1 = a_2 = a_3 = 1/6$. Тогда нормализованный поток Риччи сохраняет положительность кривизны Риччи метрик общего положения, удовлетворяющих условию $x_k < x_i + x_j$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.*

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2015-2017 годы (грант 1452/ГФ4).

Схема доказательства теоремы 1. Пусть $a_1 = a_2 = a_3 := a$. Тогда, переходя к новым переменным $w_1 := x_3 x_1^{-1}$ и $w_2 := x_3 x_2^{-1}$, уравнение (1) можно привести к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1])

$$\dot{w}_1 = (w_1 - 1)(w_1 - 2aw_1w_2 - 2aw_2), \qquad \dot{w}_2 = (w_2 - 1)(w_2 - 2aw_1w_2 - 2aw_1). \tag{3}$$

Из теоремы 2 работы [2] непосредственно вытекает, что при $a = 1/4$ система (3) имеет единственную точку покоя $(1,1)$, являющуюся седлом (с нулевой матрицей линейной части).

Согласно [1] инвариантным метрикам (2) с положительной кривизной Риччи на евклидовой плоскости (w_1, w_2) соответствует связная область (обозначим ее R) с границей $r_1 \cup r_2 \cup r_3$, где r_1, r_2, r_3 — кривые, заданные соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} aw_1^2w_2^2 + aw_1^2 - aw_2^2 - w_1^2w_2 &= 0, \\ aw_1^2w_2^2 - aw_1^2 + aw_2^2 - w_1w_2^2 &= 0, \\ aw_1^2w_2^2 - aw_1^2 - aw_2^2 + w_1w_2 &= 0. \end{aligned}$$

По тем же соображениям симметрии, что и в [1], при доказательстве теоремы 1 можно ограничиться рассмотрением области $\Omega := \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \mid w_2 > w_1 > 1\}$. Тогда, как показывает переход к полярной системе координат с дальнейшим асимптотическим анализом, прямые $w_2 = w_1$ и $w_2 = 1$ являются соответственно притягивающим и отталкивающим многообразиями седла $(1,1)$ для траекторий системы (3), берущих начало в Ω. Используя эти факты и аналитическое задание части $\partial(R) \cap \Omega \subset r_1$ границы $\partial(R)$ области R, несложно доказать следующие утверждения, имеющие место при $a = 1/4$ и влекущие доказательство теоремы 1:

1) Любая траектория системы (3), начинающаяся в $\Omega \setminus R$, достигает $R \cap \Omega$ за конечное время.

2) Никакая траектория системы (3) не может покинуть $R \cap \Omega$, достигнув $R \cap \Omega$ однажды (или начавшись в $R \cap \Omega$).

Автор выражает признательность профессору Ю. Г. Никонорову за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] N. Abiev, Yu. Nikonorov, *The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow* // Ann. Glob. Anal. Geom., DOI: 10.1007/s10455-016-9502-8 (2016).

[2] N. Abiev, A. Arvanitoyeorgos, Yu. Nikonorov, P. Siasos, *The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces* // Differ. Geom. Appl., **35**:Suppl., 26–43 (2014).

[3] C. Böhm, B. Wilking, *Nonnegatively curved manifolds with finite fundamental groups admit metrics with positive Ricci curvature* // GAFA, Geom. Func. Anal., **17**, 665–681 (2007).

[4] Zh. Chen, Y. Kang, K. Liang, *Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces* // Commun. Anal. Geom. (to appear), see also arXiv:1411.2694.

[5] M. Cheung, N. Wallach, *Ricci flow and curvature on the variety of flags on the two dimensional projective space over the complexes, quaternions and octonions* // Proc. Amer. Math. Soc. **143**:1, 369–378 (2015).

[6] A. Lomshakov, Yu. Nikonorov, E. Firsov, *Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces* // Siberian Adv. Math., **14**:3, 43–62 (2004).

[7] Yu. Nikonorov, *On a class of homogeneous compact Einstein manifolds* // Siberian Math. J., **41**:1, 168–172 (2000).

[8] Yu. Nikonorov, *Classification of generalized Wallach spaces* // Geom. Dedicata, **181**:1, 193–212 (2016).

[9] Yu. Nikonorov, E. Rodionov, V. Slavskii, *Geometry of homogeneous Riemannian manifolds* // Journal of Mathematical Sciences, **146**:7, 6313–6390 (2007).

Таразский государственный университет им. М.Х. Дулати, ул. Сулейменова, 7, Тараз, 080012, Казахстан

E-mail address: abievn@mail.ru

АНАЛОГ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ВАН ДЕР ВАРДЕНА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ОТОБРАЖЕНИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ДВА РАССТОЯНИЯ

ВИКТОР АЛЕКСАНДРОВ

В 1970 году Б.Л. ван дер Варден доказал следующую теорему

Теорема 1 (см. [1, 2]). *Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве дан пятиугольник, у которого длины всех сторон равны между собой и длины всех диагоналей равны между собой. Тогда множество вершин этого пятиугольника с необходимостью лежит в некоторой двумерной плоскости и совпадает с множеством вершин некоторого правильного пятиугольника.*

Смысл теоремы 1 в том, что у ней указан геометрический объект (а именно, пятиугольник), которому изначально разрешается лежать в пространстве высокой размерности (а именно, в $\mathbb{R}^3$), но который почему-то вынужден лежать в пространстве меньшей размерности (а именно, в двумерной плоскости). Легко понять, в теореме 1 нельзя заменить пятиугольник четырёхугольником.

Цель данного сообщения — рассказать о многомерном аналоге теоремы ван дер Вардена, опубликованном автором в [3]. Мы расскажем, что в многомерных пространствах «неожиданно плоским» объектом оказывается гипероктаэдр — многомерное обобщение всем известного октаэдра.

Начнём с определений. Пусть $n \geqslant 1$ — целое число и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$. Обозначим через V_n множество концевых точек векторов $\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2, \dots, \pm\mathbf{e}_n$. Границу выпуклой оболочки множества V_n в пространстве $\mathbb{E}^n$ мы называем стандартным n-мерным гипероктаэдром и обозначаем через S_n. Ясно, что S_n является выпуклым многогранником, а множество его вершин совпадает с V_n. Отрезок, соединяющий две вершины из V_n, мы называем ребром гипероктаэдра S_n, если он полностью лежит в S_n; в противном случае мы называем этот отрезок диагональю S_n.

n-мерным гипероктаэдром в $\mathbb{E}^N$ мы называем всякое непрерывное отображение $S_n \to \mathbb{E}^N$, которое линейно на каждом симплексе, лежащем в S_n и сужение которого на множество V_n инъективно. Легко понять, что такое отображение однозначно задаётся инъективным отображением $f : V_n \to \mathbb{E}^N$, которое мы тоже называем n-мерным гипероктаэдром в $\mathbb{E}^N$. n-мерный гипероктаэдр $S_n \to \mathbb{E}^N$ может не быть выпуклым многогранником и может иметь очень сложные самопересечения; его рёбрами называем образы рёбер S_n; а диагоналями — отрезки в $\mathbb{E}^N$, которые соединяют образы вершин, но не являются рёбрами.

Многомерным аналогом теоремы ван дер Вардена мы называем следующую теорему:

Теорема 2 (см. [3]). *Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, пусть $a > 0$ и $b > 0$ — вещественные числа и пусть $f : V_n \to \mathbb{E}^{2n-2}$ — n-мерный гипероктаэдр такой, что длина каждого ребра f равна a, а длина каждой диагонали f равна b. Тогда $f(V_n)$ изометричен (в метрике пространства $\mathbb{E}^{2n-2}$) гомотетичной копии множества V_n. В частности, $b = \sqrt{2}a$.*

Мы расскажем также как теорема 2 может быть применена для исследования отображений, сохраняющих два расстояния. История изучения таких отображений вкратце такова.

Говорят, что отображение $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ сохраняет отображение 1, если для всех $x, y \in \mathbb{E}^n$ из равенства $|x - y| = 1$ вытекает равенство $|g(x) - g(y)| = 1$, где $|\cdot|$ обозначает норму вектора в соответствующем евклидовом пространстве.

В 1953 году Ф.С. Бекман и Д.А. Куарлес [4] доказали, что для любого $n \geqslant 2$ всякое отображение $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, сохраняющее расстояние 1, является изометрией, т.е. сохраняет все расстояния. В 1985 году Б.В. Декстер [5] привёл пример отображения $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^6$, сохраняющего расстояние 1, но не являющегося изометрией. До сих пор остаётся открытым вопрос о том является ли изометрией всякое отображение $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$, сохраняющее расстояние 1. Трудности в решении этого вопроса вынудили геометров искать дополнительные условия, гарантирующие изометричность отображения $\mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$. Одним из направлений исследований стало изучение отображений, сохраняющих два расстояния, см., например [6]. Используя теорему 2 и теорему, доказанную К. Бездеком и Р. Коннелли в [6], мы доказываем следующее утверждение:

Теорема 3 (см. [3]). *Пусть $n \geqslant 6$ и $0 \leqslant m \leqslant 2n-2$ — целые числа и пусть $A > 0$ и $B > 0$ — вещественные числа. Пусть $g : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ — отображение такое, что для всех $x, y \in \mathbb{E}^n$ из равенства $|x-y| = A$ вытекает равенство $|g(x)-g(y)| = A$ и из равенства $|x-y| = \sqrt{2}A$ вытекает равенство $|g(x)-g(y)| = B$. Тогда g является изометрией.*

Список литературы

[1] B.L. van der Waerden, *Ein Satz über raümliche Fünfecke* // Elemente der Mathematik, **25**:4, 73–78 (1970).

[2] O. Bottema, *Pentagons with equal sides and equal angles* // Geometriae Dedicata, **2**, 189–191 (1973).

[3] V. Alexandrov, *An analogue of a theorem of van der Waerden, and its application to two-distance preserving mappings* // Periodica Mathematica Hungarica, **72**:2, 252–257 (2016).

[4] F.S. Beckman, D.A. Quarles, *On isometries of Euclidean spaces* // Proceedings of the American Mathematical Society, **4**:5, 810–815 (1953).

[5] B.V. Dekster, *Nonisometric distance 1 preserving mapping $E^2 \to E^6$* // Archiv der Mathematik, **45**:3, 282–283 (1985).

[6] K. Bezdek, R. Connelly, *Two-distance preserving functions from Euclidean space* // Periodica Mathematica Hungarica, **39**:1–3, 185–200 (1999).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: alex@math.nsc.ru

НОРМИРОВАННЫЕ ПЛОСКОСТИ В КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ К ХОРДОВОМУ ПРОСТРАНСТВУ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

ПАВЕЛ АНДРЕЕВ, ВЕРА СТАРОСТИНА

Хордовые пространства определены в [1] как геодезические пространства с выделенным семейством отрезков, для которого выполнены аналоги аксиом G-пространств. Выделенные отрезки называются базовыми хордами. Хордовое пространство X называется пространством неположительной кривизны, если в любом треугольнике, образованном базовыми хордами, выполняется свойство неположительности кривизны по Буземану: средняя линия такого треугольника не превосходит половины соответствующего основания.

В статье [2] авторами дано описание конструкции касательного конуса K_pX с вершиной $p \in X$ к хордовому пространству неположительной кривизны (X, d) и его свойств. В частности, касательный конус K_pX является геодезически полным геодезическим пространством и допускает действие группы H положительных гомотетий с центром p.

По построению конус K_pX как множество точек совпадает с множеством X, а его метрика d_* является предельной для семейства метрик, полученных из d изменением масштаба при общей отмеченной точке p. Отображение $\mathrm{Id} : X \to K_pX$ не увеличивает расстояния:

$$d_*(x, y) \leq d(x, y)$$

для любых $x, y \in X$. Выделенные прямые пространства X, проходящие через вершину p при этом остаются прямыми линиями и в конусе K_pX, метрика d_* вдоль таких прямых совпадает с d.

Определение. Подмножество $\alpha \subset X$ в геодезическом пространстве (X, d) называется *слабо выпуклым*, если для любых двух точек $x, y \in \alpha$ существует отрезок пространства X, соединяющий их и целиком лежащий в α.

Следующее свойство касательного конуса играет важную роль при дальнейшем изучении его геометрии и геометрии хордовых пространств.

Теорема. *Пусть K_pX — касательный конус к хордовому пространству (X, d) неположительной кривизны с вершиной $p \in X$, a, b — две прямые в K_pX, проходящие через p так, что их прообразы в X являются выделенными прямыми. Тогда в K_pX существует слабо выпуклое подмножество α, содержащее a и b, инвариантное относительно действия группы H и изометричное двумерной плоскости, оснащённой некоторой нормой.*

Список литературы

[1] H. Busemann, B. Phadke, *Spaces with distinguished geodesics* // M. Dekker, N.Y., 1987.

[2] П.Д. Андреев, В.В. Старостина, *Геометрия касательного конуса к G-пространству неположительной кривизны с выделенным семейством отрезков*// Изв. вузов. Математика, № 2, 3–14 (2016).

Северный (Арктический) федеральный университет, наб. Северной Двины, 17, Архангельск, 163002, Россия

E-mail address: pdandreev@mail.ru, v.starostina@narfu.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 14-01-00219.

О ТОЖДЕСТВАХ ГРЕЯ И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ

МИХАИЛ БАНАРУ

1. Почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX,\ JY\rangle = \langle X,\ Y\rangle\,,\ \ X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n} . Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. С каждой AH-структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (то есть 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY\rangle\,,\ \ X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитово многообразие называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема, и келеровым, если $\nabla F = 0$ [1].

Сорок лет назад выдающийся американский геометр Альфред Грей выделил несколько классов (типов) почти эрмитовых многообразий, характеризуемых тождествами [2]:
Класс $R1$: $\langle R(X,\ Y)Z,\ T\rangle = \langle R(X,\ Y)JZ,\ JT\rangle$;
Класс $R2$: $\langle R(X,\ Y)Z,\ T\rangle = \langle R(JX,\ JY)Z, JT\rangle + \langle R(JX,\ Y)JZ,\ T\rangle + \langle R(JX,\ Y)Z,\ JT\rangle$;
Класс $R3$: $\langle R(X,\ Y)Z,\ T\rangle = \langle R(JX,\ JY)JZ, JT\rangle$.

Многообразия класса $R1$ интенсивно изучались многими математиками, причем обычно под названием паракелеровых многообразий. За многообразиями класса $R3$ закрепилось название RK-многообразий. Позже были введены в рассмотрение различные аналоги классов Грея. Например, изучались классы почти эрмитовых многообразий, тензор Вейля конформной кривизны которых удовлетворяет подобным тождествам. В частности, исследовались $R1$-многообразия (или C-паракелеровы многообразия), то есть почти эрмитовы многообразия, тензор Вейля конформной кривизны которых удовлетворяет тождеству [3]:

$$\langle W(X,Y)Z,\ T\rangle = \langle W(X,Y)JZ,\ JT\rangle\,.$$

(Оно аналогично тождеству, характеризующему $R1$-многообразия.)

2. Почти эрмитовы структуры тесно связаны с почти контактными метрическими структурами. Известно [4], что на всякой ориентируемой гиперповерхности N почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. Напомним, что под почти контактной метрической структурой на нечетномерном многообразии N понимается система тензорных полей $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi) = 1;\ \Phi(\xi) = 0;\ \eta\circ\Phi = 0;\ \Phi^2 = -id + \xi\otimes\eta$$

$$\langle\Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in \aleph(N)$$

(Здесь Φ — поле тензора типа (1, 1), ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.)

Для почти контактных метрических многообразий введены свои аналоги тождеств Грея и выделены классы многообразий, аналогичные классам $R1$, $R2$ и $R3$ [5], [6].

3. В докладе предполагается обсудить взаимосвязь между классическими тождествами Грея и их различными аналогами для почти эрмитовых многообразий. Например, будет показана связь между характеризациями многообразий греевых классов и их конформных

аналогов в терминах спектра тензора римановой кривизны и тензора Вейля конформной кривизны, соответственно.

Будет обсужден и другой важный вопрос, который поставлен в [6]: как взаимосвязаны тождества Грея на AH-многообразии и их контактные аналоги на ассоциированном этому AH-многообразию почти контактном метрическом многообразии?

Также предполагается привести краткий обзор результатов, полученных в данном направлении математиками за последние 20 лет, а также привести ряд новых (и существенно более коротких) доказательств ранее полученных результатов [7], [8].

Список литературы

[1] В.Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Одесса: Печатный дом, (2013).

[2] A. Gray, *Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds* // Tohoku Math. J., **28**:4, 601–612, (1976).

[3] A. Abu-Saleem, M.B. Banaru, *On parakahlerian and C-parakahlerian manifolds* // Abhath Al-Yarmouk. Basic Sci. Eng., **15**:1, 101–109, (2006).

[4] В.Ф. Кириченко, М.Б. Банару, *Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры, **127**, 5–40 (2014).

[5] A.J. Di Scala, L. Vezzoni, *Gray identities, canonical connection and integrability* // Proc. Edinburgh Math. Soc., **53**, 657–674, (2010).

[6] J. Bae, J.H. Park, W. Shin, *Curvature identities on contact manifolds and their applications* //Advanced Studies in Contemporary Mathematics, **25**:3, 423–435, (2015).

[7] M.B. Banaru, *A note on RK- and CRK-manifolds* // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика, **35**:1, 37–43, (2001).

[8] M.B. Banaru, *A note on R2- and cR2-manifolds* // Journal of Harbin Institute of Technology (New Series), **9**:2, 136–138, (2002).

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000, РФ
E-mail address: mihail.banaru@yahoo.com

О ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ КЛАССА G_2

МИХАИЛ БАНАРУ, ГАЛИНА БАНАРУ

Наверное, самой цитируемой статьей по геометрии почти эрмитовых многообразий является знаменитая работа выдающегося американского геометра Альфреда Грея и его испанского коллеги Луиса М. Хервеллы [1], в которой они выделили 16 классов почти эрмитовых многообразий. Классификация Грея–Хервеллы почти эрмитовых структур — общепризнанный результат в эрмитовой геометрии. Среди выделенных типов почти эрмитовых структур есть хорошо изученные, как, например, классы келеровых, приближенно келеровых, почти келеровых и локально конформно келеровых многообразий. Эти классы Грея–Хервеллы иногда называют «малыми». Наоборот, «большие» классы (которые в [1] обозначены как $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$) изучены гораздо хуже. Причины этого вполне очевидны — условия Грея–Хервеллы принадлежности почти эрмитова многообразия тому или иному «большому» классу весьма сложны, а примеры собственных представителей для таких классов отыскать непросто. Едва ли найдется в хороших журналах два десятка статей о почти эрмитовых многообразиях класса $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$, или, как чаще его обозначают, класса G_2.

Напомним [1], что почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX,\ JY\rangle = \langle X,\ Y\rangle\,,\quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n} . Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. С каждой AH-структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (то есть 2-формы), называемого фундаментальной формой структуры и определяемого равенством

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY\rangle\,,\quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитово многообразие называется G_2-многообразием, если выполняется следующее условие [1]:

$$\underset{XYZ}{G}\{\nabla_X\,(F)\,(Y,Z) - \nabla_{JX}\,(F)\,(JY,Z) = 0\} = 0,$$

где ∇ — риманова связность метрики $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$. В [2] показано, что данное условие Грея-Хервеллы равносильно такому условию, которому должны удовлетворять структурные тензоры Кириченко AH-структуры:

$$B^{abc} + B^{bca} + B^{cab} = 0,\quad B_{abc} + B_{bca} + B_{cab} = 0$$

В докладе предполагается представить обзор основных результатов, полученных при исследовании почти эрмитовых многообразий класса G_2: от статьи Хервеллы и Видаля [3], где впервые возникло понятие такого вида AH-многообразия, до новой работы Н.А. Даурцевой [4]. Отметим, что практически во всех работах о G_2-многообразиях рассматриваются многообразия размерности 6 (кроме [4] это, например, [5], [6] и др.). В остальных же работах авторы имеют дела с G_2-многообразиями произвольной размерности $2n$. Здесь неизбежно возникают аллюзии с так называемой «задачей Грея»: еще 50 лет назад этот выдающийся американский специалист обратил внимание [7] на то, что не известно ни одного примера собственного 6-мерного почти келерова многообразия (или W_2-многообразия, если следовать терминологии [1]). Он предположил, что отличная от келеровой почти келерова структура не может быть реализована на 6-мерном многообразии. С тех пор, однако, никто не смог это доказать. Впрочем, гипотеза Грея не была и опровергнута, так как никому не удалось привести пример 6-мерного собственного W_2-многообразия.

Вопрос, который мы ставим в конце, таков: существует ли собственная G_2-структура на многообразиях размерности, отличной от шести?

Список литературы

[1] A. Gray, L.M. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* // Ann. Mat. Pura Appl., **123**:4, 35–58, (1980).

[2] М.Б. Банару, *Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли (Дисс. . . . уч. ст. к. ф.-м. наук)* // Москва, МПГУ им. В.И. Ленина, (1993).

[3] L.M. Hervella, E. Vidal, *Novelles gèomètries pseudo-kahlèriennes G_1 et G_2* // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1, **283**, 115–118, (1976).

[4] Н.А. Даурцева, *О существовании структур класса $G2$ на строго приближенно кэлеровом шестимерном многообразии* // Вестник Томского государственного ун-та. Матем. и мех., **6**:32, 19–24, (2014).

[5] М.Б. Банару, *О 6-мерных $G2$ -подмногообразиях алгебры Кэли* // Математические заметки, **74**:3, 323–328, (2003)

[6] М.Б. Банару, *Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры, **126**, 10–61 (2014).

[7] A. Gray, *Some examples of almost Hermitian manifolds* // Illinois J. Math., **10**:2, 353–366, (1966).

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000, РФ
E-mail address: mihail.banaru@yahoo.com

РЕДУКЦИЯ ТЕНЗОРА АФФИННОЙ КРИВИЗНЫ НА ПОДМНОГООБРАЗИИ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ

КСЕНИЯ БАШАШИНА

Рассмотрим n-мерное гладкое голономное многообразие V_n со структурными уравнениями

$$(1)\qquad d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J \ (I,J,K=\overline{1,n}),\ d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge \omega^I_{JK}\ (\omega^I_{[JK]}=0).$$

Исследуем связность в расслоении реперов 1-го порядка $L(V_n)$ со структурными уравнениями (1), типовым слоем которого служит линейная группа $L_{n^2}=GL(n)$, действующая в касательном пространстве T_n к многообразию V_n в фиксированной точке . Аффинную связность в главном расслоении $L(V_n)$ зададим способом Лаптева-Лумисте с помощью форм

$$\widetilde{\omega}^I_J = \omega^I_J - \Gamma^I_{JK}\omega^K,\ \Delta\Gamma^I_{JK} + \omega^I_{JK} = \Gamma^I_{JKL}\omega^L,\ \ \Delta\Gamma^I_{JKL} - \Gamma^I_{JM}\omega^M_{KL} - \Gamma^I_{MK}\omega^M_{JL} + \Gamma^M_{JK}\omega^I_{ML} + \omega^I_{JKL} \cong 0;$$

в силу симметрии форм ω^I_{JK} естественно предполагать, что функции Γ^I_{JK} удовлетворяют условию $\Gamma^I_{[JK]}=0$. Структурные уравнения форм связности имеют вид

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \widetilde{\omega}^I_J,\ d\widetilde{\omega}^I_J = \widetilde{\omega}^K_J \wedge \widetilde{\omega}^I_K + R^I_{JKL}\omega^K \wedge \omega^L,\ R^I_{JKL} = \Gamma^I_{J[KL]} - \Gamma^M_{J[K}\Gamma^I_{ML]},$$

причем объект R аффинной кривизны является тензором.

Подмногообразие V_m многообразия V_n представим как m-параметрическое семейство, описанное точкой многообразия V_n. Произведём частичную канонизацию подвижного репера $\{e_i, e_a\}$ $(i,j,k=\overline{1,m};\ a,b,c=\overline{m+1,n})$ касательного пространства T_n, помещая векторы e_i в касательное подпространство T_m. Тогда уравнения подмногообразия V_m будут иметь вид:

$$(2)\qquad \theta^a = 0,\ \theta^a_i = \Lambda^a_{ij}\omega^j\ \Delta\Lambda^a_{ij} + \theta^a_{ij} = \Lambda^a_{ijk}\omega^k, \Lambda^a_{[ij]}=0, \Lambda^a_{[ij]k}=0, \Lambda^a_{i[jk]}=0 (\theta=\omega|_{V_m}).$$

Зададим фундаментально-групповую связность в главном расслоении $G(V_m)$, ассоциированном с подмногообразием V_m, с помощью форм

$$\Omega^i_j = \theta^i_j - \Pi^i_{jk}\omega^k,\ \Omega^a_b = \theta^a_b - \Pi^a_{bi}\omega^i,\ \Omega^i_a = \theta^i_a - \Pi^i_{aj}\omega^j,$$

где функции Π^i_{jk}, Π^a_{bi}, Π^i_{aj} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Pi^i_{jk} + \Lambda^a_{jk}\theta^i_a + \theta^i_{jk} = \Pi^i_{jkl}\omega^l,\ \Delta\Pi^a_{bi} - \Lambda^a_{ij}\theta^j_b + \theta^a_{bi} = \Pi^a_{bij}\omega^j,\ \Delta\Pi^i_{aj} - \Pi^i_{kj}\theta^k_a + \Pi^b_{aj}\theta^i_b + \theta^i_{aj} = \Pi^i_{ajk}\omega^k.$$

Структурные уравнения форм связности имеют вид

$$d\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + K^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\ d\Omega^a_b = \Omega^c_b \wedge \Omega^a_c + K^a_{bij}\omega^i \wedge \omega^j,\ d\Omega^i_a = \Omega^j_a \wedge \Omega^i_j + \Omega^b_a \wedge \Omega^i_b + K^i_{ajk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

где компоненты объекта кривизны $K=\{K^i_{jkl}, K^a_{bij}, K^i_{ajk}\}$ выражаются по формулам

$$K^i_{jkl} = \Pi^i_{j[kl]} - \Pi^m_{j[k}\Pi^i_{ml]},\ K^a_{bij} = \Pi^a_{b[ij]} - \Pi^c_{b[i}\Pi^a_{cj]},\ K^i_{ajk} = \Pi^i_{a[jk]} - \Pi^l_{a[j}\Pi^i_{lk]} - \Pi^b_{a[j}\Pi^i_{bk]}.$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения объекта Λ^a_{ij} (2_3) и дифференциальные уравнения компонент аффинной связности Γ, соответствующих этому объекту, положим

$$(3)\qquad \overline{\Gamma}^a_{ij} = \Lambda^a_{ij}, \overline{\Gamma} = \Gamma|_{V_m}.$$

Таким образом, компоненты Γ^a_{ij} объекта аффинной связности Γ, ограниченные на подмногообразии V_m, охвачены в случае данного подмногообразия V_m. Из (2_6) следует, что должны выполняться равенства $\overline{\Gamma}^a_{i[jk]} + \overline{\Gamma}^a_{b[j}\Lambda^b_{ik]} - \overline{\Gamma}^l_{i[j}\Lambda^a_{lk]} = 0$.

Вывод. Редукция тензора аффинной кривизны R, задаваемой объектом Γ, к тензору кривизны K фундаментально-групповой связности, задаваемой объектом Π, возможна, если подобъект аффинной связности $\overline{\Gamma}_0 = \{\overline{\Gamma}^i_{jk}, \overline{\Gamma}^i_{aj}, \overline{\Gamma}^a_{bi}\}$ отождествлен с объектом связности Π и выполняются равенства (3).

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта , ул. А. Невского, 14, Калининград, 236041, Россия

E-mail address: baschaschina@mail.ru

ТЕНЗОР КРУЧЕНИЯ СВЯЗНОСТИ НЕЙФЕЛЬДА МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА

ОЛЬГА БЕЛОВА

В проективном пространстве P_n рассмотрим многообразие Грассмана $Gr(m,n)$ [1], т.е. многообразие всех m – мерных плоскостей. Произведем специализацию подвижного репера $\{A_a, A_\alpha\}$ $(a,\ldots = \overline{0,m};\ \alpha,\ldots = \overline{m+1,n})$, помещая вершины A_a на образующую плоскость L_m. Базисные формы ω_a^α многообразия Грассмана $Gr(m,n)$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \omega_{a\beta}^{\alpha b},$$

где $\omega_{a\beta}^{\alpha b} = \delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b$. Находим внешние дифференциалы от последних форм

$$D\omega_{a\beta}^{\alpha b} = \omega_{c\beta}^{\gamma b} \wedge \omega_{a\gamma}^{\alpha c} + \omega_c^\gamma \wedge \omega_{a\beta\gamma}^{\alpha bc},$$

где $\omega_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} = -\delta_a^b \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^c - \delta_\beta^\alpha \delta_a^c \omega_\gamma^b$.

Над многообразием Грассмана $Gr(m,n)$ возникает главное расслоение касательных линейных реперов $L(Gr(m,n))$. Типовым слоем расслоения $L(Gr(m,n))$ является линейная группа $L = GL((m+1)(n-m))$, $dimL = (m+1)^2(n-m)^2$, действующая в касательном пространстве к многообразию $Gr(m,n)$.

В главном расслоении $L(Gr(m,n))$ зададим связность Нейфельда [2, 3]. Введем новые формы

$$\tilde\omega_{a\beta}^{\alpha b} = \omega_{a\beta}^{\alpha b} - \Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}\omega_c^\gamma.$$

Рассмотрим дифференциалы этих форм

$$D\tilde\omega_{a\beta}^{\alpha b} = \tilde\omega_{c\beta}^{\gamma b} \wedge \tilde\omega_{a\gamma}^{\alpha c} + \omega_c^\gamma \wedge (\Delta\Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} + \omega_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}) + \Gamma_{c\beta\mu}^{\gamma be}\Gamma_{a\gamma\eta}^{\alpha cd}\omega_d^\eta \wedge \omega_e^\mu.$$

Связность в главном расслоении $L(Gr(m,n))$ задается с помощью поля объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}\}$ на базе $Gr(m,n)$ уравнениями

$$\Delta\Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} + \omega_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} = \Gamma_{a\beta\gamma\mu}^{\alpha bcd}\omega_d^\mu,$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} = d\Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} + \Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bd}\omega_d^c + \Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha dc}\omega_d^b + \Gamma_{a\beta\gamma}^{\mu bc}\omega_\mu^\alpha - \Gamma_{a\beta\mu}^{\alpha bc}\omega_\gamma^\mu - \Gamma_{a\mu\gamma}^{\alpha bc}\omega_\beta^\mu - \Gamma_{d\beta\gamma}^{\alpha bc}\omega_a^d.$$

Подставляя в структурные уравнения базисных форм многообразия Грассмана формы связности $\tilde\omega$, приходим к следующим уравнениям

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \tilde\omega_{a\beta}^{\alpha b} + S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}\omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma,$$

где компоненты объекта кручения S выражаются по формулам

$$S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} = \Gamma^{\alpha}_{a}{}^{[bc}_{[\beta\gamma]}.$$

Здесь квадратные скобки означают альтернирование по крайним парам индексов.

Учитывая дифференциальные сравнения компонент объекта Γ, приходим к следующим сравнениям по модулю базисных форм

$$\Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} \equiv 0.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Объект кручения S индуцированной связности Нейфельда многообразия Грассмана является тензором.*

Список литературы

[1] O. Belova, *Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes* // Journal of Mathematical Sciences. New York: Springer, **162**:5, 605–632 (2009).

[2] М.А. Малахальцев, *О внутренней геометрии связности Нейфельда* // Изв. вузов. Матем., **2**, 67–69 (1986).

[3] А.П. Норден, *Проективные метрики на грассмановых многообразиях* // Изв. вузов. Матем., **11**, 80–83 (1981).

Балтийский федеральный университет имени И. Канта, ул. А. Невского, 14, Калининград, 236016, Россия

E-mail address: olgaobelova@mail.ru

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

РАДА БОГДАНОВА, ГЕННАДИЙ МИХАЙЛИЧЕНКО

Трехмерные геометрии задаются на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ метрической (двухточечной) функцией $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$, сопоставляющей паре точек $\langle ij \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ действительное число $f(ij) \in R$ (см. [1], §4). Невырожденность метрической функции f в ее локальном координатном представлении

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) \tag{1}$$

записывается в виде следующих двух неравенств:

$$\frac{\partial(f(ik), f(il), f(im))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(kj), f(lj), f(mj))}{\partial(x_j, y_j, z_j)} \neq 0 \tag{2}$$

для плотных $\mathfrak{M}^4$ множеств четверок точек $\langle iklm \rangle$ и $\langle klmj \rangle$. Выполнение аксиом обычной метрики в отношении функции f не предполагается, поэтому ее значение $f(ij)$ для пары $\langle ij \rangle$ в общем случае не является расстоянием между точками i и j. Феноменологическая симметрия (ФС) ранга 5 трехмерной геометрии, задаваемой метрической функцией (1), выражается уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(im), f(jk), f(jl), f(jm), f(kl), f(km), f(lm)) = 0, \tag{3}$$

справедливым для открытого и плотного в $\mathfrak{M}^5$ множества пятерок точек $\langle ijklm \rangle$. Заметим, что в отличие от Блюменталя [2], вид функции Φ в левой части уравнения (3) заранее не задется. Предполагается только, что такая функция существует. В работе [3] установлено, что ФС ранга 5 трехмерной геометрии эквивалентна ее групповой симметрии степени 6. Следует отметить, что трехмерные ФС-геометрии являются геометриями максимальной подвижности.

Целью данной работы является вывод явного вида уравнения феноменологической симметрии для особого трехмерного расширения плоскости Евклида, симплциальных пространств I, II типов и симплектического пространства, метрические функции которых в надлежащим образом выбранной системе локальных координат имеют следующий вид (см. работы [1],[4]):

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp 2(z_i + z_j); \tag{4}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_i}{x_i - x_j} + z_i + z_j; \tag{5}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \cdot \frac{1}{z_i z_j}, \tag{6}$$

которое эквивалентно канонической форме

$$f(ij) = \frac{y_i - y_i}{x_i - x_j} \exp(z_i + z_j); \tag{6'}$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j, \tag{7}$$

где (x_i, y_i) и (x_j, y_j) — координаты точек i и j.

Теорема 1. *Уравнением, выражающим феноменологическую симметрию особого трехмерного расширения плоскости Евклида, задаваемого на трехмерном многообразии метрической функцией (4), является уравнение вида:*

$$\begin{vmatrix} 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) & f(im) \\ f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) & f(jm) \\ f(ik) & f(jk) & 0 & f(kl) & f(km) \\ f(il) & f(jl) & f(kl) & 0 & f(lm) \\ f(im) & f(jm) & f(km) & f(lm) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 2. *Уравнением, выражающим феноменологическую симметрию симплициального пространства I типа, задаваемого на трехмерном многообразии метрической функцией (5), является уравнение вида:*

$$S(jk)\begin{vmatrix} R(ik)f(ij)\times R(jk)R(il)f(ij) & R(ij)f(il)\times R(il)R(km)f(im) \\ R(ik)f(ij)\times R(jk)R(im)f(ij) & R(ij)f(im)\times R(im)R(kl)f(il) \end{vmatrix} = 0,$$

где $R(ij) = 1 - \pi(ij)$ *— оператор альтернирования,*$S(ij) = 1 + \pi(ij)$ *— оператор симметризации, в которых* $\pi(ij)$ *— оператор перестановки.*

Теорема 3. *Уравнением, выражающим феноменологическую симметрию симплициального пространства II типа, задаваемого на трехмерном многообразии метрической функцией (6), является уравнение вида:*

$$\begin{vmatrix} f(ij)f(km)f(lm) + f(kl)f(im)f(jm) & f(ij)f(kl) & 1 \\ f(ik)f(jm)f(lm) + f(jl)f(im)f(km) & f(ik)f(jl) & 1 \\ f(jk)f(im)f(lm) + f(il)f(jm)f(km) & f(jk)f(il) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 4. *Уравнением, выражающим феноменологическую симметрию симплектического пространства, задаваемого на трехмерном многообразии метрической функцией (7), является уравнение (8) или эквивалентное ему уравнение (8'):*

$$\begin{gathered} f(ij)(f(kl) - f(km) + f(lm)) - f(ik)(f(jl) - f(jm) + f(lm)) + f(il)(f(jk) - \\ - f(jm) + f(km)) - f(im)(f(jk) - f(jl) + f(kl)) + f(jk)f(lm) - \\ - f(jl)f(km) + f(kl)f(jm) = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) & f(im) \\ -1 & -f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) & f(jm) \\ -1 & -f(ik) & -f(jk) & 0 & f(kl) & f(km) \\ -1 & -f(il) & -f(jl) & -f(kl) & 0 & f(lm) \\ -1 & -f(im) & -f(jm) & -f(km) & -f(lm) & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{8'}$$

Список литературы

[1] Г.Г. Михайличенко, *Двумерные геомтерии: монография* / Михайличенко Г.Г. – Барнаул, БГПУ, 2004

[2] Г.Г. Михайличенко, *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии* // Сиб. ма. журн., 1984, Т. 25, ќ 5, С. 99-113.

[3] L.M. Blumental Theory and application of distance geometry./Blumental L.M. - Oxford, 1953

[4] Г.Г. Михайличенко, *Математические основы и результаты теории физических структур: Монография* /Михайличенко Г.Г. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012, - 146 с.

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

E-mail address: bog-rada@yandex.ru

E-mail address: mikhailichenko@gasu.ru

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ПОЧТИ КОНТАКТНОГО МНОГООБРАЗИЯ КЭЛЕРА-ЭЙНШТЕЙНА

АЛИЯ БУКУШЕВА

Почти контактное метрическое пространство $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, M, D)$ называется почти контактным кэлеровым пространством [1], если выполняются условия $d\Omega = 0$, $N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi}$. В работе [2] было показано, что почти контактная кэлерова структура может быть определена естественным образом на распределении нулевой кривизны сасакиева многообразия. Назовем многообразие M почти контактным пространством Кэлера-Эйнштейна, если относительно почти контактной кэлеровой структуры многообразие M является многообразием Эйнштейна.

Определим на распределении D почти контактного метрического многообразия как на гладком многообразии почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, G, D)$, полагая $G(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_a) = G(\partial_{n+a}, G_{n+b}) = g_{ab}$, $G(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = G(\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}) = G(\vec{u}, \partial_{n+b}) = 0$, $G(\vec{u}, \vec{u}) = 1$, $J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a$, $J(\vec{u}) = \vec{0}$.

Имеет место

Теорема. *Пусть M — многообразие Сасаки-Эйнштейна [3]. Тогда распределение D с почти контактной метрической структурой $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, G, D)$ является почти контактным пространством Кэлера-Эйнштейна, если тензор Схоутена [2]*

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{x} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}]$$

обращается в нуль.

Список литературы

[1] С. Галаев, *Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны* // Изв. Вузов, Математика, **8**, 42–52 (2014).

[2] С. Галаев, *Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью* // Математические заметки СВФУ, **22**:1, 25–34 (2015).

[3] C. Boyer, K. Galicki *On Sasakian-Einstein Geometry* // Int. J. Math., **11**, 873–909 (2000).

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: bukusheva@list.ru

ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ НА ДВУХТОЧЕЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ВАЛЕРИЙ ВОЛЧКОВ, ВИТАЛИЙ ВОЛЧКОВ

Исследуется проблема описания ненулевых функций, имеющих нулевые интегралы по всем сферам с центрами на заданном множестве в двухточечно-однородном пространстве X. Для соответствующего интегрального преобразования (преобразование Радона на сферах) найдено описание ядра, получены точная теорема единственности и локальная теорема о двух радиусах.

Относительно всех используемых ниже обозначений см. [1]. Для фиксированных $0 < R \leqslant \operatorname{diam} X$ и $r \in (0, R)$ положим

$$\mathcal{V}_r(B_R) = \left\{ f \in L^{\mathrm{loc}}(B_R) : f \times \chi_t \big|_{S_r} = 0 \quad \forall\, t \in (0, R-r) \right\},$$

где χ_t – индикатор шара B_t. Пусть

$$N_{k,m}(r) = \left\{ \lambda > 0 : \Phi_\lambda^{k,m}(\Omega(r)) = 0 \right\}.$$

Основные сведения о нулях λ функции $\Phi_\lambda^{k,m}(\Omega(r))$ приводятся в [1]. Отметим, что для любых $r \in (0, \operatorname{diam} X)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le m \le M_X(k)$ множество $N_{k,m}(r)$ является счетным и не имеет конечных предельных точек.

Теорема 1. *Пусть $f \in L^{\mathrm{loc}}(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in \mathcal{V}_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $k \ge 0$, $0 \le m \le M_X(k)$ и $j \in \left\{1, \dots, d_X^{k,m}\right\}$ имели место равенства*

$$f^{k,m,j} = \sum_{\lambda \in N_{k,m}(r)} c_{\lambda,k,m,j}\ \Phi_\lambda^{k,m,j}, \tag{1}$$

$$c_{\lambda,k,m,j} = \left(\int\limits_{B_r} \left| \Phi_\lambda^{k,m,j}(x) \right|^2 d\mu(x) \right)^{-1} \int\limits_{B_r} f^{k,m,j}(x)\, \overline{\Phi_\lambda^{k,m,j}(x)}\, d\mu(x),$$

где ряд (1) сходится в пространстве распределений $\mathcal{D}'(B_R)$ и

$$c_{\lambda,k,m,j} = O\left(\lambda^{2\alpha_X + k + 2}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Одним из приложений теоремы 1 является следующая теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть $0 < r < R \leqslant \operatorname{diam} X$, $f \in L^{\mathrm{loc}}(B_{2r-R,\,R})$ и выполнены следующие условия:*

1) *$f = 0$ в $B_{2r-R,\,r}$;*
2) *$\int\limits_{S_t(x)} f\, d\omega = 0$ при всех $x \in S_r$ и почти всех $t \in (0, R-r)$.*

Тогда $f = 0$ в $B_{2r-R,\,R}$.

Определим множество $N(r_1, r_2)$ равенством

$$N(r_1, r_2) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{M_X(k)} \left(N_{k,m}(r_1) \cap N_{k,m}(r_2) \right).$$

Теорема 3. *Пусть $\max\{r_1, r_2\} < R \leqslant \operatorname{diam} X$. Тогда:*

(i) *если $R \geqslant r_1 + r_2$, $N(r_1, r_2) = \varnothing$ и $f \in \mathcal{V}_{r_1}(B_R) \cap \mathcal{V}_{r_2}(B_R)$, то $f = 0$;*
(ii) *если $R < r_1 + r_2$, то существует ненулевая бесконечно дифференцируемая на B_R функция $f \in \mathcal{V}_{r_1}(B_R) \cap \mathcal{V}_{r_2}(B_R)$.*

(iii) *если* $N(r_1, r_2) \neq \varnothing$, *то существует ненулевая вещественно-аналитическая в* B_R *функция* $f \in \mathcal{V}_{r_1}(B_R) \cap \mathcal{V}_{r_2}(B_R)$.

Относительно других результатов, связанных с преобразованием Радона на двухточечно-однородных пространствах см. [2]–[4] и имеющуюся там библиографию.

Список литературы

[1] В.В. Волчков, Вит.В. Волчков, *Сферические средние на двухточечно-однородных пространствах и их приложения* // Известия РАН. Серия матем., **77**:2, 3–34 (2013).

[2] V.V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations* // Kluwer, Dordrecht, 2003.

[3] V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group* // Springer-Verlag, London, 2009.

[4] V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov, *Offbeat integral geometry on symmetric spaces* // Birkhäuser, Basel, 2013.

Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24, Донецк, 83001

E-mail address: `valeriyvolchkov@gmail.com, volna936@gmail.com`

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

СЕРГЕЙ ГАЛАЕВ

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m+1$, $m \geq 1$. Будем говорить, что заданные на многообразии M почти контактные метрические структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, $(M, \vec{\xi}, \eta, \tilde{\varphi}, \tilde{g}, D)$ находятся в проективном соответствии (связаны геодезическим преобразованием), если они имеют общие геодезические. Пусть $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n; a, b, c = n-1)$ — коэффициенты связности Леви-Чивита метрических тензоров $\tilde{g}$ и g, заданные в адаптированной системе координат [1]. Хорошо известно, что для коэффициентов находящихся в проективном соответствии связностей выполняются следующие соотношения: $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta} p_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma} p_{\beta}$, где p_c — некоторый ковектор. Со всякой почти контактной метрической структурой ассоциируется внутренняя связность, коэффициенты которой в адаптированной системе координат имеют следующий вид [1]: $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. При этом допустимые геодезические определяются уравнениями $\frac{d^2x^a}{dt^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{dt}\frac{dx^c}{dt} = 0$, $\frac{dx^n}{dt} = -\Gamma^n_a \frac{dx^a}{dt}$. Известно [2], что почти контактные структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, $(M, \vec{\xi}, \eta, \tilde{\varphi}, \tilde{g}, D)$ имеют общие допустимые геодезические тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} + \delta^a_b q_c + \delta^a_c q_b$, где q_c — допустимый ковектор.

Теорема 1. *[1] Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:* $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\Gamma^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}$, $\Gamma^b_{an} = \Gamma^b_{na} = C^b_a - \varphi^b_a$, $\Gamma^n_{n\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{nn} = 0$.

Для К-контактных метрических многообразий [1] выражения для коэффициентов связности Леви-Чивита имеют более простой вид: $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\Gamma^n_{ab} = \omega_{ba}$, $\Gamma^b_{an} = \Gamma^b_{na} = -\varphi^b_a$, $\Gamma^n_{n\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{nn} = 0$.

Теорема 2. *Если К-контактные метрические структуры* $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, $(M, \vec{\xi}, \eta, \tilde{\varphi}, \tilde{g}, D)$ *находятся в проективном соответствии, то они имеют общие допустимые геодезические.*

Список литературы

[1] С. Галаев, *Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **12**:1, 16–22 (2012).

[2] В. Вагнер, *Геометрия $(n-1)$–мерного неголономного многообразия в n–мерном пространстве* // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941, **5**, 173–255 (1941).

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: sgalaev@mail.ru

ТРИ МИНИМАЛЬНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИИ КВАТЕРНИОННОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

ДЕНИС ГОРОДКОВ

Задача о нахождении минимальных по количеству вершин триангуляций многообразия — классическая задача комбинаторной топологии. Под триангуляцией мы всегда подразумеваем симплициальную триангуляцию. *Комбинаторным многообразием* называется симплициальный комплекс, такой что линк каждой его вершины кусочно линейно гомеоморфен границе симплекса. Если триангуляция многообразия имеет мало вершин, то это накладывает на многообразие ограничения. В частности, имеется следующий результат:

Теорема. (Брем, Кюнель, [1]) *Пусть M^n – комбинаторное многообразие с m вершинами. Тогда если $m < \lceil 3n/2 \rceil + 3$, то M^n кусочно линейно гомеоморфно сфере, а если $m = 3n/2 + 3$, то M^n может быть не кусочно линейно гомеоморфно сфере, только если $n = 2, 4, 8$ и, возможно, 16. В этом случае M^n является многообразием Илса–Кюйпера, то есть допускает функцию Морса с тремя критическими точками в смысле статьи* [2].

В гладком случае частный пример многообразия Илса–Кюйпера – проективные плоскости. Если найдется триангуляция соответствующей проективной плоскости в $3n/2 + 3$ вершины, то она автоматически является минимальной по количеству вершин.

В размерностях $n = 2$ и $n = 4$ такие комбинаторные многообразия единственны и являются минимальными триангуляциями вещественной и комплексной проективных плоскостей соответственно. В размерности $n = 8$ Брем и Кюнель [3] нашли 3 примера комбинаторных многообразий с 15 вершинами M^8_{15}, $\widetilde{M}^8_{15}$ и $\widetilde{\widetilde{M}}^8_{15}$, которые являются многообразиями Илса–Кюйпера и кусочно линейно гомеоморфны друг другу. Однако им не удалось доказать, что эти многообразия кусочно линейно гомеоморфны кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^2$.

Многообразия Илса–Кюйпера классифицируются своими числами Понтрягина с точностью до кусочно линейного гомеоморфизма [2]. Наш основной результат состоит в подсчете чисел Понтрягина примеров Брема и Кюнеля посредством реализации алгоритма Гайфуллина [4] подсчета первого класса Понтрягина комбинаторного многообразия.

Теорема. *Первый класс Понтрягина $p_1(M^8_{15})$ равен $2u$, где u – одна из двух порождающих группы $H^4(M^8_{15}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.*

Отсюда следует, что многообразия M^8_{15}, $\widetilde{M}^8_{15}$ и $\widetilde{\widetilde{M}}^8_{15}$ кусочно линейно гомеоморфны $\mathbb{H}P^2$ и являются минимальными триангуляциями $\mathbb{H}P^2$.

Список литературы

[1] U. Brehm, W. Kühnel, *Combinatorial manifolds with few vertices* // Topology, **26**, 465–473 (1987).

[2] J. Eells, N. H. Kuiper, *Manifolds which are like projective planes* // Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci., **14**, 181—222 (1962).

[3] U. Brehm, W. Kühnel, *15-vertex triangulations of 8-manifolds* // Math. Ann., **794**, 167–193 (1992).

[4] А. А. Гайфуллин, *Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина* // Изв. РАН. Сер. матем., **68**:5, 13–66 (2004).

[5] Д. Городков, *Минимальная триангуляция кватернионной проективной плоскости* // УМН, в печати.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, ул. Губкина, д.8, Москва, 119991, Россия

E-mail address: denis.gorod@mi.ras.ru

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ВИРТУАЛЬНЫХ КОС И ИНВАРИАНТЫ ВИРТУАЛЬНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

КОНСТАНТИН ГОТИН

В 2011 году С. Бигелоу, Э. Рамос и Р. Йи построили представление группы классических $\mathcal{B}_n$ кос в подалгебру плоских диаграмм $\mathbb{C}P_n$ ладейной алгебры $\mathbb{C}R_n$. В докладе показано, что это представление может быть продолжено до представления группы виртуальных кос $V\mathcal{B}_n$ в ладейную алгебру $\mathbb{C}R_n$, с помощью которого строится инвариант виртуальных зацеплений и серия инвариантов для замыканий виртуальных кос на двух нитях.

Список литературы

[1] T. Kadokami, *Classification of closed virtual 2-braids*, // J. Knot Theory Ramifications, **17** 1223–1239 (2008)

[2] L. Kauffman, S. Lambropoulou, *Virtual Braids and the L-Move*, // J. Knot Theory Ramifications, **15** 773–811 (2006)

[3] S. Bigelow, E. Ramos, R. Yi, *The Alexander and Jones polynomials through representation of rook algebras*, // J. Knot Theory Ramifications, **21** 234–251 (2012)

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: gktin@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант номер 16-01-00414).

(q_1, q_2)-КВАЗИМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

АЛЕКСАНДР ГРЕШНОВ

Пусть заданы положительные числа q_1, q_2 и множество X. Функция $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая аксиоме тождества, называется (q_1, q_2)–*квазиметрикой*, если выполняется (q_1, q_2)-*обобщенное неравенство треугольника*

$$\rho_X(x,z) \le q_1\rho_X(x,y) + q_2\rho_X(y,z) \quad \forall x,y,z \in X. \tag{1}$$

Пара (X, ρ_X) называется (q_1, q_2)-*квазиметрическим пространством.* Если (q_1, q_2)-квазиметрика ρ_X удовлетворяет для заданного $q_0 > 0$ дополнительному условию

$$\rho_X(x,y) \le q_0\rho_X(y,x) \ \forall x,y \in X \quad (q_0 - \textit{симметрия}), \tag{2}$$

то будем называть ее q_0-*симметрической*, а пару (X, ρ_X) — q_0-*симметрическим* (q_1, q_2)–*квазиметрическим пространством.* Если $q_0 = 1$, то пару (X, ρ_X) будем называть *симметрическим* (q_1, q_2)-*квазиметрическим пространством.* Если $q_1 = q_2 = 1$, то ρ_X — квазиметрика, а (X, ρ_X) — квазиметрическое пространство, если же $q_0 = q_1 = q_2 = 1$, то ρ_X — метрика, а (X, ρ_X) — это обычное метрическое пространство.

Концепция (q_1, q_2)-квазиметрических пространств была введена в работе [1] в связи с развитием теории точек совпадения двух отображений, удовлетворяющих предположению о том, что одно из этих отображений является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица.

Топология (q_1, q_2)-квазиметрических пространств может быть устроена весьма непросто. В недавней работе [2] были изучены топологические свойства более общих f-квазиметрических пространств.

Рассмотрим произвольную функцию $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такую, что $f(x,y) \to 0$ при $x^2 + y^2 \to 0$. Пара (X, d) называется f-*квазиметрическим пространством*, если функция $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет аксиоме тождества и следующему f-неравенству треугольника $d(x,z) \le f(d(x,y), d(y,z))$. Изучение f-квазиметрик восходит к работе М. Фреше [3].

В настоящем сообщении мы расскажем о недавних достижениях в этом направлении.

Список литературы

[1] А. Арутюнов, А. Грешнов, *Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения*// ДАН, **469**:5 (2016).

[2] A. Arutyunov, A. Greshnov, L. Lokutsievskii, K. Storojuk *Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetric* // Top. Appl. (2016) (to appear).

[3] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*// Palermo Rend., **22** (1906).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: greshnov@math.nsc.ru

Грант РФФИ 14–01–00768.

НЕЗАМКНУТЫЕ АРХИМЕДОВЫ КОНУСЫ

АЛЕКСАНДР ГУТМАН, АНАТОЛИЙ МАТЮХИН

Под *клином* будем понимать непустое выпуклое подмножество K векторного пространства (здесь и далее все векторные пространства предполагаются вещественными), удовлетворяющее условию $(\forall\,\alpha\geqslant 0)(\alpha K\subset K)$. Клин K будем называть *конусом*, если $K\cap(-K)=\{0\}$. Как хорошо известно, в любом (пред)упорядоченном векторном пространстве $(X,\leqslant)$ множество $\{x\in X : x\geqslant 0\}$ является конусом (клином). Наоборот, если в векторном пространстве X фиксирован некоторый конус (клин) K, то порядок $\leqslant_K$, определенный правилом $x\leqslant_K y\Leftrightarrow y-x\in K$, превращает X в (пред)упорядоченное векторное пространство.

(Пред)упорядоченное векторное пространство $(X,\leqslant)$ называют *архимедовым*, если для любых элементов $x,y\in X$ $(y\geqslant 0)$ из условия $(\forall\,n\in\mathbb{N})(x\leqslant\frac{1}{n}y)$ следует, что $x\leqslant 0$. Конус (клин) K в векторном пространстве X называют *архимедовым*, если архимедово соответствующее (пред)упорядоченое пространство $(X,\leqslant_K)$. Обобщая понятие архимедова клина, назовем произвольное выпуклое множество $C\subset X$ *архимедовым*, если для любых элементов $x,y\in X$ условие $(\forall\,n\in\mathbb{N})(x+\frac{1}{n}y\in C)$ влечет $x\in C$. Несложно понять, что для клиньев это определение равносильно приведенному выше.

Основные сведения об архимедовых конусах можно почерпнуть из [1].

Следующее предложение более полно раскрывает понятие архимедова множества.

Предложение. *Пусть X — векторное пространство, $C\subset X$ — выпуклое множество. Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) C архимедово;

(b) для любых $x,y\in X$ условие $(\exists\,\varepsilon>0)(x+]0,\varepsilon]y\subset C)$ влечет $x\in C$;

(c) множество $X\setminus C$ совпадает со своей алгебраической внутренностью;

(d) пересечение C с любой прямой замкнуто;

(e) пересечение C с любым конечномерным подпространством X замкнуто.

Отметим, что выпуклое множество, секвенциально замкнутое в какой-либо векторной топологии, очевидно, является архимедовым. Чтобы дать еще одно описание понятия архимедова множества, введем вспомогательное определение. Топологическое векторное пространство будем называть *секвенциально тотальным*, если все линейные функционалы на нем секвенциально непрерывны.

Лемма. *Пусть X — секвенциально тотальное пространство, $C\subset X$ — выпуклое множество. Тогда архимедовость C эквивалентна секвенциальной замкнутости C.*

Представляет интерес задача описания класса топологических векторных пространств, содержащих незамкнутые архимедовы конусы. Ниже приводятся основные результаты, полученные на пути к решению данной задачи, а также ее вариаций (в формулировке вопроса конусы могут быть заменены на клинья, а отсутствие замкнутости — на отсутствие секвенциальной замкнутости). Сразу отметим, что в конечномерных пространствах все архимедовы клинья (более того, все архимедовы выпуклые множества) замкнуты.

Критерий существования архимедовых конусов либо клиньев, не являющихся секвенциально замкнутыми, удается получить сравнительно несложно.

Лемма. *Пусть X — топологическое векторное пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(a) X секвенциально тотально;

(b) любой архимедов клин в X секвенциально замкнут;

(c) любой архимедов конус в X секвенциально замкнут.

Основная задача решена для широкого класса топологических векторных пространств несчетной размерности.

Теорема. *Любое локально выпуклое пространство несчетной размерности содержит незамкнутый архимедов конус.*

Для пространств счетной размерности на данный момент удалось получить лишь критерий существования незамкнутого архимедова клина.

Теорема. *Топологическое векторное пространство счетной размерности содержит незамкнутый архимедов клин тогда и только тогда, когда на нем есть разрывный линейный функционал.*

Следующие теоремы помогают «очертить» границы класса пространств счетной размерности, содержащих незамкнутые архимедовы конусы.

Теорема. *В топологическом векторном пространстве, содержащем незамкнутое линейно независимое множество, существует незамкнутый архимедов конус.*

Теорема. *В топологическом векторном пространстве счетной размерности, на котором все линейные функционалы непрерывны, все архимедовы выпуклые множества замкнуты.*

Гипотеза. *Пусть X — топологическое векторное пространство счетной размерности. Для существования в X незамкнутого архимедова конуса необходимо и достаточно существование разрывного линейного функционала на X.*

Гипотеза. *Пусть X — топологическое векторное пространство счетной размерности. Для существования в X незамкнутого архимедова конуса необходимо и достаточно существование незамкнутого линейно независимого подмножества X.*

Две приведенных гипотезы не являются равносильными: можно привести пример топологического векторного пространства счетной размерности, в котором все линейно независимые множества замкнуты, но не все линейные функционалы непрерывны.

Основные результаты исследования опубликованы в [2].

Список литературы

[1] C. D. Aliprantis, R. Tourky, Cones and Duality, Graduate Studies in Mathematics 84. Providence, RI: American Mathematical Society (2007).

[2] Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавказский мат. журн. 2015. Т. 17, вып. 3. С. 36-43.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия; Новосибирский государственный университет, Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: gutman@math.nsc.ru, anatoly.matyukhin@yandex.ru

МАРКОВСКИЙ ТИП И ПРОСТРАНСТВА АЛЕКСАНДРОВА

ВЛАДИМИР ЗОЛОТОВ

Метрическому пространству X можно сопоставить константу Марковского типа 2, принадлежащую $[1, \infty]$. Марковский тип был введен Боллом [1] для изучения проблемы продолжений Липшицевых отображений. Понятие Марковского типа нашло приложения в теории билипшицевых вложений [2, 3].

Охта [4] показал, что константа Марковского типа ограничена сверху абсолютной константой на множестве пространств неотрицательной кривизны по Александрову. Кроме того (см. [5]), если геодезическое пространство обладает Марковским типом 2 с константой 1, то оно является пространством неотрицательной кривизны по Александрову. Следующий вопрос является открытым.

Вопрос. *Обладают ли пространства неотрицательной кривизны по Алексанрову Марковским типом* 2 *с константой* 1*? (Андони, Наор и Нейман, см.* [6]*)*

Геометрический интерес к этому вопросу мотивирован изучением аналогов неотрицательной кривизны для дискретных пространств и в частности следующим вопросом.

Вопрос. *Пусть X конечное метрическое пространство. При каких условиях X изометрично подмножеству пространства неотрицательной кривизны по Александрову? (Громов)*

В докладе будет рассказана следующая теорема.

Теорема. *Плоские компактные римановы многообразия обладают Марковским типом* 2 *с константой* 1.

Список литературы

[1] K. Ball, *Markov chains, Riesz transforms and Lipschitz maps* // Geometric and Functional Analysis GAFA, **2**:2, 137-172 (1992).

[2] Y. Bartal, N. Linial, M. Mendel, A. Naor *On Metric Ramsey-type Phenomena* // Proceedings of the Thirty-fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 463-472 (2003).

[3] N. Linial, A. Magen, A. Naor, *Girth and Euclidean distortion* // Geometric and Functional Analysis GAFA, **12**:2, 380-394 (2002).

[4] S.-I. Ohta, *Markov Type of Alexandrov Spaces of Non-Negative Curvature* // Mathematika, **55**:1-2, 177-189 (2009).

[5] S.-I. Ohta, M. Pichot *A note on Markov type constants* // Archiv der Mathematik, **92**:1, 80-88 (2009).

[6] A. Andoni, A. Naor, O. Neiman *Snowflake universality of Wasserstein spaces* // ArXiv e-prints, 1509.08677, (2015).

Санкт-петербургское отделение математического института им. В.А.Стеклова РАН, наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191011, Россия

E-mail address: paranuel@mail.ru

ПРИМАРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ УЗЛОВ В $K^2\tilde{\times}I$

АЛЁНА КАЙГОРОДОВА

Знаменитая теорема Шуберта (1949г) утверждает, что любой нетривиальный узел в S^3 представим в виде конечной связной суммы примарных узлов, которые определены с точностью до порядка. Аналогичный результат был доказан С.В. Матвеевым для узлов геометрической степени 1 в утолщенном торе $T \times I$. Мы докажем подобный результат для узлов в $K^2\tilde{\times}I$, где K^2 — бутылка Кляйна. Будем также рассматривать узлы геометрической степени 1.

Пусть K^2 — бутылка Кляйна, тогда под *утолщенной бутылкой Кляйна* будем понимать трехмерное ориентируемое многообразие, являющееся косым произведением бутылки Кляйна на отрезок $I = [0, 1]$. *Узлом* в утолщенной бутылке Кляйна называется простая замкнутая кривая $K \subset Int(K^2\tilde{\times}I)$.

Теорема. *Любой негоризонтальный узел степени один K в $K^2\tilde{\times}I$ может быть представлен в виде круговой связной суммы $K = K_0\#K_1\#...\#K_{n-1}$, где все K_i – примарные узлы. Слагаемые определены однозначно с точностью до перестановки.*

Список литературы

[1] С. Матвеев, Корни геометрических объектов // Успехи матем. наук (2012) Т. 67, № 3(405). С. 63–114.

[2] S. Matveev, Prime decompositions of knots in $T^2 \times I$ // Topology and its Applications 159 (2012) pp. 1820-1824.

[3] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten*, 57–104 (1949).

Челябинский государственный университет, ул. Бр.Кашириных, 129, Челябинск, 454080, Россия

E-mail address: alyona.kylakova@gmail.com

Работа выполнена при поддержке грантом правительства РФ N 14.Z50.31.0020.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЖОРДАНОВЫХ ЦИППЕРОВ СО ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩЕЙСЯ СИГНАТУРОЙ

КИРИЛЛ КАМАЛУТДИНОВ, АНДРЕЙ ТЕТЕНОВ

Пусть $\{z_0, ..., z_m\}$ — набор точек в $\mathbb{R}^n$. Самоподобным циппером в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $\{z_0, ..., z_m\}$ и сигнатурой $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$; $\varepsilon_k = 0, 1$, называется такая система $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$, что для любого $k = 1, ..., m$,

$$S_k((z_0, z_m)) = (z_{k-1+\varepsilon_k}, z_{k-\varepsilon_k})$$

Циппер $\mathcal{S}$ называется жордановым, когда его аттрактор γ — жорданова дуга с концами z_0, z_m, и для любого $k = 2, ..., m$, $S_{k-1}(\gamma) \cap S_k(\gamma) = \{z_k\}$. [1]

Свойство жордановости циппера, вообще говоря, не сохраняется при малых изменениях задающих его параметров, поэтому важно выявить условия, при которых это свойство устойчиво.

Один из подходов к решению этого вопроса опирается на полученную нами в [2] теорему об общем положении для фрактальных континуумов. Мы доказываем следующий результат для ципперов со знакочередующейся сигнатурой:

Теорема. *Пусть Σ – семейство самоподобных ципперов в $\mathbb{R}^3$ с m вершинами и со знакочередующейся сигнатурой $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$, удовлетворяющих следующим условиям:*
1. $z_0 = \bar{0}$; $z_m = \bar{e}_1$;
2. Для любого k, $q_k = \mathrm{Lip} S_k < 1/3$;
3. Существует такое открытое множество $W \subset V_{1/3}([z_0, z_m])$ такое, что
a) для любых k, $S_k(W) \subset W$ и
b) для любых $k = 2, ..., m-1$, $S_k(W) \cap (V_{q_1/2}(z_0) \cup V_{q_m/2}(z_m)) = \varnothing$;
4. Размерность подобия системы $\mathcal{S}$ меньше 3/2.
Тогда подсемейство $\Sigma' \subset \Sigma$ жордановых ципперов открыто и всюду плотно в Σ..

Список литературы

[1] В.В. Асеев, А.В. Тетенов, А.С. Кравченко *О самоподобных жордановых кривых на плоскости* // Сиб. матем. журнал, **44**:3, 481–492 (2003).
[2] A. Tetenov, K. Kamalutdinov, D. Vaulin *Self-Similar Jordan Arcs Which Do Not Satisfy OSC* // arXiv:1512.00290 [math.MG].

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: kirdan15@mail.ru, atet@mail.ru

Работа поддержана грантом РФФИ 16-01-00414.

СВЯЗЬ НОТОИДОВ И УЗЛОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ 1 В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ

ФИЛИПП КОРАБЛЕВ, ЯНА МАЙ

Теория узлов была построена В.Тураевым в 2011 году. Как и классические узлы, нотоиды задаются своими диаграммами на двумерной сфере S^2.

Диаграммой нотоида на двумерной сфере называется замкнутая кривая с самопересечениями, каждая точка самопересечения снабжена информацией о проходе/переходе. На множестве диаграмм нотоидов вводится отношение эквивалентности: две диаграммы эквивалентны, если их можно связать цепочкой движений Райдемайстера, не затрагивающих концевые точки диаграмм, и изотопией двумерной сферы. Тогда нотоидом называется класс эквивалентности диаграмм.

Сложностью нотоида называется наименьшее число точек пересечения простой кривой, соединяющей его концевые точки, и его диаграммы.

Утолщенным тором называется прямое произведение двумерного тора на отрезок. Узлом в утолщенном торе называется простая замкнутая кривая. Два узла эквивалентны, если существует гомеоморфизм утолщенного тора на себя, переводящий один узел в другой. Узел имеет геометрическую степень 1, если в утолщенном торе существует такое вертикальное кольцо, что оно пересекает узел в одной точке.

В работе строится отображение поднятия, которое каждому нотоиду сопоставляет узел геометрической степени 1 в утолщенном торе. Это отображение корректно определено и является сюръективным, но оно неинъективно.

На множестве нотоидов сложности 1 вводится операция переключения. Если два нотоида сложности 1 связаны с помощью этой операции, то при отображении поднятия из них получаются эквивалентные узлы.

На множестве нотоидов вводится операция умножения. Главное свойство данной операции в том, что она некоммутативна. Нотоид называется непримарным, если его можно представить в виде произведения двух нетривиальных нотоидов.

Пусть даны два нетривиальных нотоида N_1, N_2. Построим их произведения $N_1 \cdot N_2$ и $N_2 \cdot N_1$. При отображении поднятия из построенных нотоидов получаются эквивалентные узлы.

Теорема. *Отображение поднятия инъективно для примарных нотоидов сложности не менее двух.*

Был проведен сравнительный анализ двух таблиц: таблицы нотоидов, построенной A. Bartholomew в 2013 году, и таблицы узлов в утолщенном торе, построенной А.Акимовой и С.Матвеевым в 2012 году. Анализ показал, что в таблице A.Bartholomew пропущена диаграмма одного из нотоидов с пятью перекрестками.

Список литературы

[1] V. Turaev, *Knotoids* // Osaka Journal of Mathematics, 2013, V. 49, № 1, P. 195-223.
[2] A. Akimova, S. Matveev, *Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings* // Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 2014, V. 23, Issue 6.
[3] A. Bartholomew, http://www.layer8.co.uk/maths/knotoids/index.htm.

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия
E-mail address: ykilyina@gmail.com

Работа поддержана грантом правительства РФ No 14.Z50.31.0020.

СУБЛАГРАНЖЕВЫ И СУБЛЕЖАНДРОВЫ ПОДМНОГООБРАЗИЯ

ЕВГЕНИЙ КОРНЕВ

Пусть α — незамкнутая 1-форма на многообразии M. Радикалом 1-формы α мы называем гладкое распределение касательных подпространств

$$\mathrm{rad}\alpha = \bigcup_{x\in M} \mathrm{rad}\alpha_x : \mathrm{rad}\alpha_x = \{v \in T_xM : d\alpha(v, .) = 0\}.$$

Если распределение $\mathrm{rad}\alpha$ является регулярнным, 1-форма α называется регулярной, а ранг этого распределения называется рангом радикала 1-формы α. Пусть g — риманова метрика на M и D — распределение ортогональное распределению $\mathrm{rad}\alpha$ относительно метрики g. Распределение D будем называть рабочим расслоением. Теперь, мы можем определить аффинорную метрическую структуру на многообразии M. Это четверка (α, D, Φ, g), где Φ — аффинор, связывающий метрику g и внешнюю 2-форму $d\alpha$. Ядро аффинора Φ есть радикал 1-формы α.

По теореме Рисса о линейном функционале на M существует единственное векторное поле $\xi : \alpha = g(\xi, .)$. Такое векторное поле называется характеристическим векторным полем аффинорной метрической структуры. В отличии от контактных метрических структур, здесь мы считаем, что 1-форма α имеет радикал произвольного ранга больше 0. Поскольку ограничение вырожденной 2-формы $d\alpha$ на рабочее расслоение D невырождено, то ранг рабочего расслоения всегда есть четное число. Аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, g) называется строгой, если $\xi \in \mathrm{rad}\alpha$. Для строгих аффинорных метрических структур рабочее расслоение D всегда лежит в $\ker\alpha$.

Подмногообразие Q называется сублежандровым, если оно касается рабочего расслоения D во всех своих точках. Сублежандрово подмногообразие Q называется сублагранжевым, если его размерность максимальна, но не ниже 2, и $d\alpha|_Q \equiv 0$. В случае, когда $\mathrm{rad}\alpha = \{0\}$, сублагранжево подмногообразие есть классическое лагранжево подмногообразие; а в случае строгой аффинорной метрической структуры с радикалом ранга 1, сублежандрово подмногообразие есть классическое лежандрово подмногообразие. Для сублагранжевых подмногообразий можно доказать следующий результат:

Теорема. *Если ранг рабочего расслоения D равен $2n \geq 4$, и $D \subseteq \ker\alpha$, то распределение D является неголономным, и размерность любого сублагранжева подмногообразия не превышает n.*

В случае, когда аффинорная метрическая структура не является строгой и ее рабочее расслоение является голономным распределением ранга $2n \geq 4$, размерность сублагранжева подмногообразия не может превышать $2n-1$, хотя в M существуют сублежандровы подмногообразия размерности $2n$. Кроме того, мы доказываем, что для строгой аффинорной метрической структуры с рабочим расслоением ранга ≥ 4 любое сублежандрово подмногообразие максимальной размерности является сублагранжевым подмногообразием. Также, мы приводим различные условия и примеры, когда сублежандрово подмногообразие размерности 2 содержится в нетривиальном сублагранжевом подмногообразии. В частности, если характеристическое векторное поле ξ аффинорной метрической структуры и векторное поле $\Phi\xi$ касаются сублежандрова подмногообразия Q во всех его точках, то подмногообразие Q не может лежать в сублагранжевом подмногообразии. Кроме того, любое сублежандрово подмногообразие вещественной размерности 2, на котором существуют трансверсальные векторные поля X и $Y : Y = \Phi X$ есть комплексная кривая на

Работа поддержена президентским грантом по поддержке научных школ № НШ-9740.2016.1.

M. Если эта комплексная кривая касается $\ker\alpha$ во всех своих точках, то в M существует нетривиальное сублагранжево подмногообразие.

Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: q148@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПСЕВДООБЪЕМА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА

ЕКАТЕРИНА КУДИНА

Цель работы показать что классическая теорема Штейнера ([1], стр. 99) остается справедливой для псевдообъема гиперболического тетраэдра, но перестает быть верной для его неевклидова объема.

Рассмотрим в качестве модели гиперболической геометрии $\mathbb{H}^3$ верхнее полупространство $R^3 = \{(x,y,t), x,y,t \in \mathbb{R}, t>0\}$, снабженное метрикой $ds^2 = (dx^2+dy^2+dt^2)/t^2$.

Реализуем гиперболические тетраэдры в верхнем полупространстве $\mathbb{H}^3$ таким образом, что взаимный перпендикуляр между скрещивающимися ребрами совпадает с вертикальной осью Ot. Тогда вершины тетраэдра будут задаваться следующими координатами:

$A = (R\cos\varphi_A, 0, R\sin\varphi_A)$;
$B = (R\cos\varphi_B, 0, R\sin\varphi_B)$;
$C = \left(\frac{1}{R}\cos\varphi_C\cos\varphi, \frac{1}{R}\cos\varphi_C\sin\varphi, \frac{1}{R}\sin\varphi_C\right)$;
$D = \left(\frac{1}{R}\cos\varphi_D\cos\varphi, \frac{1}{R}\cos\varphi_D\sin\varphi, \frac{1}{R}\sin\varphi_D\right)$

Вычисляя определитель матрицы Грамма G данного тетраэдра имеем:

$$\det(G) = -\operatorname{sh}^2\rho\sin^2\varphi\operatorname{sh}^2\rho(A,B)\operatorname{sh}^2\rho(C,D). \tag{1}$$

Теорема 1. *Псевдообъем $\widetilde{V}$ гиперболического тетраэдра, длины его противолежащих ребер $\rho(A,B)$ и $\rho(C,D)$, а также угол φ и расстояние ρ между этими ребрами связаны между собой следующим соотношением:*

$$\widetilde{V} = \operatorname{sh}\rho\sin\varphi\operatorname{sh}\rho(A,B)\operatorname{sh}\rho(C,D). \tag{2}$$

Формулы, эквивалентные формуле (1), но выраженные несколько в других геометрических терминах и доказанные совершенно другой техникой были получены в монографии В.Фенхеля ([2], p.169, формула (24)) и в неопубликованной рукописи Б. Д. С. МакКоннеля [3].

В качестве следствия из формулы (2) получим теорему Штейнера для гиперболического тетраэдра.

Теорема 2. *Псевдообъем гиперболического тетраэдра не изменяется, если его противоположные ребра перемещать без изменения длины по прямым, содержащим эти ребра.*

Для построения контрпримера к теореме Штейнера рассмотрим гиперболический тетраэдр $OABC$ с тремя попарно ортогональными гранями, пересекающимися в вершине O. Из вершины O прямого угла проведем три взаимноортогональных геодезических, направленных вдоль его ребер, которые условно будем называть осями координат Ox, Oy и Oz. Будем считать что вершины A, B, C лежат на соответствующих координатных осях.

Пусть $\operatorname{ch}x, \operatorname{ch}y, \operatorname{ch}z$ — косинусы длин сторон тетраэдра, лежащие на соответствующих координатных осях Ox, Oy и Oz. Для удобства построенный тетраэдр будем обозначать через $T(x,y,z)$.

Положим $x=y=z=u$ и рассмотрим тетраэдр $T_1 = T(u,u,u)$. На оси Oy выберем точки D, D', зеркально симметричные относительно плоскости OAC и лежащие на расстоянии $\frac{u}{2}$ от точки O. Пусть T_2 - это тетраэдр $ACDD'$. Тогда T_1 и T_2 имеет общее ребро AC длины

Работа поддержана РФФИ (грант № 16-31-50009 и грант № 15-01-07906).

b и противолежащие ей ребра OB и DD' длины u. Заметим, что ребро DD' получается из ребра OB параллельным сдвигом вдоль оси Oy. Таким образом, тетраэдры T_1 и T_2 удовлетворяют условиям теоремы Штейнера. Наша цель показать, что они имеют разные гиперболические объемы.

Лемма 1. *Гиперболический объем тетраэдра $Vol(T_1)$ находится по формуле*

$$Vol(T_1) = \int\limits_1^{\operatorname{ch} u} f(t)dt, \tag{3}$$

где $f(t) = \dfrac{3\,arch(t^2)}{2\sqrt{1+t^2}(1+2t^2)}$.

Лемма 2. *Гиперболический объем тетраэдра T_2 находится по формуле*

$$Vol(T_2) = 2\int\limits_1^{\operatorname{ch} u} g(t)dt, \tag{4}$$

где $g(t) = \dfrac{arch(t\sqrt{\frac{1+t}{2}})(2+t)}{2(1+t+t^2)\sqrt{2+2t+t^2}} + \dfrac{arch(t^2)(1-t)}{4(1+t+t^2)\sqrt{1+t^2}}$.

По формуле Шлефли

$$d\mathrm{Vol}(T_2') = -\frac{l_\alpha}{2}d\,\alpha - \frac{l_\beta}{2}d\,\alpha - \frac{l_\gamma}{2}d\,\gamma = g(t)d\,t,$$

где $g(t)$ — та же, что и в формулировке леммы 2. Откуда, учитывая очевидное равенство $\mathrm{Vol}(T_2) = 2\mathrm{Vol}(T_2')$, имеем (4).

Нетрудно убедится, что функции, задаваемые интегралами (3) и (4) — различны. Таким образом, теорема Штейнера не верна для гиперболических объемов тетраэдров.

Список литературы

[1] Я. П. Понарин. *Элементарная геометрия: В 2 т.* - Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. – М.: МЦНМО, 2006. – 256 С.

[2] W. Fenchel, *Elementary geometry in hyperbolic space.* — Walter de Gruyter, 1989.

[3] B.D.S. McConnell, *Hedronometric formulas for a hyperbolic tetrahedron,* http://daylateanddollarshort.com/mathdocs/Hedronometric-Formulas-for-a-Hyperbolic-Tetrahedron.pdf

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

E-mail address: eskudina@hotmail.com

ПРОБЛЕМА ВЛОЖЕНИЯ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЙ

ВЛАДИМИР КЫРОВ, ГЕННАДИЙ МИХАЙЛИЧЕНКО

Рассмотрим аналитическое трехмерное многообразие M [1,2]. Пусть на M задана аналитическая функция $f : M \times M \to R$, называемая *метрической*, с открытой и плотной областью определения S_f. Выполнение метрических аксиом не предполагается. Локальные координаты в M обозначим (x, y, z).

Рассмотрим 4 точки $i, i_1, i_2, i_3 \in M$: $\langle ii_1\rangle, \langle ii_2\rangle, \langle ii_3\rangle \in S_f$, $\langle i_1 i\rangle, \langle i_2 i\rangle, \langle i_3 i\rangle \in S_f$.

Аксиома невырожденности.

$$\frac{\partial(f(ii_1), f(ii_2), f(ii_3))}{\partial(x(i), y(i), z(i))} \neq 0, \ \frac{\partial(f(i_1 i), f(i_2 i), f(i_3 i))}{\partial(x(i), y(i), z(i))} \neq 0,$$

где $(x(i), y(i), z(i))$ — координаты точки $i \in M$.

Рассмотрим теперь 5 точек $i_1, \dots, i_5 \in M$, причем $\langle i_p i_q\rangle \in S_f$, $p, q = 1, \dots, 5$, $p \neq q$.

Аксиома феноменологической симметрии. *Для некоторой окрестности последовательности точек $\langle i_1, \dots, i_5\rangle$ из открытого и плотного подмножества прямого произведения M^3 выполняется тождество:*

$$\varPhi(f(i_1 i_2), \dots, f(i_4 i_5)) = 0,$$

где $\varPhi$ — аналитическая функция, причем $rang \Phi = 1$.

Определение. *Говорят, что на многообразии M метрическая функция f задает феноменологически симметричную геометрию, если выполняются аксиомы* ***невырожденности*** *и* ***феноменологической симметрии****.*

Рассмотрим метрические функции псевдоевклидовой и симплектической плоскостей [1,2]:

$$\theta = (x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2,$$
$$\theta = x_i y_j - x_j y_i,$$

где (x_i, y_i) и (x_j, y_j) — координаты точек i и j, $\epsilon = \pm 1$, причем для евклидовой геометрии $\epsilon = +1$, а для псевдоевклидовой геометрии $\epsilon = -1$.

Цель данной работы — нахождение всех трехмерных феноменологически симметричных геометрий с метрическими функциями, в подходящих координатах принимающих вид:

$$f(ij) = f(\theta, z_i, z_j) = f((x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2, z_i, z_j) \tag{1}$$

и

$$f(ij) = f(\theta, z_i, z_j) = f(x_i y_j - x_j y_i, z_i, z_j). \tag{2}$$

Следует отметить, что геометрии с такими метрическими функциями допускают группу движений максимальной подвижности [1,2].

Теорема. *Метрическая функция $f(ij)$ трехмерной феноменологически симметричной геометрии, задаваемая формулой (1) и (2), в подходящих координатах и масштабном преобразовании (функция от метрической функции $\varphi(f) \to f$) имеет вид:*

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2 + \varepsilon(z_i - z_j)^2,$$
$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2] \exp[2z_i + 2z_j],$$
$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j,$$

где $\epsilon, \varepsilon = \pm 1$.

Заметим, что данная тема исследования поднималась в работах [3,4,5].

Список литературы

[1] Г.Г. Михайличенко, *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии* // Докл. АН СССР, **269**:2, 284–288 (1983).

[2] Г.Г. Михайличенко, *Полиметрические геометрии* // Новосибирск: Новосиб. гос. ун-е, 2001.

[3] В.А. Кыров, *Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии* // Сиб. журн. индустр. матем., **13**:4, 38–51 (2010).

[4] В.А. Кыров, *Функциональные уравнения в симплектической геометрии* // Тр. ИММ УрО РАН, **16**:2, 149–153 (2010).

[5] В.А. Кыров, *Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **26**:1, 31–38 (2012).

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

E-mail address: kyrovVA@yandex.ru

E-mail address: mikhailichenko@gasu.ru

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ ДЛЯ СГЛАЖИВАЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ АЛЕКСАНДРОВА

НИНА ЛЕБЕДЕВА
по совместной работе с А. Петруниным

Мы показываем, что если последовательность n-мерных римановых многообразий с равномерно ограничеными снизу секционными кривизнами сходится к пространству Александрова той же размерности, то последовательность тензоров кривизны сходится (в определённом слабом смысле) к мерозначному тензору на пространстве Александрова.

Список литературы

[1] S. Alexander, V. Kapovitch, A. Petrunin, *Alexandrov geometry* https://dl.dropboxusercontent.com/u/1577084/the-book.pdf

[2] G.Perelman, *DC Structure on Alexandrov Space* https://www.math.psu.edu/petrunin/papers/alexandrov/Cstructure.pdf

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, 191023

E-mail address: lebed@pdmi.ras.ru

Работа частично поддержана грантом РФФИ 14-01-00062.

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ И ДИВЕРГЕНТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ Ю. А. АМИНОВА

АЛЕКСАНДР МЕГРАБОВ

1. Доклад обобщает и развивает статьи автора в ДАН (2009, т. 424, № 5; 2010, т. 433, № 3, 4; 2011, т. 441, № 3). Пусть D — некоторая область в евклидовом E^3 пространстве с декартовыми координатами x, y, z; $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x, y, z)$ — векторное поле единичных векторов, определенное в D. Для полной кривизны второго рода K поля $\boldsymbol{\tau}$ Ю. А. Аминов (см. [1], гл. 1, § 7) установил первое дивергентное представление

$$K = \operatorname{div}\{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{P}\},$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки (x, y, z), а вектор $\boldsymbol{P}$, называемый вектором кривизны поля $\boldsymbol{\tau}$, имеет инвариантную форму [1, гл. 1, § 10] $\boldsymbol{P} = K\boldsymbol{\tau} - 2\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{K}_\tau + (\boldsymbol{K}_\tau\cdot\nabla)\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{K}_\tau = k\boldsymbol{\nu} = \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}$ — вектор кривизны кривой L_τ с касательным ортом $\boldsymbol{\tau}$ и главной нормалью $\boldsymbol{\nu}$, L_τ — векторная линия поля $\boldsymbol{\tau}$, k — ее кривизна. Символы $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ и $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ обозначают скалярное и векторное произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $(\operatorname{grad}\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$ — производная вектора $\boldsymbol{a}$ по направлению вектора $\boldsymbol{v}$, ∇ — оператор Гамильтона (набла).

2. Пусть $\{L_\tau\}$ — семейство кривых L_τ, сплошным образом заполняющих область D, и (A) через каждую точку $(x, y, z)\in D$ проходит одна и только одна кривая $L_\tau\in\{L_\tau\}$; (B) в каждой точке (x, y, z) любой кривой $L_\tau\in\{L_\tau\}$ существует (правый) базис Френе $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$ ($\boldsymbol{\beta}$ — бинормаль), так что в D определены три взаимно ортогональных векторных поля $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$; (C) $\boldsymbol{\tau}(x, y, z)\in C^2(D)$.

Найдено, что при условиях (A)–(C) поле $\boldsymbol{P}$ из формулы Ю. А. Аминова может быть представлено в виде

$$\boldsymbol{P} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*,$$

где для векторного поля $\boldsymbol{R}^*$ справедливо любое из инвариантных представлений

$$\boldsymbol{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}\operatorname{div}\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}\operatorname{div}\boldsymbol{\beta},$$
$$\boldsymbol{R}^* = [\varkappa - (\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau})]\boldsymbol{\tau} + \nabla(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{S}^*\times\boldsymbol{\tau},$$
$$\boldsymbol{R}^* = \varkappa\boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + (\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}.$$

Здесь $\varkappa$ — кручение кривой L_τ, $\boldsymbol{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta}$ — вектор Дарбу, $\nabla(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla)\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\boldsymbol{\beta}$ — скобка Пуассона для $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{S}^*$ — сумма трех векторов кривизны векторных линий L_τ, L_ν, L_β полей $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ соответственно:

$$\boldsymbol{S}^* \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_\nu + \boldsymbol{K}_\beta = \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau} + \operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu} + \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\beta})\}/2,$$
$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{K}_\tau - \boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}.$$

Отсюда следует, что упомянутое представление Ю. А. Аминова равносильно формуле

$$K = -(\operatorname{grad}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\tau})\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*)$$

и дивергентному представлению

$$K = \operatorname{div}\{\operatorname{grad}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\tau})\times\boldsymbol{R}^*\}.$$

Векторное поле $\boldsymbol{R}^*$ является также мерой различия полей $\boldsymbol{S}^*$ и $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$ в следующем смысле: $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{R}^*$. Кроме того, величина $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^* = -\boldsymbol{P}$ допускает любое из представлений

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) - k\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}) - k\boldsymbol{\beta}[\varkappa + (\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})],$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* - \varkappa\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau} - k\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{\tau}\{\varkappa^2 - \varkappa(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}) - (\boldsymbol{\tau}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}])\} - k\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}) - k\boldsymbol{\beta}[\varkappa + (\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})];$$

также имеем

$$\frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \varkappa[\varkappa - (\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau})] - (\boldsymbol{\tau}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}]),$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 2(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*),$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* = \frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) + \varkappa(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}) + k(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}).$$

Последние формулы, содержащие выражения $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$, $\operatorname{div}\boldsymbol{S}^*$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*$ представляют собой соответственно скалярные и векторные аналоги закона сохранения $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{S}_p^* = 0$ для семейства плоских кривых $\{L_\tau\}$, полученного автором в ДАН, 2001, т. 441, № 3. Здесь $\boldsymbol{S}_p^* = \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_\nu = \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau} + \operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}$ — сумма векторов кривизны кривых L_τ и L_ν из взаимно ортогональных семейств $\{L_\tau\}$ и $\{L_\nu\}$. В плоском случае имеем $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,y)$, $\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{k}$, $\varkappa = 0 \Rightarrow \boldsymbol{R}^* = 0$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{S}_p^*$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^* = 0$ и из упомянутых формул следует данный закон сохранения. В трехмерном случае получаем также закон сохранения для семейства $\{L_\tau\}$ кривых L_τ более высокого порядка вида $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$, где векторное соленоидальное поле $\boldsymbol{F}$ выражается через характеристики $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, k, $\varkappa$ кривых L_τ и представляет собой правую часть любой из формул для $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*$. Например, $\operatorname{div}\{\boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* - \varkappa\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau} - k\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\} = 0$.

4. Пусть для поля $\boldsymbol{\tau}$ в D существует семейство поверхностей S_τ, ортогональных полю $\boldsymbol{\tau}$. Пусть $\{S_\tau\}$ — семейство поверхностей S_τ с единичной нормалью $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,y,z)$. Главное направление будем представлять единичным вектором $\boldsymbol{l}_i$ $(i = 1,2)$ с соответствующим направлением; вектор $\boldsymbol{l}_i$ является касательным ортом линии кривизны L_i на S_τ. Пусть (D) через каждую точку $(x,y,z)\in D$ проходит одна и только одна поверхность $S_\tau \in \{S_\tau\}$; (E) в каждой точке $(x,y,z)\in D$ существует (правая) система взаимно ортогональных ортов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичная нормаль, $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ — главные направления на поверхности S_τ, проходящей через эту точку. Для этого достаточно, чтобы каждая поверхность $S_\tau \in \{S_\tau\}$ была C^2-регулярной. (F) $\boldsymbol{\tau}\in C^1(D)$, $\boldsymbol{l}_i \in C^1(D)$, $i = 1,2$.

Найдено, что условиях (D)–(F): 1) величины неголономности векторных полей главных направлений $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ равны в D: $(\boldsymbol{l}_1\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1) = (\boldsymbol{l}_2\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2)$; 2) поле $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$ в любой точке $(x,y,z)\in D$ представляет собой сумму трех векторов кривизны: $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_{g1} + \boldsymbol{K}_{g2}$, где $\boldsymbol{K}_{g1} = k_{g1}\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{K}_{g2} = k_{g2}\boldsymbol{\tau}$ — векторы кривизны двух геодезических линий с кривизнами k_{g1} и k_{g2} на поверхности S_τ, проведенных через точку $(x,y,z)\in S_\tau$ в любых двух взаимно ортогональных направлениях; 3) гауссова кривизна K поверхности $S_\tau \in \{S_\tau\}$ выражается через орты Френе $(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})$ и кручение $\varkappa$ векторных линий L_τ поля нормалей $\boldsymbol{\tau}$ по формуле

$$K = (\boldsymbol{\tau}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}]) - \varkappa^2.$$

Список литературы

[1] Ю. А. Аминов, *Геометрия векторного поля* // М.: Наука, 1990. 208 с.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия;, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, 630073, Россия

E-mail address: mag@sscc.ru

СОПРЯЖЕНИЕ И ПРИМАРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ УЗЛОВ В ЗАМКНУТЫХ ОРИЕНТИРУЕМЫХ 3-МНОГООБРАЗИЯХ

ВЛАДИМИР МОРОЗОВ

В 1949 году вышла в свет статья Шуберта [2], посвященная проблеме существования и единственности примарного разложения узлов в сфере S^3. На сегодняшний день актуальной является проблема о существовании и единственности примарного разложения узлов в произвольном трехмерном многообразии. Первый результат в этом вопросе представил K. Miyazaki в своей статье [1].

Пусть $K \subset M$, где M— произвольное замкнутое ориентированное 3-многообразие, K— узел в этом многообразии. Необходимо дать ответ на следующие два вопроса:

(1) Существует ли разложение узла K на примарные слагаемые?
(2) Если такое разложение существует, то единственно ли оно?

K. Miyazaki в статье [1] дает ответы на эти вопросы:

(1) Если существует разбивающая сфера $S^2 \subset M$, пересекающая узел K в одной точке, то узел K является тривиальным, поэтому вопрос о существовании его примарного разложения не имеет смысла.
(2) Если не существует разбивающей сферы $S^2 \subset M$, пересекающей узел K в одной точке, то разложение узла K на примарные слагаемые существует, но не всегда является единственным. Тем не менее, единственность разложения имеет место, но в весьма слабом смысле. Оказывается, что существует примарный узел R в $S^2 \times S^1 \subset M$ такой, что если среди примарных слагаемых узла K его нет, то примарное разложение узла K единственно, а если есть, то примарное разложение узла K единственно с точностью до *сопряжения*.

Список литературы

[1] K. Miyazaki, *Conjugation and the prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds* // Transactions of the american mathematical society, vol. 313, № 2., 785–804 (June 1994).

[2] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten* // S.-B. Heidelberger : Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., 57—104, 1949.

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: morozov_vv_z@mail.ru

СПАЙНЫ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОЙ БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА

ЛИЛИЯ НАБЕЕВА

Утолщённой бутылкой Клейна называется ориентируемое косое произведение $K\tilde{\times}I$ бутылки Клейна K на отрезок I. Под узлом понимается произвольная простая замкнутая кривая, лежащая в утолщённой бутылке Клейна. Два узла $k_1, k_2 \subset K\tilde{\times}I$ называются эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм многообразия $K\tilde{\times}I$ на себя, переводящий k_1 в k_2. Бутылку Клейна K принято изображать в виде квадрата с отождествленными сторонами. Тогда узел k в $K\tilde{\times}I$ можно задавать с помощью диаграмм $D(k)$ на квадрате [1].

Пусть M — компактное связное трехмерное многообразие с краем и P — двумерный полиэдр в нем. Тогда P называется спайном многообразия M, если разность $M\backslash P$ гомеоморфна прямому произведению края ∂M многообразия на полуоткрытый интервал [0;1). Двумерный полиэдр P называется простым, если каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную либо диску, либо конусу над окружностью с двумя или тремя радиусами (такая точка называется неособой, тройной точкой и истинной вершиной, соответственно). Простой полиэдр P называется специальным, если каждая компонента связности множества неособых точек являются 2-дисками. Спайн 3-многообразия называется простым или специальным, если он является простым или специальным полиэдром, соответственно [2].

В данной работе предложен алгоритм построения специальных спайнов для дополнительных пространств узлов в $K\tilde{\times}I$. С помощью этого алгоритма удалось выписать коды спайнов дополнительных пространств всех табулированных узлов из работы [1]. Так же вычислены инварианты Тураева-Виро с помощью программы "Распознаватель" [3], входными данными для которой служат коды специальных спайнов рассматриваемых многообразий.

Пусть $E(k)$ — дополнительное пространство узла k в утолщённой бутылке Клейна $K\tilde{\times}I$.

Теорема. *Для любой диаграммы $D(k)$ узла k в $K\tilde{\times}I$ представленной на квадрате существует алгоритм построения простого полиэдра P, который является простым спайном многообразия $E(k)$.*

Список литературы

[1] С.В. Матвеев, Л.Р. Набеева, *Табулирование узлов в утолщённой бутылке Клейна* // Сибирский Математический Журнал, **57**:3, 688–696 (2016).

[2] С.В. Матвеев, *Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий* // М.: МЦНМО, 2007.

[3] http://matlas.math.csu.ru/?page=recognizer

Челябинский Государственный Университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454021, Россия

E-mail address: liya.nabeyeva@yandex.ru

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-11-10291).

СПАЙНЫ НЕОРИЕНТИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЗЕЙФЕРТА С НЕИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЫМИ СЛОЯМИ

АЛЕКСАНДР НИКИФОРОВ

Существуют два подхода к определению многообразий Зейферта. Первый был разработан Г. Зейфертом (см. [1]), второй был предложен П. Скоттом (см. [2]). Он определил многообразие Зейферта как трехмерное многообразие вместе с его разбиением на попарно непересекающиеся окружности, называемые слоями. Причем у каждой такой окружности должна быть окрестность в M, являющаяся объединением слоев и изоморфная слоеному полноторию или слоеной сплошной бутылке Клейна. Данное определение допускает многообразия Зейферта с неизолированными особыми слоями.

Напомним, что полиэдр $P \subset Int\, M$ называется спайном компактного многообразия M с непустым краем, если M гомеоморфно цилиндру некоторого отображения $p : \partial M \to P$, которое удобно называть проекцией края на спайн.

В сообщении будет представлена серия примеров неориентируемых многообразий Зейферта (с неизолированными особыми слоями) и построены их спайны.

Список литературы

[1] H. Seifert, W. Threlfall, *Seifert and Threlfall: A Textbook of Topology* // Academic Press, 1980.

[2] П. Скотт, *Геометрия на трехмерных многообразиях* // Мир, 1986.

[3] С. Матвеев, *Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий* // МЦНМО, 2007.

Челябинский Государственный Университет, ул.Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: nikipiter@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского Государственного Университета (грант Правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, ЗАДАВАЕМОЕ 4-ЦВЕТНЫМ ГРАФОМ, ДВУЛИСТНО НАКРЫВАЮЩИМ 4-ЦВЕТНЫЙ ОСТОВ ОКТАЭДРА

МИХАИЛ ОВЧИННИКОВ

Регулярный граф степени n, у которого каждое ребро снабжено одним из n цветов, называется *n-цветным графом*, если ребра, инцидентные одной вершине, покрашены разными цветами. В работе рассматривается регулярный граф G степени 4 с 12 вершинами, которые обозначены элементами группы $Z_6 \times Z_2$. Вершины (a, b) и (c, d) в графе G соединены ребром, если $c = a \pm 1$. Цвета ребер обозначим цифрами 0, 1, 2, 3. Положим, что цвет 0 имеют ребра с концами $(a, 0)$ и $(a + 1, 1)$, $a \in Z_6$. Определим для каждого $k = 1, 2, 3$ отображение на вершинах графа G правилом $g_k((a, b)) = (a, b)$, если $a = k \bmod 3$, и $g_k((a, b)) = (a, b+1)$ в противном случае. Полагаем, что ребра цвета k это образы ребер цвета 0 при отображении g_k. Легко убедиться, что каждой вершине инцидентны ребра всех 4 цветов. Граф G с этой раскраской мы называем 4-*цветным графом* G.

Используем способ построения трехмерного многообразия с краем по 4-цветному регулярному графу степени 4, описанный в [1]. Способ основан на построении по 4-цветному графу специального спайна, который задает трехмерное многообразие однозначно ([2]).

Обозначим M 3-многообразие, задаваемое 4-цветным графом G.

Теорема. *Многообразие M гомеоморфно дополнительному пространству зацепления L в трехмерной сфере, состоящего из колец Борромео и окружности, являющейся осью вращения 3-го порядка колец Борромео.*

Доказательство теоремы состоит в предъявлении вложения в S^3 специального спайна многообразия M, задаваемого графом G. Непосредственно убеждаемся, что это спайн дополнительного пространства указанного зацепления в S^3.

Список литературы

[1] P. Cristofori, M. Mulazzani, *Compact 3-manifolds via 4-colored graphs* // arXiv:1304.5070 [math.GT].

[2] S. Matveev, *Complexity theory of three-dimensional manifolds* // Acta Appl. Math., **19**, 101–130 (1990).

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: ovch_csu_ru@mail.ru

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

Φ-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ГРАФАХ

РОМАН ПАНЕНКО

Допустим, что Φ — выпуклая функция с некоторыми дополнительными свойствами, N-функция, говоря строго. В докладе рассматриваются ряд проблем Φ-гармонического анализа на графах. В частности, вводятся основные определения и устанавливаются их корректность и базовые свойства. Так же приводится обзор полученных результатов, дающих дискретные аналоги классических теорем для гармонических функций: единственности, неравенства Гарнака и теоремы Гарнака о пределе монотонной последовательности гармонических функций. В обсуждаемой работе обобщаются результаты [1].

Список литературы

[1] I. Holopainen, P. M. Soardi, *p-harmonic functions on graphs and manifolds* // Manuscripta mathematica, **94**:1, 95–110 (1997)

Новосибирск, Россия
E-mail address: panenkora@gmail.com

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

ИВАН ПОДВИГИН

Пусть μ — нормированная борелевская мера на метрическом пространстве M. Пусть $\mathfrak{F}_p \subseteq L_p(M,\mu)$, $p \in [1,\infty]$ есть банахово пространство комплекснозначных функций с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}_p}$. Считая $\mathfrak{F}_p$ всюду плотным в $L_p(M,\mu)$, определим для произвольной $f \in L_p(M,\mu)$ наилучшее $\mathfrak{F}_p$-приближение порядка $t \geq 0$ как

$$\tau_f(t) = \inf\{\|f-h\|_p : \ h \in \mathfrak{F}_p, \quad \|h\|_{\mathfrak{F}_p} \leq t\}.$$

Определим аппроксимационные пространства интегрируемых функций, соответствующие различным оценкам наилучшего приближения. Пусть Ξ есть множество всех убывающих к нулю функций $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, т.е. $\Theta(t_1) \geq \Theta(t_2)$ при $0 \leq t_1 \leq t_2$, и $\Theta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Пусть $\Xi^0 \subset \Xi$ те из них, которые обращаются в ноль с некоторого момента.

Определение. *Для $\Theta \in \Xi$ аппроксимационным пространством $\mathfrak{F}_p(\Theta)$ будем называть множество всех функций $f \in L_p(M,\mu)$ таких, что для наилучшего $\mathfrak{F}_p$-приближения справедливо неравенство*

$$\tau_f(ct) \leq c\Theta(t)$$

при всех $t \geq 0$ для некоторой константы $c \geq 0$. Множество таких констант будем обозначать как $C(\Theta,f)$. Наибольшую нижнюю границу этого множества будем обозначать $\|f\|_{\mathfrak{F}_p(\Theta)}$, т.е.

$$\|f\|_{\mathfrak{B}_p(\Theta)} = \inf_{c \in C(\Theta,f)} c.$$

Пространства $\mathfrak{F}_p(\Theta)$ суть банаховы пространства функций с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}_p(\Theta)}$, расширяющие исходное пространство $\mathfrak{F}_p$.

Пример. В пространстве $L_1(M,\mu)$ возьмем $\mathfrak{F}_1 = L_\infty(M,\mu)$ с его естественной ess sup-нормой. Нетрудно проверить, что для любой $f \in L_1(M,\mu)$ ее наилучшее L_∞-приближение порядка $t \geq 0$ имеет вид

$$\tau_f(t) = \int_{\{|f|>t\}} |f| \, d\mu.$$

Пусть, например, $\Theta_q(t) = \min\{1, t^{-q}\}$, $q > 0$. Тогда каждая функция $f \in \mathfrak{F}_1(\Theta_q)$ будет лежать в слабом $L_{q+1}(M,\mu)$ пространстве, т.е. $\sup\limits_{t\geq 0} t\mu^{\frac{1}{q+1}}\{|f|>t\} < \infty$.

Интерес к таким аппроксимационным пространствам обусловлен задачей о расширении имеющихся оценок убывания корреляций в динамических системах на более широкий класс функций.

Предположим, что задано сохраняющее меру μ отображение $T : M \to M$, для которого справедливы оценки корреляций: для любых $f \in \mathfrak{F}_p \subseteq L_p(M,\mu)$ и $g \in \mathfrak{G}_q \subseteq L_q(M,\mu)$, $p,q \in [1,+\infty]$, $1/p + 1/q = 1$

$$|c_n(f,g)| = \left| \int_M f(x)g(T^n x)\, d\mu - \int_M f(x)\, d\mu \int_M g(x)\, d\mu \right| \leq A\|f\|_{\mathfrak{F}_p}\|g\|_{\mathfrak{G}_q}\Phi(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\#)$$

для некоторой константы $A > 0$, и $\Phi \searrow 0$ при $n \to \infty$.

Имеется большое количество динамических систем с оценками корреляций такого типа; к ним относятся классические транзитивные диффеоморфизмы Аносова, а также большой класс систем, допускающих структуру Гиббса–Маркова–Янг, среди которых и некоторые популярные бильярды. Во многих из них $\mathfrak{F}_p$ и $\mathfrak{G}_q$ — это множества гельдеровских функций (или классы, содержащие в себе гёльдеровские).

Следующая теорема позволяет распространять оценки (#) на произвольные пары функций $f \in L_p(M, \mu)$ и $g \in L_q(M, \mu)$, $p, q \in [1, +\infty], 1/p + 1/q = 1$.

Теорема. *Предположим, что справедлива оценка (#). Пусть $\Theta_1, \Theta_2 \in \Xi$, тогда для любых $f \in \mathfrak{F}_p(\Theta_1)$, $g \in \mathfrak{G}_q(\Theta_2)$ для всех $n \geq n_0$*

$$|c_n(f, g)| \leq A' \|f\|_{\mathfrak{F}_p(\Theta_1)} \|g\|_{\mathfrak{G}_q(\Theta_2)} \Phi'(n)$$

для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, константы $A' > 0$, и $\Phi' \searrow 0$ при $n \to \infty$.

В случае $\Theta_1 \vee \Theta_2 \notin \Xi^0$ будет $\Phi'(n) = \Phi(n)\upsilon(\Phi(n))$, где $\upsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ обратное отображение к

$$\frac{1}{t}(\Theta_1 \vee \Theta_2)(\sqrt{t}),\ t > 0;$$

и n_0 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\Phi(n_0)\upsilon(\Phi(n_0)) \leq 1.$$

В случае $\Theta_1 \vee \Theta_2 \in \Xi^0$ будет $\Phi'(n) = \Phi(n)$ и $n_0 = 1$.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: ipodvigin@math.nsc.ru

ВЕКТОРНОЗНАЧНЫЕ ФОРМЫ ТРЕХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ЗАДАНИЯ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ 2-ГО ПОРЯДКА

КАТЕРИНА ПОЛЯКОВА

Пусть L_qX_m — расслоение реперов порядка q $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ над m-мерным многообразием X_m. При $q = 0$ имеем $L_0X_m = X_m$. Правая часть деривационной формулы

$$dA_q = \omega^i \overset{q}{e}_i + \omega^i_j \overset{q}{e}{}^{\,j}_i + \ldots + \omega^i_{j_1\ldots j_q} \overset{q}{e}{}^{\,j_1\ldots j_q}_i \qquad (i, j, \ldots = \overline{1, m})$$

является канонической формой 1-го порядка многообразия L_qX_m. Она связывает касательное $TL_qX_m = span(\overset{q}{e}_i, \overset{q}{e}{}^{\,j}_i, \ldots, \overset{q}{e}{}^{\,j_1\ldots j_q}_i)$ и кокасательное $T^*L_qX_m = span(\omega^i, \omega^i_j, \ldots, \omega^i_{j_1\ldots j_q})$ пространства к многообразию L_qX_m в точке $A_q \in L_qX_m$, а также соответствует тождественным преобразованиям этих пространств, т.е. $dA_q = id_{TL_qX_m}$, $dA_q = id_{T^*L_qX_m}$. Репер $\overset{q}{e} = \{\overset{q}{e}_i, \overset{q}{e}{}^{\,j}_i, \ldots, \overset{q}{e}{}^{\,j_1\ldots j_q}_i\}$ и корепер $\omega = \{\omega^i, \omega^i_j, \ldots, \omega^i_{j_1\ldots j_q})\}$ являются двойственными.

Обозначим через $\Omega^p_{/r} = T^{r*}L_qX_m \otimes T^pL_qX_m$ множество всех векторнозначных форм порядка r со значениями в касательном пространстве $T^pL_qX_m$ порядка p, где $T^{r*}L_qX_m$ — множество дифференциальных форм порядка r, не совпадающее с пространством $T^{*r}L_qX_m = (T^*L_qX_m)^r = \wedge^r L_qX_m$ форм степени r, т.е. $(T^rL_qX_m)^* \neq (T^*L_qX_m)^r$. Множество векторнозначных форм степени r со значениями в касательном пространстве $T^pL_qX_m$ обозначим $\Omega^p_r(L_qX_m)$.

Аффинную связность 2-го порядка можно задавать, используя канонические формы d^pA_q порядка p многообразий L_qX_m $(p, q = 1, 2, 3)$, причем $p + q = 3$. Тогда формы связности, так же как и сами канонические формы d^pA_q, будут векторнозначными формами пространств $\Omega^p_{/p}(L_qX_m) = T^{p*}L_qX_m \otimes T^pL_qX_m$. Подробнее, dA_2 — каноническая форма порядка 1 многообразия L_2X_m, т.е. $dA_2 \in \Omega^1_1(L_2X_m) = T^*L_2X_m \otimes TL_2X_m$; d^2A_1 — каноническая форма порядка 2 многообразия $LX_m = L_1X_m$, т.е. $d^2A_1 \in \Omega^2_{/2}(LX_m) = T^{2*}LX_m \otimes T^2LX_m$; d^3A_0 — каноническая форма порядка 3 многообразия $X_m = L_0X_m$, т.е. $d^3A_0 \in \Omega^3_{/3}(X_m) = T^{3*}X_m \otimes T^3X_m$.

Каноническая форма 1-го порядка на расслоении касательных линейных реперов LX_m имеет вид $dA_1 = \omega^i e_i + \omega^i_j e^j_i$ $(A_1 \in LX_m, e = \overset{1}{e})$ [1]. Отметим двойственный характер действия векторнозначных форм $\omega \otimes e = \omega e = e\omega$: они действуют в пространстве векторов и в пространстве ковекторов. Для векторнозначной формы $\Omega = \omega e \in \Omega^1_1(LX_m)$, где $\omega \in T^*LX_m, e \in TLX_m$, справедливо

$$\Omega = e\omega : u \in TLX_m \to \Omega(u) = e \cdot \omega(u) \in TLX_m,$$

$$\Omega = \omega e : \theta \in T^*LX_m \to \Omega(\theta) = \omega \cdot e(\theta) = \omega \cdot \theta(e) \in T^*LX_m.$$

Для векторнозначной формы $\Omega = \omega e \in \Omega^1_1(LX_m)$, внешнего дифференциала D и обычного дифференциала d справедливо

$$D : \Omega \in \Omega^1_1(LX_m) \to D\omega = eD\omega - \omega \wedge de \in \Omega^2_2(LX_m),$$

$$d : \Omega \in \Omega^1_1(LX_m) \to d\omega = ed\omega + \omega de \in \Omega^2_{/2}(LX_m),$$

где $D\omega$ — дифференциальная форма степени 2; $d\omega$ — форма порядка 2 (см., напр., [3]).

Дифференцируя форму dA_1 внешним образом и разрешая по лемме Картана, находятся деривационные формулы 1-го порядка [1] $de_i - e^j_k\omega^k_{ji} = \hat{e}_{ij}\omega^j + \hat{e}_{ij}{}^k\omega^j_k$, $de^j_i = \hat{e}^j_{ik}\omega^k + \hat{e}^{jl}_{ik}\omega^k_l$, где $\hat{e}_{ij} = e_{ij}, \hat{e}^j_{ik} = e^j_{ik}, \hat{e}_{ij}{}^k = e_{ij}{}^k + \delta^k_i e_j, \hat{e}^{jl}_{ik} = e^{jl}_{ik} - \delta^j_k e^l_i \in T^2LX_m$.

При использовании форм связности 1-го порядка $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k$ каноническая форма dA_1 приводит к горизонтальным векторам 1-го порядка $\tilde{e}_k = e_k + \Gamma^i_{jk}e^j_i$. Ковариантное задание связности 2-го порядка дается формой $\tilde{\omega}^2 = \{\tilde{\omega}^i_j, \tilde{\omega}^i_{jk}\}$, где $\tilde{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - L^i_{jkl}\omega^l$. Основной объект кривизны 2-го порядка $C^i_{jkls} = L^i_{jk[ls]} - L^t_{jk[l}\Gamma^i_{|t|s]} + L^i_{tk[l}\Gamma^t_{|j|s]} + L^i_{jt[l}\Gamma^t_{|k|s]}$ образует тензор вместе с кривизной 1-го порядка. Основной объект кручения 2-го порядка $T^i_{jkl} = L^i_{j[kl]} + \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{|s|l]}$ образует тензор вместе с кручением 1-го порядка $T^s_{kl} = \Gamma^s_{[kl]}$.

Деривационные формулы 1-го порядка с помощью форм связности 2-го порядка $\tilde{\omega}^2$ приводят к горизонтальным векторам 2-го порядка $\tilde{e}_{ij} = \nabla^2_j e_i = e_{ij} + \hat{e}^{\cdot k}_{il}\Gamma^l_{kj} + e^l_k L^k_{lij}$, $\tilde{e}^j_{ik} = \nabla_k e^j_i = e^j_{ik} - \hat{e}^{js}_{il}\Gamma^l_{sk}$. Касательное пространство 2-го порядка T^2LX_m содержит горизонтальное $HT^2LX_m = span(\tilde{e}_{ij}, \tilde{e}^j_{ik})$ и вертикальное $VT^2LX_m = span(\hat{e}^{jl}_{ik})$ подпространства 2-го порядка в точке $A_1 \in LX_m$.

Если кручение связности равно нулю $T^i_{jk} = 0$, $N^i_{jkl} = 0$, то формы 2-го порядка

$$^2\tilde{\omega}^i = d\omega^i + \omega^j\omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^j\omega^k,\ \ ^2\tilde{\omega}^i_j = d\omega^i_j - \omega^k_j\omega^i_k + \omega^k\omega^j_{jk} + 2\Gamma^l_{jk}\omega^k\omega^i_l - \Gamma^k_{jl}\Gamma^i_{ks}\omega^l\omega^s - L^i_{jkl}\omega^k\omega^l$$

аффинной связности 2-го порядка аннулируются горизонтальными векторами 2-го порядка. Формы $^2\tilde{\omega}^i$ являются формами 2-го порядка связности 1-го порядка [3, с. 30].

Дифференцируя каноническую форму dA_1 обычным образом, приходим к канонической форме 2-го порядка многообразия LX_m

$$d^2A_1 = (d\omega^i + \omega^j\omega^i_j)e_i + (d\omega^i_j - \omega^k_j\omega^i_k + \omega^k\omega^j_{jk})e^j_i + (\omega^i\omega^j)e_{ij} + (2\omega^k\omega^i_j)e^j_{ik} + (\omega^k_l\omega^i_j)e^{jl}_{ik},$$

причем репер 2-го порядка $\{e_i, e^j_i, e_{ij}, e^j_{ik}, e^{jl}_{ik}\} \in T^2LX_m$ и корепер 2-го порядка $\{d\omega^i + \omega^j\omega^i_j, d\omega^i_j - \omega^k_j\omega^i_k + \omega^k\omega^j_{jk}, \omega^i\omega^j, 2\omega^k\omega^i_j, \omega^k_l\omega^i_j\} \in T^{2*}LX_m$ являются сопряженными.

Каноническую форму 2-го порядка d^2A_1 можно представить в виде $d^2A_1 =^2 \tilde{\omega}^v +^2 \tilde{\omega}^h$, где $^2\tilde{\omega}^v =^2 \tilde{\omega}^i e_i +^2 \tilde{\omega}^i_j e^j_i +^2 \tilde{\omega}^{ik}_{jl} e^{jl}_{ik}$ — вертикальная (аннулируется горизонтальными векторами 2-го порядка) вертикальнозначная форма связности 2-го порядка; $^2\tilde{\omega}^h = (\omega^i\omega^j)\tilde{e}_{ij} + 2(\omega^k\omega^i_j - \Gamma^i_{jl}\omega^k\omega^l)\tilde{e}^j_{ik}$ — горизонтальная (аннулируется вертикальными векторами 1-го и 2-го порядков) горизонтальнозначная форма связности 2-го порядка.

Каноническая форма 1-го порядка на расслоении касательных линейных реперов 2-го порядка L_2X_m имеет вид $dA_2 = \omega^i E_i + \omega^i_j E^j_i + \omega^i_{jk} E^{jk}_i$ ($A_2 \in L_2X_m$, $E =\overset{2}{e}$). Горизонтальные векторы 1-го порядка для связности 2-го порядка имеют вид $\tilde{E}_i = E_i + \Gamma^l_{ji}E^j_l + L^l_{jki}E^{jk}_l$, причем $\tilde{\omega}^i_{jk}(\tilde{E}_l) = 0$. Форму dA_2 можно записать в виде $dA_2 = \tilde{\omega}^v + \tilde{\omega}^h$, где $\tilde{\omega}^v = \tilde{\omega}^i_j E^j_i + \tilde{\omega}^i_{jk} E^{jk}_i$ и $\tilde{\omega}^h = \omega^i \tilde{E}_i$ — вертикальная и горизонтальная формы 1-го порядка для связности 2-го порядка.

Каноническая форма d^3A_0 порядка 3 получается повторным дифференцированием канонической формы $dA_0 = \omega^i\varepsilon_i$ ($A_0 \in X_m$, $\varepsilon =\overset{0}{e}$) и позволяет построить формы связности 3-го порядка. Для контравариантного задания аффинной связности $\Gamma^2 = \{\Gamma^i_{jk}, L^i_{jkl}\}$ второго порядка, используя уравнения [2] $\Delta\varepsilon_{ij} = \omega^k_{ij}\varepsilon_k + \omega^k\varepsilon_{ijk}$, строятся горизонтальные векторы 3-го порядка $\tilde{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{lj}\Gamma^l_{ik}\varepsilon_{il}\Gamma^l_{jk} + \varepsilon_l L^l_{ijk} \in T^3X_m$. Если исходить из касательных векторов 3-го порядка к многообразию X_m, то инвариантность горизонтальных подпространств $H = span(\tilde{\varepsilon}_{ijk})$ для связности 2-го порядка относительно действия группы не требуется.

Список литературы

[1] К.В. Полякова, *О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, вып. 47, 100–112 (2016). (В печати)

[2] Ю.И. Шевченко, *Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий.* Калининград, 1998.

[3] M. Emery, *An Invitation to Second-Order Stochastic Differential Geometry.* 2005. 42 p. <hal-00145073>

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, ул. Невского, 14, Калининград, 236016, Россия

E-mail address: KaPolyakova@kantiana.ru

ГРУППЫ ДИМЕРОВ ГРАФОВ КВАДРАТНЫХ РЕШЕТОК

ДМИТРИЙ РОЖКОВ

В теории графов *паросочетания* изучаются обычно с точки зрения числовых инвариантов графов. В работе [1] В.Г.Тураев предложил новый подход к изучению паросочетаний: с каждым паросочетанием в графе он связал группу, называемую *группой паросочетания* $\pi_A(\Gamma)$. Группа паросочетания отнесенная к *совершенному паросочетанию*, также называемому *димерным покрытием*, называется *группой димеров* $D(\Gamma)$.

В.Г.Тураев показал, что группа димеров имеет естественное описание на языке алгебраической топологии – она может быть определена как фундаментальная группа некоторого *кубического комплекса неположительной кривизны.*

Работа посвящена исследованию вопроса о возникновении соотношений в группе димеров. Хорошо известный факт из теории CAT(0)–пространств состоит в том, что плоские торы в пространстве неположительной кривизны соответствуют абелевым подгруппам фундаментальной группы. Более точно (см. [2]), если X – компактное пространство неположительной кривизны и $\pi_1(X)$ содержит абелеву подгруппу G ранга $k > 1$, то X содержит выпуклое подмножество, изометричное k – мерному плоскому тору. Для *комплексов димеров* некоторых графов нам удалось дать комбинаторное описание такого подмножества, отвечающего абелевой подгруппе ранга два.

Граф квадратной решётки – это граф, вершины которого соответствуют точкам на плоскости с различными координатами, x-координатами из диапазона $1, ..., n$, y-координатами из диапазона $1, ..., m$, и вершины которого соединены ребром, если соответствующие точки находятся на расстоянии 1. Такие графы изучаются в значительной степени в связи с точно решаемыми моделями статистической механики.

Теорема. *Пусть* Γ – *граф квадратной решетки с* n *вершинами по* x *и* m *вершинами по* y. *Для любых* n *и* m *группа димеров* $D(\Gamma)$ *не является свободной тогда и только тогда, когда у графа* Γ *существует 5 димерных покрытий* $A_0, A_1, ..., A_4$ *и набор скольжений* $\{s_1, s_2, ..., s_6\}$, *удовлетворяющих следующим условиям :*
1) $\{(s_1, s_4), (s_1, s_5), (s_1, s_6), (s_2, s_4), (s_2, s_5), (s_2, s_6), (s_3, s_4), (s_3, s_5), (s_3, s_6)\}$ – *пары независимых скольжений,*
2) $A_1 = s_1A_0$, $A_2 = s_2A_1$, $A_0 = s_3A_2$, $A_3 = s_4A_0$, $A_4 = s_5A_3$, $A_0 = s_6A_4$.

Список литературы

[1] Turaev V. G. *Matching groups and gliding systems* // Journal of Geometry and Physics 81 (2014) 128–144.

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* – Москва — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 512 с.

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: rozhkovchess@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00414).

ОТОБРАЖЕНИЯ, ИНДУЦИРУЮЩИЕ ИЗОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ СУММИРУЕМОСТИ

АЛЕКСАНДР РОМАНОВ

Рассмотрим область $G \subset R^n$ и функцию $p : G \to (1, \infty)$. Принадлежность функции f пространству Лебега с переменным показателем суммируемости $p(x)$ $(f \in L_{p(\cdot)}(G))$ определим условием

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int\limits_G |f(x)|^{p(x)} dm_n < \infty,$$

а норму определим равенством

$$\|f \mid L_{p(\cdot)}(G)\| = \inf \left\{ \alpha > 0 \mid \ \rho_{p(\cdot)}(f/\alpha) \leq 1 \right\}.$$

Соответствующее пространство Соболева [1] определим условием

$$L^1_{p(\cdot)}(G) = \{f \in L_1(G) \ \mid \ \nabla f \in L_{p(\cdot)}(G)\},$$

а полунорму равенством $\|f \mid L^1_{p(\cdot)}(G)\| = \|\nabla f \mid L_{p(\cdot)}(G)\|$.

Со всяким измеримым отображением $\varphi : G \to G'$ свяжем оператор композиции φ^*, определяемый условием $\varphi^* f = f \circ \varphi$, где f принадлежит некоторому функциональному классу $\mathcal{F}(G')$. В общем случае линейный оператор φ^* действует из $\mathcal{F}(G')$ в некоторый класс функций $\mathcal{H}(G)$.

Нас будут интересовать условия на отображение φ, при которых оператор φ^* будет изоморфизмом пространств Соболева $L^1_{p(\cdot)}(G')$ и $L^1_{q(\cdot)}(G)$, т.е. соответствие будет взаимно однозначным и норма оператора φ^* будет ограничена.

Поскольку оператор композиции не может повышать даже локально порядок суммируемости для всех функций одновременно, то необходимым требованием существования изоморфизма является условие $q(x) = p(\varphi(x))$.

Таким образом будем рассматривать ситуацию, когда

$$\varphi^* : L^1_{p(\cdot)}(G') \to L^1_{p(\varphi(\cdot))}(G). \tag{1}$$

Предположим, что $p(y) \leq p^+ < \infty$ при всех $y \in G'$. При таком ограничении удается довольно просто показать, что требование квазиизометричности (билипшицевости) отображения φ является достаточным для существования изоморфизма (1). Это можно доказать непосредственно оценивая соответствующие интегралы, но проще использовать альтернативное описание пространства $L^1_{p(\cdot)}$, основанное на липшицевой оценке специального вида [2].

Свойства функций из пространства $L^1_{p(\cdot)}$ существенным образом зависят от различных характеристик функции $p(x)$. При некоторых дополнительных условиях удается показать, что требование квазиизометричности отображения φ будет и неоходимым. Это представляется вполне естественным, учитывая соответствующие результаты для пространств Соболева с постоянными показателями [3].

Мы будем предполагать, что области G и G' ограничены и имеют гладкую границу, а функция $p(y)$ является липшицевой и $n < p_- \leq p(y) \leq p^+ < \infty$. При изучении необходимости обычно основная проблема возникает с доказательством гомеоморфности отображения φ. В данном случае с доказательством непрерывности все просто: функция

Работа поддержана грантом РНФ № 16-41-02004.

$f(y) = y_i$ принадлежит пространству $L^1_{p(\cdot)}(G')$ поэтому координатная функция отображения $\varphi_i = f \circ \varphi = \varphi^* f$ принадлежит пространству $L^1_{p(\varphi(\cdot))}(G)$. В силу теорем вложения

$$L^1_{p(\varphi(\cdot))}(G) \subset L^1_{p_-}(G) \subset C(G).$$

Рассмотрим точки $y_1, y_2 \in G'$ и такую тестовую функцию u, что $u(y_1) = 0$ и $u(y_2) = 1$. Используя теоремы вложения, можно легко оценить норму функции u снизу

$$\|u \mid L^1_{p(\cdot)}(G)\|^{p_-} \geq \frac{C}{|y_1 - y_2|^{p_- - n}}.$$

Эта довольно грубая оценка позволяет доказать, что отображение φ не может "склеивать" образы двух различных точек и является взаимно однозначным.

Несколько более сложные оценки норм специальных тестовых функций и их образов позволяют установить локальную квазиизометричность отображения φ.

Список литературы

[1] O. Kovacik, J. Rakosnik, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$* // Czechoslovak Math. J., **41**:4, 592-618 (1991).

[2] A. Романов *Функции соболевского типа с переменным показателем суммируемости на метрических пространствах с мерой* // Сиб. мат. журн., **55**:1, 178-194 (2014).

[3] S. K. Vodop'yanov *Composition operators on Sobolev spaces* // Contemp. Math., **382**, 327–342 (2005).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: asrom@math.nsc.ru

ДВУМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ПОВЕРХНОСТИ С ЛОКАЛЬНО-ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ

ИДЖАД ХАКОВИЧ САБИТОВ

1. Метрика риманового многообразия M^n называется локально евклидовой (л.е.), если каждая его точка имеет окрестность, изометричную некоторому шару в евклидовом пространстве R^n со стандартной метрикой. Мир многообразий с л.е. метрикой очень богат и он к настоящему времени изучен еще совсем мало. Достаточно напомнить, что любая многогранная поверхность произвольной размерности с проколотыми вершинами несет на себе л.е. метрику; на каждой двумерной минимальной поверхности с неравной нулю кривизной K и с метрикой ds^2_{min} квадратичная форма $ds^2 = \sqrt{-K}ds^2_{min}$ задает л.е. метрику.

2. В теории изометрических погружений л.е. метрик, в отличие от метрик ненулевой кривизны, есть специальный вопрос об изометрических погружениях этих метрик в стандартное евклидовое пространство той же размерности (кстати, аналогичный вопрос имеет смысл ставить и для любых метрик постоянной кривизны). Если мы можем изометрически погрузить или даже вложить данную л.е. метрику в евклидово пространство, то тогда мы можем сказать, что имеем натуральное представление этой метрики как метрики области с естественной евклидовой метрикой (например, геодезические этой метрики будут прямолинейными отрезками в этой области). В докладе будет рассказано о некоторых результатах, связанных с этим кругом вопросов в случае погружений двумерных л.е. метрик в евклидову плоскость.

3. Структура поверхностей с л.е. метрикой хорошо известна, начиная с предположения их C^2-гладкости. Для сохранения их аналогичного строения в классе поверхностей C^1-гладкости на эти поверхности нужно априори наложить некоторые дополнительные геометрические предположения. Мы даем аналитическое описание условий, которые являются необходимыми и достаточными для выполнении этих геометрических требований.

4. Для изометрических погружений двумерных метрик в трехмерное евклидово пространство, изученных с достаточной полнотой в случаях метрик со знакопостоянной кривизной, в случае л.е. метрик есть только частичные результаты. В частности, доказано, что если такая метрика допускает изометрическое погружение в двумерную евклидову плоскость, то для нее существует изометрическое вложение в R^3. В докладе будет рассказано об этом и других сопутствующих результатах об изометрических погружениях л.е. метрик. Большинство этих результатов опубликовано в указанных в библиографии работах.

5. Поверхности с л.е. метрикой и заданные в виде графика функции $z = f(x, y)$ являются решениями тривиального уравнения Монжа-Ампера

$$z_{xx}z_{yy} - z^2_{xy} = 0. \qquad (1)$$

Для решений этого уравнения можно поставить вопрос об их локальном и глобальном поведении в предположении наличия изолированных особенностей. Оказывается, для локального поведения можно получить некоторые аналоги поведения решений эллиптических уравнений. Ниже формулируются пока неопубликованные результаты. Пусть D и D_0 обозначают области $x^2 + y^2 \le r$ и $0 < x^2 + y^2 \le r$ с достаточно малыми значениями r.

Теорема 1. *Пусть C^1-гладкая нормальная развертывающаяся поверхность $z = z(x, y)$ определена над областью D_0. Тогда функция $z(x, y)$ непрерывно продолжается в точку $(0, 0)$.*

Теорема 2. *Пусть решение $z(x, y) \in C^2$ уравнения (1) определено над областью D_0 и имеет в D_0 ограниченные вторые производные. Тогда его первые производные непрерывно продолжаются точку в $(0, 0)$.*

Теорема 3. *Пусть функция $z = z(x, y)$ принадлежит классу $C^1(D) \cap C^2(D_0)$ и удовлетворяет в D_0 уравнению (1). Тогда функцию $z(x, y)$ можно непрерывно продолжить в функцию класса $C^2(D)$.*

Теорема 4. *Если на развертывающейся поверхности класса C^2 гладкость поверхности в некоторой точке образующей имеет гладкость класса $C^n, n > 2$, тогда ее гладкость во всех точках этой образующей тоже будет того же класса C^n.*

Следствие. *Пусть решение $z = z(x, y)$ уравнения (1) принадлежит в D_0 классу $C^n, n \geq 2$ и и пусть оно продолжимо в D как функция класса C^1. Тогда функцию $z(x, y)$ можно непрерывно продолжить в точку $(0, 0)$ как функцию класса $C^n(D)$.*

В целом определенная над всей плоскостью C^1-гладкая нормальная развертывающаяся поверхность $z = z(x, y)$ является цилиндром. О решениях уравнения (1) с изолированными особыми точками можно доказать следующее утверждение

Теорема 5. *Пусть на плоскости (x, y) задано произвольное конечное множество точек M. Тогда уравнение (1) имеет решения, определенные на всей плоскости, принадлежащие классу C^∞ всюду, кроме точек множества M, в которых они непрерывны и графически локально устроены как конические поверхности с вершиной в этих точках. При некоторых специальных расположениях множество дискретных особых точек может быть и счетным.*

Часть приведенных в этих теоремах результатов пересекается с сообщенными мне в личной переписке результатами испанских математиков Jose A. Galves и Barbara Nelli.

Список литературы

[1] И.Х. Сабитов, Изометрические погружения и вложения локально евклидовых метрик в R^2. *Известия РАН, серия Математика*, Т. 63, № 6, 147-166 (1999).

[2] И.Х. Сабитов, Многообразия и поверхности с локально евклидовой метрикой. *Труды международной конференции "Геометрия "в целом топология их приложения посвященной 90-летию со дня рождения А.В. Погорелова*, изд-во "Акта Харьков, 2010, 124-140.

[3] I.Kh. Sabitov, Isometric Immersions and Embeddings of Locally Euclidean metrics. *Series "Reviews in Mathematics and Mathematical Physics"*, vol. 13, Part 1, edited A.T. Fomenko. Cambridge Scientific Publishers, 2009.

[4] И.Х. Сабитов, О развертывающихся линейчатых поверхностях с малой гладкостью. *Сибирски мат. журнал*, Т. 50, № 5, 1163-1175 (2009).

[5] И.Х. Сабитов, О внешней кривизне и внешнем строении C^1-гладких нормальных разертывааюащихся поверхностей. *Математические заметки*, Т. 87, № 6, 900-906 (2010).

[6] С.Н. Михалев, И.Х. Сабитов, Изометрические вложения локально евклидовых метрик в R^3 в виде конических поверхностей. *Математические заметки*, Т. 95, № 6, 63-73 (2014).

[7] С.Н. Михалев, И.Х. Сабитов, Изометрические вложения в R^3 кольца с локально евклидовой метрикой цилиндрического типа неоднозначности. *Математические заметки*, Т. 98, № 3, 378-385 (2015).

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские Горы, Москва, ГСП-1, 119991, Россия

E-mail address: isabitov@mail.ru

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЯРОСЛАВНА СЛАВОЛЮБОВА

На нечетномерных группах Ли обычно рассматривают левоинвариантные почти контактные (контактные) метрические структуры. В случае однородных пространств нечетной размерности такие структуры должны быть инвариантными, т.е. речь уже идет об инвариантных почти контактных (контактных) метрических структурах. В работе [1] Дж. Калварусо получена классификация инвариантных почти контактных метрических структур на однородных пространствах размерности 3, а также приведены некоторые результаты относительно их свойств и геометрических характеристик. Целью данной работы является изучение геометрических характеристик почти K-контактных метрических структур на однородном пространстве произвольной нечетной размерности.

Пусть $M = G/H$ - гладкое однородное пространство размерности $2n+1$, где G - связная группа Ли, действующая на M транзитивно и эффективно, H - подгруппа изотропии элемента o.

Напомним, что почти контактной метрической структурой на M ([1]) называется четверка (η, ξ, φ, g), где η - 1-форма класса C^1 на M, ξ - характеристическое векторное поле на M, φ - характеристический эндоморфизм TM, и g - риманова метрика на M, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi\xi = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0,$$
$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad g(X, Y) = g(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in C^1(TM).$$

Почти контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется инвариантной, если 1-форма η, характеристическое векторное поле ξ, аффинор φ и риманова метрика g являются инвариантными относительно действия группы Ли G.

Можно показать, что когда подгруппа изотропии H имеет четную размерность, любой инвариантной почти контактной метрической структуре на G/H соответствует левоинвариантная почти контактная метрическая структура на группе Ли G с точностью до H-биинвариантной почти эрмитовой структуры на подгруппе H.

Ядром внешней 2-формы $d\eta$ на многообразии M ([1]) называется распределение касательных подпространств:

$$\ker d\eta = \{X \in C^1(TM) : d\eta(X, \cdot) = 0\}.$$

В случае инвариантной почти контактной метрической структуры на однородном пространстве M ядро 2-формы $\ker d\eta$ всегда является регулярным G-инвариантным распределением и полностью определяется подпространством $\ker d\eta_o$ в начальной точке o.

Почти K-контактной метрической структурой называется почти контактная метрическая структура, характеристическое векторное поле которой является киллинговым векторным полем относительно метрики g.

Для почти K-контактных метрических структур получен следующий результат:

Теорема. *Пусть на однородном пространстве M размерности $2n+1$ задана инвариантная почти K-контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g), r - ранг ядра внешней 2-формы $d\eta$ и X - произвольное векторное поле, $X \neq \xi$. Тогда:*

1. *Если $X \in C^1(\ker d\eta)$, то секционная кривизна почти контактной метрической структуры в двумерном направлении $\{\xi, X\}$ равна 0 в любой точке из M.*

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-9740.2016.1).

2. *Если векторное поле X ортогонально распределению $\ker d\eta$, то секционная кривизна почти контактной метрической структуры в двумерном направлении $\{\xi, X\}$ равна 1 в любой точке из M.*
3. *Кривизна Риччи в направлении характеристического векторного поля ξ равна $2n - r + 1$ в любой точке из M.*

Список литературы

[1] G. Calvaruso, *Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures* // Journal of Geometry and Physics, **69**, 60–73 (2013).

Кемеровский институт филиал РЭУ им. Г.В. Плеханова, пр. Кузнецкий, 39, Кемерово, 650992, Россия
E-mail address: jar1984@mail.ru

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ МЕТРИК НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

ВИКТОР СЛАВСКИЙ, МАРИЯ КУРКИНА, ЕВГЕНИЙ РОДИОНОВ

Рассматриваются конформно-плоские метрики класса C^2 вида $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ определенные на n-мерной сфере $x \in S^n \subset R^{n+1}$. Неотрицательная функция $f(x)$ по однородности (то есть $f(\lambda x) \equiv \lambda f(x)$, $\lambda > 0$) продолжена на все R^{n+1}, преобразованием Лежандра назовем конформно-плоскую метрику $ds_*^2 = \frac{dy^2}{F^2(y)}$ на сфере $S^n \subset R^{n+1}$ определяемую из равенств:

$$F(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad y = x - \frac{2f(x)\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2}. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть конформно-плоская метрика ds^2 принадлежит классу C^2 и имеет неотрицательную одномерную секционную кривизну, то есть неравенство*

$$K_{1/2}(x,\xi) = f(x)\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \geq 0, \tag{2}$$

выполняется для любой точки $x \in S^n \subset R^{n+1}$ и любого касательного единичного вектора $\xi \in T_x(S^n)$, здесь ∇f - градиент функции f в R^{n+1}, $\dfrac{d^2 f}{d\xi^2}$ – вторая производная функции f в R^{n+1} вдоль вектора ξ.

Либо функция $f(x)$ удовлетворяет эквивалентному свойству [2]:

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{f(x_1)}\frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + \sqrt{f(x_2)}\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|}, \tag{3}$$

для любых трех точек x_1, x, x_2 сферы. Здесь $|b-a|$ – обычное хордовое расстояние между точками a и b в евклидовом пространстве R^{n+1}. Тогда двойственная $ds_*^2 = \frac{dy^2}{F^2(y)}$ конформно-плоская метрика также обладает свойствами (2), (3).

Свойства метрики $ds_*^2 = \frac{dy^2}{F^2(y)}$.

- Главные значения одномерных секционных кривизн (2) метрик ds^2 и ds_*^2 связаны в соответствующих точках равенствами $k_i k_i^* = 1$, $i = 1, \ldots, n$;
- Преобразование (1) инволютивно;
- Двойственная к конформно-плоской метрике с неотрицательной одномерной секционной кривизной [2] может быть определена без требования гладкости метрики.

Список литературы

[1] С. Кутателадзе, А. Рубинов. *Двойственность Минковского и ее приложения* // Новосибирск: Наука, 1976. – 250.

[2] М. Куркина, Е. Родионов, В. Славский. *Конформно-выпуклые функции и конформно-плоские метрики неотрицательной кривизны* // Доклады Академии наук, **462**:2, 141–143 (2015).

Югорский государственный университет, ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск, 628012, Россия, Алтайский государственный университет, пр-т. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия.

E-mail address: `slavsky2004@mail.ru, mavi@inbox.ru, edr2002@mail.ru`

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов правительства Российской Федерации: (14.B25.31.0029, Nsh of RF (2263.2014.1)), the RFBR (15-41-00092-r – Urals, 15-41-00063-r – Urals, 15-01-06582-a, 16-01-00336-a).

f-КВАЗИМЕТРИКИ И ПРОЦЕДУРА $\rho \mapsto \inf \rho$

КОНСТАНТИН СТОРОЖУК

Функцию $\rho : M \times M \to [0, \infty)$ называют f-квазиметрикой, если она удовлетворяет следующему «f-неравенству треугольника» (для некоторой непрерывной в нуле функции $f : [0, \infty) \to [0, \infty), f(0) = 0$):

$$\forall x, y, z \in M \quad \rho(x, z) \leq f(\rho(x, y) + \rho(y, z)).$$

В частности, ρ называют q-квазиметрикой, $q \geq 1$, если $\rho(x, z) \leq q \cdot (\rho(x, y) + \rho(y, z))$.

Топологию пространства M определяют, считая множество U открытым, если каждая его точка входит в U вместе с некоторым ε-шаром $B(x, \varepsilon) = \{y \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$.

Определим функцию $\inf \rho$ как инфимум длин *ломаных* в «метрике» ρ. По-видимому впервые такую конструкцию в целях метризации использовали Биркгоф [1] и Фринк [2].

Упорядоченный набор точек $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n\}$ будем называть **ломаной**, соединяющей точки z_0 и z_n. Длиной ломаной L назовем сумму длин ее звеньев: $|L| = \sum_{i=1}^{n} \rho(z_{i-1}, z_i)$. Положим

$$\inf \rho(x, y) = \inf\{|L| \mid L \text{ — ломаные, соединяющие } x, y\}.$$

При изменении f-квазиметрики ρ на метрику (или псевдометрику) $\inf \rho$ топология пространства может претерпеть неожиданные изменения. Например, некомпактное счетное множество (M, ρ) может стать сходящейся последовательностью $(M, \inf \rho)$. Мы строим подмножество плоскости, на котором при любых разных $q \geq 1$ топологически эквивалентные q-квазиметрики d^q (d — евклидова метрика) индуцируют топологически неэквивалентные метрики $Inf d^q$. При этом все пространства оказываются гомеоморфными (соответствующие гомеоморфизмы $(M, \inf d^\alpha) \to (M, \inf d^\beta)$ — не тождественные отображения).

Задачи о связи ρ и $\inf \rho$, поднятые в [3], связаны с изучением геометрии идеальной границы гиперболического по Громову пространства Y. Пусть s_0 — верхняя грань таких s, что $\inf \rho^s$ билипшицево эквивалентна ρ. Если $X = \partial_\infty Y$, то $-(s_0)^2$ — так называемая асимптотическая верхняя граница кривизны Y, ([3, 4, 5]). Наши примеры тоже могут оказаться полезными для того, чтобы наглядно представлять себе специфику расстояний на идеальной границе пространства.

Список литературы

[1] G. Birkhoff, // A note on topological groups, Compositio Mathematica (1936) Volume: 3, page 427-430.

[2] A. H. Frink. Distance functions and the metrization problem// Bull. AMS 43 (1937), p 133–142.

[3] Schroeder, V. Quasi-metric and metric spaces// Conform. Geom. Dyn. 10, p.355–360.

[4] Buyalo, S., Schroeder, V. Elements of asymptotic geometry. (English). EMS Monographs in Mathematics. Zurich: European Mathematical Society (2007).

[5] M. Bonk, Th. Foertsch. Asymptotic upper curvature bounds in coarse geometry// Math. Zeitschrift 253 no. 4 (2006), 753–785.

[6] Арутюнов А.В., Грешнов А.В., Локуциевский Л.В, Сторожук К.В. Топологические и геометрические свойства пространств с симметрическими и несимметрическими f-квазиметриками, Topology Proceeding, to appear.

ИМ СО РАН, просп. академика Коптюга, 4; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: stork@math.nsc.ru

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ А. В. АРХАНГЕЛЬСКОГО

ПАВЕЛ ЧЕРНИКОВ

А. В. Архангельский [1] сформулировал проблему: *Оценить мощность финально компактного T_1-пространства X счетного псевдохарактера.*

Обозначим через β первый измеримый кардинал. В [1] указано, что верна

Теорема 1. *Если Y — топологическое пространство такое, что*
1) Y является T_3-пространством;
2) Y финально компактно;
3) Y имеет счетный псевдохарактер,
то $|Y| < \beta$.

Юхас в [2] доказал следующее утверждение.

Теорема 2. *Для всякого множества X_0, $|X_0| < \beta$, существует финально компактное T_1-пространство X^* счетного псевдохарактера такое, что $|X_0| < |X^*| < \beta$.*

Таким образом, видим, что для полного решения сформулированной проблемы Архангельского достаточно доказать, что условие 1 в теореме 1 можно опустить. Это сделано в [3]. Точность получаемой при этом оценки $|X| < \beta$ следует из теоремы 2 Юхаса (точность в том смысле, что ее нельзя уменьшить).

Список литературы

[1] А. В. Архангельский *Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты* // Успехи мат. наук. **33**:6, 29—84 (1978).

[2] I. Juhasz *Cardinal functions in topology — ten years later.* Second ed. Amsterdam: Math. Centrum, 1980.

[3] П. В. Черников *О мощности финального компактного T_1-пространства счетного псевдохарактера* // Мат. заметки СВФУ. **22**:1, 89—92 (2015).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

ДВУЛИСТНОЕ НАКРЫТИЕ ОДНОСТОРОННИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

МИРА ЧЕШКОВА

Если на поверхности в E^3 существует замкнутая кривая (дезориентирующий контур), обладающая тем свойством, что при ее обходе локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется *односторонней.* Простейшей односторонней поверхностью является лента Мебиуса. К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак, бутылка Клейна, римская поверхность [1-5].

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Так как $\rho(u) = \rho(u+4\pi)$, то функция $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u)+\rho(u+2\pi))$, есть 2π-периодическая, а вектор-функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u)-\rho(u+2\pi))$ есть 2π-антипериодическая функция. С помощью этих функций построим примеры односторонних поверхностей.

Определим поверхность M уравнением

(1) $$r(u, v) = s(u) + vl(u), u = [-\pi, \pi], v = [-1, 1].$$

Теорема 1. *Поверхность M есть модель ленты Мебиуса, для которой кривая $\rho = \rho(u)$ является краем.*

Дезориентирующий контур поверхности M (средняя линия) имеет вид $r(u, 0) = s(u)$.

Рассмотрим замкнутую поверхность K:

(2) $$r(u, v) = (p + cos(v))s(u) + sin(v)l(u), p \neq \mp 1, \quad u = [-\pi, \pi], v = [-\pi, \pi].$$

Теорема 2. *Формула (2) определяет модель бутылки Клейна.*

Поверхность K имеет два дезориентирующих контура:

$$r(u, 0) = (p + 1)s(u), \quad r(u, \pi) = (p - 1)s(u).$$

Разрежем K вдоль кривой $r = r(u, v_0), u = [-2\pi, 2\pi], v_0 \neq 0, \mp\pi$. Получим две ленты Мебиуса со средними линиями $r(u, 0) = (p + 1)s(u), r(u, \pi) = (p - 1)s(u)$. Поверхность Клейна K можно получить "склеив" две ленты Мебиуса по краю $r = r(u, v_0)$.

Если $p+1 = 0$ $(p-1 = 0)$, то средняя линия $S : r = (p+1)s(v)(S^* : r(\pi, v) = (p-1)s(v))$ вырождается в точку. Одна из лент Мебиуса вырождается в конус, гомеоморфный сфере с дырой. Поверхность (2) в этом случае гомеоморфна сфере с дырой, заклеенной листом Мебиуса. Имеем модель проективной плоскости [5, стр. 25].

Рассмотрим замкнутую поверхность P:

(3) $$r(u, v) = (1 + cos(v))s(u) + sin(v)l(u), \quad u = [-\pi, \pi], v = [-\pi, \pi].$$

Теорема 3. *Формула (3) определяет модель проективной плоскости P.*

Локально тривиальное расслоение $\psi = (E, \pi, B)$, где B — база, E — тотальное пространство, π — проекция, называется *k-листным накрытием*, если слой $\pi^{-1}(b), b \in B$ состоит из k точек. Тотальное пространство E называется *пространством накрытия* [6, с. 34]. Всякая односторонняя поверхность имеет в качестве двулистной накрывающей некоторую двустороннюю поверхность.

Рассмотрим ленту Мебиуса M (1)и цилиндр Z:

$$r^*(u^*, v^*) = e(u^*) + v^*k,\ e(u^*) = (cos(u^*), sin(u^*), 0),\ k = (0, 0, 1),\ u^* = [-\pi, \pi],\ v^* = [-1, 1].$$

Соответствие между точками ленты Мебиуса M и цилиндра Z установим по принципу равенства координат $u^* = u/2,\ v^* = v$. Так как $s(u_0 + 2\pi) = s(u_0),\ l(u_0 + 2\pi) = -l(u_0)$, то координаты $(u_0, v_0), (u_0 + 2\pi, -v_0)$ определяют одну точку ленты Мебиуса M и две точки цилиндра Z: $r^*(u_0, v_0) = e(u_0/2) + v_0k,\ r^*(u_0 + 2\pi, -v_0) = e((u_0 + 2\pi)/2) - v_0k$.

Средней линии ленты Мебиуса $v = 0$ (дезорентирующий контур ленты Мебиуса) на цилиндре соответствует средняя окружность с центром $O(0, 0, 0)$. А так как $e((u+2\pi)/2) = -e(u/2),\ r^*(u_0, v_0) = e(u_0/2)+v_0k,\ r^*(u_0+2\pi, -v_0) = -r^*(u_0, v_0)$, то точки $r^*(u_0, v_0),\ r^*(u_0+2\pi, -v_0)$ симметричны относительно центра $O(0, 0, 0)$ этой окружности.

Утверждение 1. *Цилиндр Z двулистно накрывает ленту Мебиуса M. Точке ленты M соответствуют две точки цилиндра Z, симметричные относительно центра $O(0, 0, 0)$.*

Рассмотрим бутылку Клейна K (2), тор T: $r^*(u^*, v^*) = (p + cos(v^*))\, e(u^*) + sin(v^*)k$, $e(u^*) = (cos(u^*), sin(u^*), 0),\ k = (0, 0, 1),\ u^* = [-\pi, \pi],\ v^* = [-\pi, \pi]$ и соответствие $u^* = u/2,\ v^* = v$.

Линиям $v = 0,\ v = \pi$ (дезорентирующие контуры бутылки Клейна) на торе соответствуют окружности $r^*(u^*, 0) = (p + 1)e(u^*)$, $r^*(u^*, \pi) = (p - 1)e(u^*)$ с обшим центром $O(0, 0, 0)$. Тогда точки $r^*(u_0, v_0) = (p + cos(v_0))\, e(u_0/2) + sin(v_0)k$, $r^*(u_0 + 2\pi, -v_0) = -r^*(u_0, v_0)$ симметричны относительно общего центра $O(0, 0, 0)$.

Утверждение 2. *Тор T двулистно накрывает бутылку Клейна K. Точке бутылки Клейна K соответствуют две точки тора T, симметричные относительно центра O.*

Рассмотрим проективную плоскость P (3), сферу S:

$$r^*(u^*, v^*) = cos(v^*)e(u^*) + sin(v^*)k, \quad e(u^*) = (cos(u^*), sin(u^*), 0),$$

где $k = (0, 0, 1),\ u^* = [-\pi, \pi],\ v^* = [-\pi, \pi]$ и соответствие $u^* = u/2,\ v^* = v$.

Координаты $(u_0, v_0), (u_0 + 2\pi, -v_0)$ определяют одну точку проективной плоскости P и две точки сферы S, симметричные относительно центра.

Утверждение 3. *Сфера S двулистно накрывает проективную плоскость P. Точке проективной плоскости P соответствуют две точки сферы S, симметричные относительно центра.*

Пример. Построим пример накрытия проективной плоскости P сферой S (рис. 1). Положим $s(u) = (cos(u), sin(u), 0),\ l(u) = (sin(u/2), 0, cos(u/2))$. Поверхность P есть скрещенный колпак.

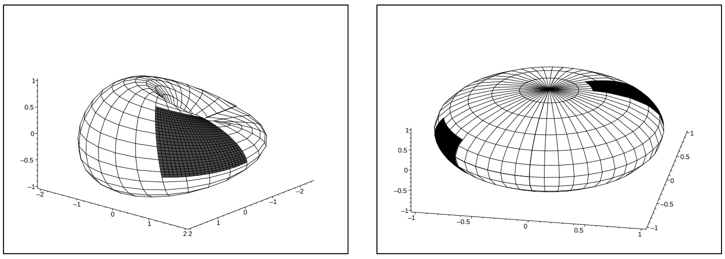

Рис. 1. Скрещенный колпак и сфера

Список литературы

[1] С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов, С.М. Халаби, “Аналитические поверхности“. М. 2006.

[2] Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, “Наглядная геометрия“. М. 1981.

[3] М.А. Чешкова, “Об одной модели бутылки Клейна в E^3“, *Тезисы международной конференции: Дни науки в Новосибирске*, 65–66 (2015).

[4] М.А. Чешкова, “Односторонние поверхности“, *Известия Алтайского университета, Барнаул.* No. 1/2, 164–168 (2015).

[5] Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, А.Т. Фоменко, “Введение в топологию“. М. 1995.

[6] М.М. Постников, “Дифференциальная геометрия“. Семестр 4. М. 1983.

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
E-mail address: cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru

ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НАД ПРОСТРАНСТВАМИ ТЕЙХМЮЛЛЕРА ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПРОКОЛАМИ

ВИКТОР ЧУЕШЕВ

Теория функций на компактных римановых поверхностях существенно отличается от теории функций на конечных римановых поверхностях даже для класса абелевых (однозначных) дифференциалов. Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$ для $\pi_1(F)$, а F_0 — компактная риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. Зафиксируем различные точки $P_1, \ldots, P_n \in F$. Пусть $F' = F \backslash \{P_1, \ldots, P_n\}$ — поверхность типа $(g, n),\ n \geq 1,\ g \geq 2$, и Γ' — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в круге $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ и $F_0' = U/\Gamma'$. Любая другая комплексно-аналитическая структура на F' задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0', т. е. выражением вида $\mu(z) d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0', где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F_0'. Эту структуру на F' будем обозначать через F_μ'. (ρ, q)*-дифференциалом Прима* относительно фуксовой группы Γ' называется дифференциал $\omega(z) dz^q$ такой, что $\omega(Tz)(T'z)^q = \rho(T)\omega(z), z \in U, T \in \Gamma'$. Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1} \ldots P_k^{n_k}, P_j \in F_\mu, n_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \ldots, k$.

Обозначим через $\Omega_\rho^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_s^{\alpha_s}}; F_\mu)$ векторное пространство, состоящее из (ρ, q)-дифференциалов кратных дивизору $\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_s^{\alpha_s}}$, где $\alpha_j \geq 1,\ \alpha_j \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, s,\ s \geq 1, q \geq 1, q \in \mathbb{N}$, а через $\Omega_\rho^q(1; F_\mu)$ — векторное подпространство голоморфных (ρ, q)-дифференциалов на F_μ. Здесь дивизор $Q_1 \ldots Q_s$ на F_μ понимается, как постоянный набор точек на поверхности F над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_g$.

Теорема 1. *Векторное расслоение* $\cup \Omega_\rho^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_s^{\alpha_s}}; F_\mu)/\Omega_\rho^q(1; F_\mu)$ *над* $\mathbb{T}_g \times (Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash 1)$ *при* $q > 1$ *(над* $\mathbb{T}_g \times (Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash L_g)$ *при* $q = 1$*) будет голоморфным векторным расслоением ранга* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s$*, причем набор классов смежности* (ρ, q)*-дифференциалов*

$$\tau_{\rho,q;Q_1}^{(1)}, \ldots, \tau_{\rho,q;Q_1}^{(\alpha_1)}, \ldots, \tau_{\rho,q;Q_s}^{(1)}, \ldots, \tau_{\rho,q;Q_s}^{(\alpha_s)},$$

— базис локально голоморфных сечений этого расслоения.

Лемма. *Для любого дивизора* $P_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot P_n^{k_n}, k_j \geq 0, j = 1, ..., n,\ q > 1$ *и любого* ρ *(или* $q = 1$ *и существенного характера* ρ*) на* F_μ*, существует дифференциал* $\tilde{\omega} \in \Omega_\rho^q(\frac{1}{P_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot P_n^{k_n}}, F_\mu)$ *с дивизором* $(\tilde{\omega}) = \frac{R_1, \ldots, R_N}{P_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot P_n^{k_n}}$*, где* $R_j \neq P_l, l = 1, ..., n, j = 1, ..., N,\ N = (2g-2)q + k_1 + \ldots + k_n$*, и с любыми заданными главными частями рядов Лорана в точках* $P_j, j = 1, ..., n$*, для его ветвей. Этот дифференциал локально голоморфно зависит от модулей* $[\mu]$ *поверхности* F_μ *и характера* ρ*.*

В дальнейшем будем предполагать, что характер ρ' на Γ' такой, что $\rho'(\gamma_j) = 1,\ j = 1, ..., n$, т. е. $\rho' = \rho \in Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E' = \cup \dfrac{\Omega_\rho^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_s^{\alpha_s}}, F_\mu') \cap M_1}{\Omega_\rho^q(1, F_\mu') \cap M_1} & \to & \cup \dfrac{\Omega_\rho^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_s^{\alpha_s}}, F_\mu)}{\Omega_\rho^q(1, F_\mu)} = E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_{g,n} \times Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*) \backslash 1 & \to & \mathbb{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*) \backslash 1. \end{array} \qquad (1)$$

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант 15-01-07906).

Теорема 2. *Диаграмма (1) является коммутативной диаграммой из голоморфных векторных расслоений, у которых соответствующие слои изоморфны, и голоморфных $n!$-листных отображений над базами состоящими из произведения пространства Тейхмюллера либо на $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash 1$ при $q > 1$, либо на $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*) \setminus L_g$ при $q = 1$.*

Список литературы

[1] В.В. Чуешев, Э.Х. Якубов, *Мультипликативные точки Вейерштрасса на компактной римановой поверхности* // Сиб. матем. журн., **43**:6, 1408–1429 (2002).

[2] М.И. Тулина, В.В. Чуешев, *Дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности* // Мат. заметки, **95**:3, 459–476 (2014).

Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: vvchueshev@ngs.ru

ГРАФИКИ РЕШЕНИЙ НЕСКОЛЬКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

НАДЕЖДА ЧУЕШЕВА

Уравнение Кортевега-де Фриза является нелинейным уравнением третьего порядка

$$P_1 u \equiv u_t + u_{xxx} + 6\ u \cdot u_x = 0.$$

Одним из точных решений этого уравнения будет функция

$$u(x,t) = \frac{1}{6} \cdot \frac{8 \cdot b^3 - c}{b} - 2 \cdot b^2 \cdot \tanh^2 (a + bx + ct)\,. \tag{1}$$

При $b = 1, c = 2, a = -\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, y = x + 2t$ график функции $u(y)$ изображен на рисунке 1. При $b = 1,\ c = 2,\ a = -\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ график функции (1) изображен на рисунке 2.

Линеаризованным уравнением Кортевега-де Фриза является уравнение

$$P_2 u \equiv u_t + u_{xxx} = 0.$$

Вещественным решением этого уравнения будет функция

$$u(x,t) = be^{-t} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) = u_1(t) u_2(x).$$

График функции $u_2(x)$ изображен на рисунке 3.

Для уравнения Кортевега-де-Фриза пятого порядка [1]

$$u_t - u_{xxxxx} + c_1\ (u^3)_x + c_2\ \left((u_x)^2\right)_x + c_3\ (u\ u_{xx})_x = 0$$

точным решением [3] при: $c_2 = -1,\ c_1 = c_3 = 1$ будет вещественная функция:

$$u(x,t) = 8b^2 - 12b^2 \tanh^2 \left(-a - bx + 16b^5 t\right),$$

где постоянные $a, b \in \mathbb{R}$. Например, при $b = 1, \quad y = -x + 16t, \quad a = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \right)$
график функции $z = u(y) = 8 - 12 \tanh^2(-a + y)$ – на рисунке 4,
график функции $z = u(x,t) = 8 - 12 \tanh^2(-a - x + 16t)$ – на рисунке 5.

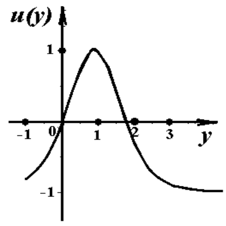

Рис. 1

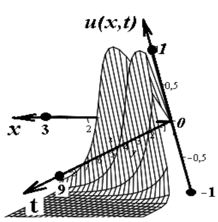

Рис. 2

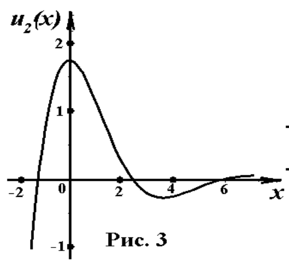

Рис. 3

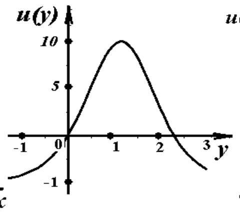

Рис. 4

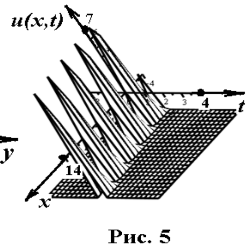

Рис. 5

При наличии диссипации уравнение Кортевега-де Фриза переходит в уравнение Бюргерса-Кортевега-де Фриза, имеющее вид $P_2 u \equiv u_t + u_{xxx} + 6\ u \cdot u_x - a u_{xx} = 0$. Точное решение этого уравнения

$$u(x,t) = \frac{1}{150} \cdot \frac{3a^3 - 250c_3}{a} - \frac{1}{25} \cdot a^2 \cdot \tanh \left(c_1 + \frac{1}{10} ax + c_3 t \right) - \frac{1}{50} \cdot a^2 \cdot \tanh^2 \left(c_1 + \frac{1}{10} ax + c_3 t \right).$$

Пусть $a = 1, \quad y = c_1 + 0,1x + c_3 t, \quad c_3 = \frac{4}{250},.$
Тогда график функции $z = u_1(y) = 150 u(y) = -1 - 6 \tanh(y) - 3 \tanh^2(y)$ – на рисунке 6.

В двумерной геометрии обобщением уравнения Кортевега-де Фриза является уравнение Кадомцева-Петвиашвили $P_3u \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t + u_{xxx} + 6u \cdot u_x\right) - a \cdot u_{yy} = 0, \quad a = \pm 1$. Одним из точных решений этого уравнения является функция

$$u(x,t,y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{-c_3c_2 + ac_4^2 + 8c_2^4}{c_2^2} - 2 \cdot c_2^2 \cdot \tanh^2\left(c_1 + c_2x + c_3t + c_4y\right).$$

При $z = c_2x + c_3t + c_4y,\ c_1 = -\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ c_2 = c_4 = 1$. Либо , $a = 1,\ c_3 = 3$, либо $a = -1,\ c_3 = 1$, график решения $u(z)$ – рисунок 1.

Второе уравнение Кадомцева-Петвиашвили

$$\frac{3}{4}u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t + \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}\right)$$

Общим решением этого уравнения будет функция

$$u(x,t,y) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{-3c_3^2 + 8c_2^4 + 4c_4c_2}{c_2^2} + 2c_2^2\tanh^2\left(c_1 + c_2x + c_3y + c_4t\right),$$

где постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Например, при $c_2 = c_3 = c_4 = 1, \quad z = x + y + t, \quad c_1 = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4}+\sqrt{3}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}\right)$ график функции $z = u(z) = -\frac{3}{2} + 2\tanh^2(c_1 + z)$ – на рисунке 7, при $c_2 = 1,\ c_3 = -1,\ c_4 = 0, \quad c_1 = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{12}+\sqrt{5}}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}\right)$ график функции $u(x,y)$ – на рисунке 8, при $c_2 = 1,\ c_3 = 1,\ c_4 = 0,\ c_1 = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{12}+\sqrt{5}}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}\right)$ график функции $u(x,y)$ – на рисунке 9,

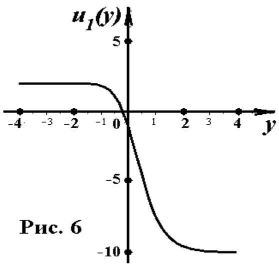

Рис. 6

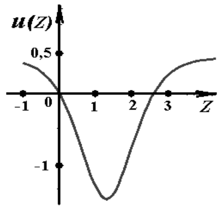

Рис. 7

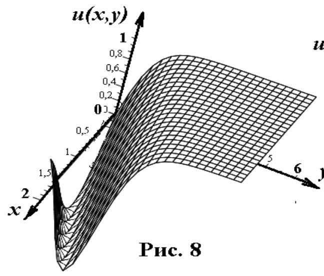

Рис. 8

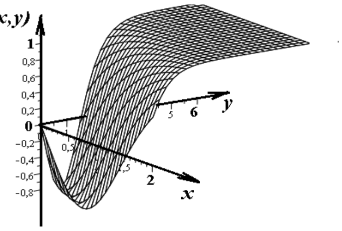

Рис. 9

Точным решением третьего уравнения Кадомцева-Петвиашвили:

$$P_4u \equiv 12 \cdot u_{xt} - 6 \cdot u_{xx}^2 - u_{xxxx} - u_{yy} = 0$$

является функция $u(x,t,y) = c_5 + \ln\left(c_1 + c_2x + \frac{1}{12} \cdot \frac{c_4^2}{c_2}t + c_4y\right)$.

Список литературы

[1] Kato Takamori, "KWell-posedness for the fifth order KdV equation.", *Funkc. Ekvacioj=Funct. Equat*, Vol. 55, No. 1, 17–53 (2012).

[2] Andrey Mironov, "Self-adjoint commuting ordinary differential operators of rank two Geometric Structures in Integrable Systems", Moscow (2012)

[3] Н. А. Чуешева, "Несколько линейных и нелинейных дифференциальных уравнений", *Дни геометрии в Новосибирске: тез. междунар. конф., Новосибирск, 26-29 августа– Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН.*, 67–68 (2015).

Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: chuesheva@ngs.ru

О ПОЛУГОЛОНОМНОСТИ ГРУППЫ ЛИ И ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМОГО МНОГООБРАЗИЯ

ЮРИЙ ШЕВЧЕНКО

Рассмотрим структурные уравнения r-мерного параллелизуемого многообразия P_r

$$d\omega^i = C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \ (i, ... = \overline{1,r}), \ C^i_{(jk)} = 0, \ C^i_{jk} \neq const. \tag{1}$$

Продифференцируем уравнения (1_1) внешним образом

$$[dC^i_{jk} + (C^i_{mk}C^m_{lj} + C^i_{jm}C^m_{lk})\omega^l] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0.$$

Выражение в квадратных скобках имеет вид

$$dC^i_{jk} + (C^i_{mk}C^m_{lj} + C^i_{jm}C^m_{lk})\omega^l = C^i_{jkl}\omega^l, \tag{2}$$

причем $C^i_{(jk)l} = 0, \ C^i_{\{jkl\}} = 0$. Уравнения (2) дают:

$$dC^i_{jk} \mid_{\omega^l=0} = 0, \ C^i_{jk} \mid_{\omega^l=0} = const, \ C^i_{jk} = C^i_{jk}(x), \ x \in P_r.$$

Если $C^i_{jk} = const$, то из уравнений (2) следует

$$C^i_{jkl} = C^i_{mk}C^m_{lj} + C^i_{jm}C^m_{lk},$$

откуда с помощью циклирования получим тождества Якоби $C^i_{m\{j}C^m_{kl\}} = 0$.

Запишем уравнения (1_1) в виде структурных уравнений гладкого многообразия

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \ \omega^i_j = C^i_{jk}\omega^k. \tag{3}$$

Тогда уравнения (2) представим иначе

$$dC^i_{jk} - C^i_{lk}\omega^l_j - C^i_{jl}\omega^l_k = C^i_{jkl}\omega^l.$$

Внешние дифференциалы форм (3_2) имеют вид

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \ \omega^i_{jk} = -C^i_{jkl}\omega^l \Rightarrow \omega^i_{[jk]} = -C^i_{jkl}\omega^l.$$

Результаты:

1) антисимметричные коэффициенты C^i_{jk} в структурных уравнениях (1_1) параллелизуемого многообразия P_r являются абсолютными инвариантами;

2) абсолютные инварианты C^i_{jk} многообразия P_r, вообще говоря, не удовлетворяют тождествам Якоби;

3) если $C^i_{jk} = const$, то многообразие P_r вырождается в группу Ли G_r, причем постоянные C^i_{jk} удовлетворяют тождествам Якоби;

4) абсолютные инварианты C^i_{jk} многообразия P_r, в частности постоянные группы Ли G_r, образуют r двухвалентных тензоров $C^i = \{C^i_{jk}\}$;

5) параллелизуемое многообразие P_r и группа Ли G_r являются в общем случае полуголономными гладкими многообразиями;

6) при выполнении условия $C^i_{jkl} = 0$ многообразие P_r тривиально, для группы G_r это условие принимает вид $C^i_{mj}C^m_{kl} = 0$.

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта , ул. А. Невского, 14, Калининград, 236041, Россия

E-mail address: `EScrydlova@kantiana.ru`

INTEGRABLE MAGNETIC GEODESIC FLOWS ON 2-TORUS: NEW EXAMPLES VIA QUASI-LINEAR SYSTEM OF PDES

SERGEY AGAPOV, MISHA BIALY, ANDREY MIRONOV

Many questions related to integrability of magnetic flows have been considered in the literature ([1], [3], [4], [6]). The following, is the only known example of polynomially integrable magnetic geodesic flows on 2-torus with non-zero magnetic field:

Example. *Let the Riemannian metric be of the form* $ds^2 = \Lambda(y)(dx^2 + dy^2)$, *and the magnetic form* $\omega = -u'(y)dx \wedge dy$. *Then the magnetic geodesic flow is integrable and the first integral is linear in momenta:* $F_1 = p_1 + u(y)$.

It is plausible that there are no other examples of integrable magnetic flows on all energy levels on the 2-torus.

It is natural to restrict our question to one energy level where few other explicit examples with quadratic in momenta integrals can be constructed via Maupertuis principle ([5]). We have proved recently that the problem can be reduced to a remarkable semi-Hamiltonian system of quasi-linear PDEs and to the question of existence of smooth periodic solutions for this system([2]). Our main result states that any Liouville metric with zero magnetic field on the 2-torus can be analytically deformed to a Riemannian metric with small magnetic field so that the magnetic geodesic flow on an energy level is integrable by means of a quadratic in momenta integral. Namely, the following theorem holds true.

Theorem. *There exist real analytic Riemannian metrics on the 2-torus which are arbitrary close to the Liouville metrics (and different from them) and a non-zero analytic magnetic fields such that magnetic geodesic flows on the energy level* $\{H = \frac{1}{2}\}$ *have polynomial in momenta first integral of degree two.*

Thus our construction gives new examples of smooth periodic solution to the semi-Hamiltonian (Rich) quasi-linear system of PDEs.

References

[1] M. L. Bialy, *Rigidity for periodic magnetic fields* // Ergod. Theor. Dyn. Syst, **20**:6, 1619–1626 (2000).

[2] M. L. Bialy, A. E. Mironov, *New semi-hamiltonian hierarchy related to integrable magnetic flows on surfaces* // Cent. Eur. J. Math., **10**:5, 1596–1604 (2012).

[3] A. V. Bolsinov, B. Jovanovic, *Magnetic geodesic flows on coadjoint orbits* // J. Phys. A-Math, **39**:16, 247–252 (2006).

[4] K. Burns, V. S. Matveev, *On the rigidity of magnetic systems with the same magnetic geodesics* // P. Am. Math. Soc., **134**:2, 427–434 (2006).

[5] B. Dorizzi, B. Grammaticos, A. Ramani, P. Winternitz, *Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials* // J. Math. Phys., **26**:12, 3070–3079 (1985).

[6] I. A. Taimanov, *On an integrable magnetic geodesic flow on the two-torus* // Regul. Chaotic Dyn., **20**:6, 667–678 (2015).

Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyug ave., 4, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: agapov.sergey.v@gmail.com, mironov@math.nsc.ru

Tel Aviv University, Ramat Aviv, Tel Aviv, 6997801, Israel
E-mail address: bialy@post.tau.ac.il

First and third authors supported by RSF (grant 14-11-00441), second author supported by ISF grant 162/15.

A NEW METHOD TO DISTINGUISH LEGENDRIAN KNOTS

IVAN DYNNIKOV

The talk is based on a joint work with Maxim Prasolov. We have shown recently that any isotopy class of a Giroux's convex surface can be presented by what we call a rectangular diagram of a surface. This applies simultaneously to two contact structures in the three-sphere, the standard one and its mirror image. We show that Giroux's convexity classes of a surface with respect to these contact structures are in a sense independent. This allows us to prove that certain isotopy classes of curves on a Seifert surface of a given Legendrian knot cannot be realized as a dividing set of a convex surface. If they are realized for another Legendrian knot having the same topological type, we can conclude that the Legendrian types of the knots are distinct.

Steklov Mathematical Insistute, Gubkina str., 8, Moscow, 119991, Russia
E-mail address: dynnikov@mech.math.msu.su

BRAID GROUPS, GROUPS G_n^k AND IMAGINARY GENERATORS

VASSILY MANTUROV

In 2015, the author initiated the study of groups denoted by G_n^k, depending on two natural parameters, n and k, and formulated the main principle:

if a dynamical system describing a motion of n particles, is in general position with respect to some nice property governed by k particles, then it has topological invariants valued in G_n^k.

The main examples calculated in 2015 by the author jointly with I.M.Nikonov led to homomorphisms from the pure n-strand braid groups to G_n^3 and G_n^4 with nice properties being "three points are collinear" and "four points belong to the same circle or line" respectively.

One of the main features of the groups G_n^k is the existence of various "local invariants" of letters in words: in the standard presentation of G_n^k, with each letter, one can associate indices; as long as the letter persists in the word, the indices remain the same and two letters can not be cancelled by a relation unless their indices coincide.

It turns out that usual Artin presentation of the braid group is "of the G_n^2 nature" with resepct to the property "two points belong to the same vertical line". On the other hand, the same braid can be written in another way in the G_n^3 language; we can think of a vertcial line as a line passing through a fixed infinite point.

This allows one to treat Artin's braid-words as parts of larger words and to "read between letters".

We call this the "imaginary generators" phenomenon.

Algebraically, this leads to an monomorphism from the Artin (pure) braid group to a larger group defined by splicing new generators in such a way that the composition of the constructed monomorphism with the obvious projection (deletion of the new generators) is the identity map.

This allows one to discover various new properties of Artin's braid-words coming from larger groups. In particular, one can construct local invariants of classical crossings of Artin's braid groups coming from the G_n^k-nature of larger groups.

The easiest application of the theory gives easy-to-calculate obstructions for two crossings of a braid to get cancelled when applying Reidemeister moves.

The latter work is partially joint with Seongjeong Kim.

Bauman Moscow State Technical University, Baumanskaya 2-ya st., 5, Moscow, 105005, Russia

E-mail address: vomanturov@yandex.ru

ON ONE-POINT COMMUTING DIFFERENCE OPERATORS OF RANK ONE

GULNARA MAULESHOVA, ANDREY MIRONOV

We study one-point difference commuting operators of rank one. The coefficients of these operators depend on a functional parameter, shift operators being included only with positive powers. We study these operators in the case of hyperelliptic spectral curve when the marked point coincides with the branch point. We construct examples of operators with polynomial and trigonometric coefficients. Moreover, difference operators with polynomial coefficients can be embedded in the differential ones with polynomial coefficients. This construction provides a new way of constructing commutative subalgebras in the first Weyl algebra.

Novosibirsk state university, Pirogova st., 2, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: mauleshova$_g s$@*mail.ru*

Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyug ave., 4, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: mironov@math.nsc.ru

Second author supported by RSF (grant 14-11-00441).

THE BOCHNER TECHNIQUE FOR SOME COMPLETE RIEMANNIAN ALMOST PRODUCT MANIFOLDS AND SUBMERSIONS OF COMPLETE RIEMANNIAN MANIFOLDS

SERGEY STEPANOV

In the 1940s, S. Bochner devised an analytic technique to obtain vanishing theo-rems for some topological or geometric invariants (e.g. Betti numbers, the di-mension of the vector space of Killing vector-fields) on a closed (i.e. compact without boundary) Riemannian manifold, under some curvature assumption (see [1]). Currently, there are two different points of view about classical Bochner technique. The first one uses the Greens divergence theorem and the second one uses the Hophs theorem. In works of Lichnerowicz, Nomizu, Yau and many others, the analytic Bochner methods was substantially developed and successfully applied to complex and complete Riemannian manifolds and Lorentzian manifolds (see [2] and [3]). In the present report we will prove Liouville-type theorems: non-existence theo-rems for some complete Riemannian almost product manifolds and submersions of complete Riemannian manifolds which generalize similar results for compact manifolds (see [4]). We will use the generalized Bochner technique (see [3]): our proofs will be based on generalized divergence theorems and generalized Hoph theorems for complete, noncompact Riemannian manifolds. All our results were announced in [5] and [6].

References

[1] H. H. Wu, *The Bochner technique in differential geometry* // Harwood Acad. Publ., Harwood (1987).
[2] S. E. Stepanov, *Vanishing theorems in Affine, Riemannian and Lorentzian geometries* // J. Math. Sciences (NY), **141**:1, 929–964 (2007).
[3] S. Pigola, M. Rigoli, A. G. Setti, *Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis. A Generalization of the Bochner Technique* // Birkhauser Verlag AG, Berlin (2008).
[4] S. E. Stepanov, *Riemannian almost product manifolds and submersions* // J. Math. Sciences (NY), **99**:6, 1788–1831 (2000).
[5] S. E. Stepanov, I. I. Tsyganok, *Liouville-type theorems for conformal mappings and their application* // arXiv:1608.01498v2 [math.DG], 9 pp.
[6] S. E. Stepanov, *Liouville-type theorems for twisted and warped products manifolds* // arXiv:1608.03590 [math.DG], 16 pp.

All Russian Institute for Scientific and Technical Information of the Russian Academy of Sciences, Usievicha street, 20, Moscow, 125190, Russia

Finance University under the Government of Russian Federation, Leningradsky Prospect, 49-55, Moscow, 125468, Russia
E-mail address: s.e.stepanov@mail.ru

ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СУБРИМАНОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГУРСА

СЕРГЕЙ АГАПОВ

Изучается субриманова задача на группе Гурса. Отвечающая этой задаче гамильтонова система обладает полным набором первых интегралов, находящихся в инволюции, то есть является вполне интегрируемой. Мы находим поверхности уровней первых интегралов. Кроме того, мы показываем, что существуют экстремальные траектории, чьи проекции на горизонтальную плоскость являются замкнутыми кривыми. Такие траектории интересны тем, что они отвечают движению вдоль "запрещенных" направлений.

Список литературы

[1] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления* // Физматлит, 2005.
[2] J. P. Laumond, *Robot Motion Planning and Control* // Springer, 1998.
[3] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов* // Физматгиз, 1961.
[4] I. A. Taimanov, *Integrable geodesic flows of nonholonomic metrics* // Journal of Dynamical and Control Sistems, **3**:1, 129—147 (2003).
[5] А. Д. Мажитова, *Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли* // Матем. труды, **15**:1, 120–128 (2012).
[6] Ю. Л. Сачков, *Теория управления на группах Ли* // Совр. математика. Фунд. направления, **26**, 5–59 (2007).
[7] А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, *Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля* // Матем. сборник, **202**:11, 31–54 (2011).
[8] A. Anzaldo-Meneses, F. Monroy-Perez, *Goursat distribution and sub-Riemannian structures* // Journal of Math. Physics, **44**:12, (2003).

Институт математики им. С.Л. Соболева, пр. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: agapov.sergey.v@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029) и РФФИ (грант 12-01-00124-а).

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЦИЦЕЙКИ, ОТВЕЧАЮЩИЕ СИНГУЛЯРНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ КРИВЫМ

МЕЙРАМГУЛ ЗАЙНУЛЛИНА

В этой работе мы строим решение уравнения Цицейки в элементарных функциях, которое отвечает сингулярной спектральной кривой.

Уравнение Цицейки

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} v = e^{-2v} - e^{v} \tag{1}$$

было получено в 1907 г. Цицейкой [1] для описания поверхностей постоянной аффинной средней кривизны. Оно также возникает в классификации интегрируемых случаев уравнения Клейна–Гордона (см. [2]–[3]).

Шарипов доказал в [4], что конформная метрика

$$ds^2 = 2e^{v}(dx^2 + dy^2)$$

минимальной лагранжевой поверхности в $\mathbb{C}P^2$ удовлетворяет уравнению Цицейки

$$\partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 4e^{-2v} - 4e^{v}.$$

Михайловым в [5] доказано, что уравнение (1) допускает матричное представление нулевой кривизны

$$A_{\bar{z}} - B_z + [A, B] = 0, \tag{2}$$

где

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & v_z & -\frac{i}{\lambda}e^{-v} \\ -e^{-v} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -e^{-v} & 0 & 0 \\ 0 & -i\lambda e^{-v} & v_{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

Шарипов [4], используя матричное представление нулевой кривизны (2), нашел конечнозонные решения уравнения Цицейки, которые отвечают неособым спектральным кривым. Мы, по аналогии метода Шарипова, строим решения уравнения Цицейки, отвечающие сингулярным спектральным кривым. Отметим, что наши решения выражаются в элементарных функциях.

Список литературы

[1] G. Tzitzéica, *Geometric infinitesimale-sur une nouvelle classes de surfaces* // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **144**, 1257–1259 (1907).

[2] R. K. Bullough, R. K. Dodd, *Polynomial conserved densities for the sine-Gordon equations* // Proc. Roy. Soc. London Ser. A., **352**, 481–503 (1977).

[3] А. В. Жибер, А. Б. Шабат, *Уравнение Клейна–Гордона с нетривиальной группой* // ДАН СССР, **247**:5, 1103–1105 (1979).

[4] Р. А. Шарипов, *Минимальный торы в пятимерной сфере* // Теор. и матем. физика, **87**:1, 48—56 (1991).

[5] A. V. Mikhailov, *The reduction problem and the scattering method,* // Physica 3D, **1**, 73–117 (1981).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: zaynullina_ms@mail.ru

О МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ЛИ С ГАРМОНИЧЕСКИМ ТЕНЗОРОМ ВЕЙЛЯ

ПАВЕЛ КЛЕПИКОВ, СВЕТЛАНА КЛЕПИКОВА, ОЛЕСЯ ХРОМОВА

Римановы многообразия с гармоническим тензором Вейля исследовались многими математиками [1]. В класс многообразий с $\operatorname{div} W = 0$ входят конформно плоские многообразия ($W = 0$), многообразия Эйнштейна ($r = \lambda g$) и их прямые произведения, локально симметрические ($\nabla R = 0$), Риччи параллельные многообразия ($\nabla r = 0$) и ряд других многообразий [1]. Важным примером таких многообразий являются группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой.

Ранее трехмерные и четырехмерные группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля, а также с гармоническим тензором Схоутена-Вейля $\operatorname{div} W = 0$ изучались авторами в работах [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и оператор Риччи ρ определим как

$$r(X,Y) = \operatorname{tr}(V \to R(X,V)Y), \quad g\left(\rho\left(X\right), Y\right) = r(X,Y).$$

Разделив тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни-Номидзу $\owedge$, получим тензор Вейля W и тензор одномерной кривизны A [1]:

$$R = W + A \owedge g, \quad A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right).$$

где $(A \owedge g)(X,Y,Z,V) = A(X,Z)g(Y,V) + A(Y,V)g(X,Z) - A(X,V)g(Y,Z) - A(Y,Z)g(X,V)$.

Дивергенцию тензора Вейля в локальных координатах определим равенством:

$$\operatorname{div} W_{jkt} = g^{ip} W_{ijkt,p},$$

где $W_{ijkt,p}$ — ковариантные производные тензора Вейля.

Важным направлением исследований метрических групп Ли с гармоническим тензором Вейля является проблема классификации таких групп Ли. В данной работе получена классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой и гармоническим тензором Вейля.

Отметим, что левоинвариантные псевдоримановы метрики Эйнштейна, метрики с параллельным тензором Риччи и конформно плоские метрики на четырехмерных группах Ли были ранее классифицированы Дж. Кальварузо и А. Заемом в работах [8, 9, 10], поэтому все представленные далее группы Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой не являются ни многообразиями Эйнштейна, ни конформно плоскими, ни Риччи параллельными.

Ключевым шагом к проблеме классификации четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой и гармоническим тензором Вейля является рассмотрение различных возможных форм оператора Риччи, которые называются *типами Сегре* (см. [8]). Так, например, запись “оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(11), 2\}$” означает, что оператор Риччи имеет два различных собственных значения, оба имеют алгебраическую кратность два, но первому из них соответствует двумерное собственное подпространство, а второму — одномерное. Запятая в записи типа Сегре отделяет собственные значения, соответствующие пространственно подобным векторам, от значений соответствующих времени

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

и свето подобным векторам. Круглые скобки группируют блоки соответствующие одному и тому же собственному значению.

Теорема 1.
Пусть G — четырехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g, которая не является ни метрикой Эйнштейна, ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Тогда $\operatorname{div} W = 0$ в том и только в том случае, когда в алгебре Ли группы G существует псевдоортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ с времениподобным e_4, в котором структурные уравнения имеют вид, приведенный в таблице 1.

Таблица 1. Алгебры Ли четырехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и гармоническим тензором Вейля.

Тип Сегре оператора ρ	Таблица умножения
$\{(11), 2\}$	$[e_1, e_2] = ae_1 + be_2$, $[e_1, e_3] = -ce_3 - c\left(\frac{1}{2}\varepsilon a^2 + \frac{1}{2}\varepsilon b^2 + 1\right)e_4$, $[e_2, e_3] = -de_3 - d\left(\frac{1}{2}\varepsilon a^2 + \frac{1}{2}\varepsilon b^2 + 1\right)e_4$, $[e_1, e_4] = -c\left(\frac{1}{2}\varepsilon a^2 + \frac{1}{2}\varepsilon b^2 - 1\right)e_3 + ce_4$, $[e_2, e_4] = -d\left(\frac{1}{2}\varepsilon a^2 + \frac{1}{2}\varepsilon b^2 - 1\right)e_3 + de_4$, $\varepsilon = \pm 1$, $ac + bd = 0$, $a^2 + c^2 \neq 0$, $\varepsilon\left(2a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2\right) - ad + bc = \varepsilon$, $\varepsilon\left(a^2 + b^2\right)^2 + 48ad - 48bc + 30\varepsilon \neq 0$.
$\{(11, 2)\}$	$[e_1, e_2] = ae_3 + ae_4$, $[e_1, e_3] = -[e_1, e_4] = (b - c)e_1 - de_2 - fe_3 - fe_4$, $[e_2, e_3] = -[e_2, e_4] = -he_1 - be_2 - ze_3 - ze_4$, $[e_3, e_4] = ce_3 + ce_4$, $\varepsilon = \pm 1$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $a^2 - (d + h)^2 - 4b^2 + 4bc = 2\varepsilon$, $a - d + h \neq 0$, $a^2 + c^2 \neq 2\varepsilon$.
	$[e_1, e_3] = -[e_1, e_4] = -ae_1 - be_2 - ce_3 - ce_4$, $[e_2, e_3] = -[e_2, e_4] = -de_1 - fe_2 - he_3 - he_4$, $[e_3, e_4] = ze_3 + ze_4$, $\varepsilon = \pm 1$, $z \neq 0$, $(b + d)^2 + 2(a + f)(a + z - f) = -2\varepsilon$, $16a^4 - 32a^3z + 8a^2b^2 + 8a^2d^2 + 16a^2z^2 - 8ab^2z + 32abdf - 16abdz - 8ad^2z + b^4 - 12b^3d - 26b^2d^2 + 4b^2z^2 - 12bd^3 - 16bdf^2 + 8bdz^2 + d^4 + 4d^2z^2 + 16\varepsilon a^2 - 16\varepsilon az - 4\varepsilon b^2 - 8\varepsilon bd - 4\varepsilon d^2 + 4 \neq 0$.
$\{11, 1\bar{1}\}$	$[e_1, e_3] = -\varepsilon ae_3 + \frac{\sqrt{3}}{3}ae_4$, $[e_1, e_4] = \frac{\sqrt{3}}{3}ae_3 + \varepsilon ae_4$, $[e_3, e_4] = \frac{2\sqrt{3}}{3}ae_1$, $\varepsilon = \pm 1$, $a \neq 0$.

Схема доказательства. Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{11, 1\bar{1}\}$. Тогда в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует псевдоортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ с времениподобным e_4, в котором матрица тензора Риччи будет иметь вид (см., например, [8]) :

$$r = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \rho_1 \neq \rho_2, \quad \beta \neq 0. \tag{1}$$

Условие $\operatorname{div} W = 0$ в случае постоянной скалярной кривизны (например, в случае групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой) равносильно следующему условию на ковариантные производные тензора Риччи [1]:

$$r_{ij,k} = r_{ik,j}. \tag{2}$$

В данном базисе нам известен вид тензора Риччи и метрического тензора, поэтому мы запишем уравнения (2) и будем рассматривать их как ограничения на структурные константы:

$$
\begin{gathered}
C_{3,4}^{3}\beta=0,\quad C_{3,4}^{4}\beta=0,\quad C_{1,2}^{1}(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{1,2}^{2}(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(3C_{1,3}^{4}+C_{1,4}^{3}+C_{3,4}^{1}\right)\beta+2C_{1,3}^{3}(\alpha-\rho_1)=0,\qquad (\alpha-\rho_1)C_{1,3}^{1}-\beta C_{1,4}^{1}=0,\\
\left(C_{1,3}^{4}+3C_{1,4}^{3}+C_{3,4}^{1}\right)\beta-2C_{1,4}^{4}(\alpha-\rho_1)=0,\qquad (\alpha-\rho_1)C_{1,4}^{1}+\beta C_{1,3}^{1}=0,\\
\left(3C_{2,3}^{4}+C_{2,4}^{3}+C_{3,4}^{2}\right)\beta+2C_{2,3}^{3}(\alpha-\rho_2)=0,\qquad (\alpha-\rho_2)C_{2,3}^{2}-\beta C_{2,4}^{2}=0,\\
\left(C_{2,3}^{4}+3C_{2,4}^{3}+C_{3,4}^{2}\right)\beta-2C_{2,4}^{4}(\alpha-\rho_2)=0,\qquad (\alpha-\rho_2)C_{2,4}^{2}+\beta C_{2,3}^{2}=0,\\
(\alpha-\rho_1)\left(C_{1,3}^{4}-C_{1,4}^{3}\right)-\beta\left(C_{1,3}^{3}+C_{1,4}^{4}\right)=0,\quad (\alpha-\rho_1)C_{3,4}^{1}+\beta\left(C_{1,3}^{3}-C_{1,4}^{4}\right)=0,\\
(\alpha-\rho_2)\left(C_{2,3}^{4}-C_{2,4}^{3}\right)-\beta\left(C_{2,3}^{3}+C_{2,4}^{4}\right)=0,\quad (\alpha-\rho_2)C_{3,4}^{2}+\beta\left(C_{2,3}^{3}-C_{2,4}^{4}\right)=0,\\
\left(C_{2,4}^{1}+C_{1,2}^{4}+C_{1,4}^{2}\right)\beta-(\rho_1-2\rho_2+\alpha)C_{1,3}^{2}+(\alpha-\rho_1)\left(C_{1,2}^{3}-C_{2,3}^{1}\right)=0,\\
\left(C_{1,2}^{3}-C_{1,3}^{2}-C_{2,3}^{1}\right)\beta-(\rho_1-2\rho_2+\alpha)C_{1,4}^{2}-(\alpha-\rho_1)\left(C_{1,2}^{4}+C_{2,4}^{1}\right)=0,\\
(\alpha-\rho_1)C_{1,3}^{2}-(\rho_1+2\rho_2-3\alpha)C_{1,2}^{3}-(3\rho_1-2\rho_2-\alpha)C_{2,3}^{1}+\left(3C_{1,2}^{4}-C_{1,4}^{2}-C_{2,4}^{1}\right)\beta=0,\\
(\alpha-\rho_1)C_{1,4}^{2}+(\rho_1+2\rho_2-3\alpha)C_{1,2}^{4}-(3\rho_1-2\rho_2-\alpha)C_{2,4}^{1}+\left(3C_{1,2}^{3}+C_{1,3}^{2}+C_{2,3}^{1}\right)\beta=0.
\end{gathered}
$$

Далее накладываем на структурные константы условие выполнения тождества Якоби, а также вычисляем в данном базисе матрицу тензора Риччи и приравниваем компоненты полученной матрицы к компонентам матрицы (1). Решая полученную систему с помощью алгоритмов, основанных на базисах Гребнера [11], с учетом ограничений $\rho_1\neq\rho_2$, $\beta\neq 0$, и отбрасывая конформно плоские и Риччи параллельные случаи, находим, что

$$
\begin{gathered}
C_{1,2}^{1}=C_{1,2}^{2}=C_{1,2}^{3}=C_{1,2}^{4}=C_{1,3}^{1}=C_{1,3}^{2}=C_{2,3}^{1}=C_{2,3}^{2}=C_{2,3}^{3}=C_{2,3}^{4}=0,\\
C_{1,4}^{1}=C_{1,4}^{2}=C_{2,4}^{1}=C_{2,4}^{2}=C_{2,4}^{3}=C_{2,4}^{4}=C_{3,4}^{2}=C_{3,4}^{3}=C_{3,4}^{4}=0,\\
C_{1,3}^{3}=-C_{1,4}^{4}=-\varepsilon a,\quad C_{1,3}^{4}=C_{1,4}^{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a,\quad C_{3,4}^{1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\\
\rho_1=-\frac{8}{3}a^2,\quad \rho_2=0,\quad \alpha=\frac{4}{3}a^2,\quad \beta=\frac{4\sqrt{3}}{3}\varepsilon a^2,
\end{gathered}
$$

где $\varepsilon=\pm1$, $a\neq 0$.

Случаи остальных типов Сегре рассматриваются аналогично.

Отметим, что классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой нейтральной сигнатуры проводится аналогичными методами и дает новые нетривиальные примеры групп Ли с $\operatorname{div} W=0$.

Другим важным направлением исследований метрических групп Ли с гармоническим тензором Вейля является исследование солитонов Риччи на таких группах Ли. В данной работе получена теорема о строении оператора Риччи группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой солитона Риччи и гармоническим тензором Вейля

Исследованию многообразий постоянной кривизны Риччи, или эйнштейновых многообразий, посвещены работы многих математиков (см., например, обзоры [1, 12, 13]). В последнее время изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, одними из которых являются солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном в работе [14]. Солитоном Риччи называют (псевдо)риманово многообразие (M,g), для которого выполняется уравнение $r=\Lambda\cdot g+L_Xg$, где r — тензор Риччи метрики g, $\Lambda\in\mathbb{R}$, L_Xg — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X. В дальнейшем солитоны Риччи изучались в работах многих математиков (см., например, [15]).

Солитон Риччи будем называть тривиальным, если он изометричен прямому произведению многообразия Эйнштейна и (псевдо)евклидова пространства.

Важным примером солитонов Риччи являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые ранее были рассмотрены Х. Лауре (см., например, [16]). Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если выполняется равенство $\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + D$, где ρ — оператор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, Id — тождественный оператор, D — некоторое дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$.

В работе К. Онда было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [17]).

Авторами в работе [18] изучались алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с тривиальным тензором Вейля. Настоящая работа продолжает данные исследования в случае метрических групп Ли с гармоническим тензором Вейля.

Теорема 2.
Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи и гармоническим тензором Вейля, тогда возможны два случая:

(1) $\Lambda \neq 0$*: тогда оператор D имеет тип Сегре $\{(1\ldots1)\,(1\ldots1\,2\ldots2)\}$, где первому блоку соответствует собственное значение $-\Lambda$, второму — 0.*
(2) $\Lambda = 0$*: тогда оператор D имеет тип Сегре $\{(1\ldots1\,2\ldots2\,3\ldots3)\}$ с единственным собственным значением, равным нулю.*

Отметим, что некоторые блоки матрицы оператора D в теореме 2 могут быть тривиальными. Например, при $\Lambda = 0$ оператор D может иметь тип Сегре $\{(1\ldots1\,2\ldots2)\}$. В силу уравнения алгебраического солитона Риччи, оператор Риччи имеет аналогичные типы Сегре, что и оператор D. При этом первом случае собственные значения равны 0 и Λ соответственно, а во втором, т.к. $\Lambda = 0$, выполняется $\rho = D$.

Следствие 1.
Пусть G — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи и гармоническим тензором Вейля. Если оператор Риччи диагонализируем, то алгебраический солитон Риччи тривиален.

В случае групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой оператор Риччи всегда диагонализируем, а значит справедливо

Следствие 2.
Пусть G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой алгебраического солитона Риччи и гармоническим тензором Вейля. Тогда G — тривиальный алгебраический солитон Риччи.

С помощью ограничений на тип Сегре оператора Риччи, приведенных в теореме 2, удается построить нетривиальные алгебраические солитоны Риччи в псевдоримановом случае. В качестве такого примера приведем следующую шестимерную метрическую алгебру Ли, структурные уравнения которой имеют вид:

$$[e_1, e_2] = ae_4, \quad [e_1, e_3] = \delta\sqrt{2}e_5, \quad [e_1, e_4] = -ae_2, \quad [e_3, e_6] = ae_3, \quad [e_5, e_6] = ae_5,$$

где $a \neq 0$, $\delta = \pm 1$. Ненулевые скалярные произведения задаются равенствами

$$\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = \langle e_4, e_4\rangle = \langle e_5, e_6\rangle = 1.$$

Данная метрическая алгебра Ли является разрешимой и неразложимой, оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(11112)\}$, при этом она не является конформно плоской и тензор Риччи не параллелен, но дивергенция тензора Вейля равна нулю. Константа Λ в уравнении алгебраического солитона Риччи равна нулю.

Список литературы

[1] А. Бессе, Многообразия Эйнштейна. Том 1. // М.: Мир, 1990.

[2] O.P. Gladunova, E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, Harmonic tensors on three-dimensional Lie groups with left-invariant Lorentz metric // Journal of mathematical sciences, **198**:5, 505–545 (2014).

[3] О.П. Гладунова, В.В. Славский, Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // ДАН, **431**:6, 736–738 (2010).

[4] О.П. Гладунова, В.В. Славский, О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды, **14**:1, 1–20 (2011).

[5] O.P. Gladunova, V.V. Slavskii, Harmonicity of the Weyl tensor of left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups // Siberian Advances in math., **23**:1, 32–46 (2013).

[6] Е.Д. Родионов, В.В. Славский, О.П. Хромова, О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных разложимых группах Ли // Известия АлтГУ, 1/1, 122–126 (2014).

[7] Е.Д. Родионов, В.В. Славский, О.П. Хромова, О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных неразложимых группах Ли // Известия АлтГУ, 1/2, 62–73 (2014).

[8] G. Calvaruso, A. Zaeim, Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds // Tohoku Math. J., **66**, 31–54 (2014).

[9] G. Calvaruso, A. Zaeim, Four-dimensional Lorentzian Lie groups // Differential Geometry and its Applications, **31**, 496–509 (2013).

[10] G. Calvaruso, A. Zaeim, Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups // Journal of Lie Theory, **25**, 1023–1044 (2015).

[11] И.В. Аржанцев, Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. // М.: МЦНМО, 2003.

[12] Ю.Г. Никоноров, Е.Д. Родионов, В.В. Славский, Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия, **37**, 1–78 (2006).

[13] M. Wang, Einstein metrics from symmetry and bundle constructions // Suppl. J. Differ. Geom., **6**, 287–325 (1999).

[14] R.S. Hamilton, The Ricci flow on surfaces // Contemp. Math., **71**, 237–261 (1988).

[15] R.M. Arroyo, R. Lafuente, Homogeneous Ricci solitons in low dimensions // Int Math Res Notices., **13**, 4901–4932 (2015).

[16] J. Lauret, Ricci soliton homogeneous nilmanifolds // Math. Ann., **319**:4, 715–733 (2001).

[17] K. Onda, Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case // Acta Mathematica Hungarica, **144**:1, 247–264 (2014).

[18] П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин, Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия АлтГУ, **89**:1, 123–128 (2015).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
E-mail address: `askingnetbarnaul@gmail.com`, `pastukhova.svetlana.1992@gmail.com`, `khromova.olesya@gmail.com`

СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА МНОГООБРАЗИЯХ УОКЕРА МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

ДМИТРИЙ ОСКОРБИН, ЕВГЕНИЙ РОДИОНОВ, ИГОРЬ ЭРНСТ

(Псевдо)риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется *солитоном Риччи*, если на $\mathcal{M}$ имеет место уравнение:

$$\pounds_X g + \rho = \lambda g \tag{1}$$

где g – метрический тензор, ρ – тензор Риччи, $\lambda \in \mathbb{R}$ - некоторая константа, X– полное дифференцируемое векторное поле, $\pounds_X g$ – производная Ли g по направлению поля X.

Уравнение солитона Риччи является обобщением уравнения Эйнштейна, и впервые данный термин был введен Р. Гамильтоном в работе [1]. Позднее солитоны Риччи исследовались в работах многих математиков (см., например, обзор [2]). Задача нахождения солитонов Риччи является достаточно сложной, поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на размерность, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на векторное поле X.

Одним из важных примеров такого рода ограничений являются многообразия Уокера, то есть псевдоримановы многообразия, допускающие гладкое параллельное (в смысле связности Леви-Чивита) распределение изотропных векторов. Геометрия многообразий Уокера, а также солитоны Риччи на них исследовались в работах [3, 4]. Настоящая статья является продолжением данных работ и посвящена изучению солитонов Риччи на многообразиях Уокера размерностей 3 и 4.

В работе ([5]) А. Галаевым показано, что конформно плоские лоренцевы многообразия Уокера допускают специальную систему координат, в которой метрика имеет удобный для вычислений вид. Назовем данную систему координат специальной системой координат Уокера. Пусть далее $(\mathcal{M}, g)$ четырёхмерное конформно плоское лоренцево многообразие Уокера, тогда в специальной системе координат Уокера систему уравнений в частных производных, задающих солитон Риччи, можно разрешить. Ограничимся случаем метрик специального вида, которые, следуя работе ([5]), будем называть метриками плоских гравитационных волн. Такие метрики в специальной системе координат Уокера (v, x, y, u) имеют вид:

$$g = 2dvdu + dx^2 + dy^2 + a(u)(x^2 + y^2)(du)^2,$$

где $a(u)$ – гладкая функция, не равная нулю ни на каком открытом подмножестве области определения. Метрики плоских гравитационных волн связаны с коммутативными алгебрами голономии на многообразиях Уокера, см. подробнее ([5]). Справедлива

Теорема. *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – четырёхмерное конформно плоское лоренцево многообразие Уокера, где g – метрика плоской гравитационной волны*

$$g = 2dvdu + dx^2 + dy^2 + a(u)(x^2 + y^2)(du)^2,$$

$a(u)$ не обращается в 0 ни на каком открытом подмножестве области определения. Тогда в окрестности произвольной точки в специальной системе координат Уокера для любой константы λ существует решение уравнения солитона Риччи, причем компоненты векторного поля X имеют вид:

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

$$\left(\frac{\lambda}{2}y + x + \beta(u), \frac{\lambda}{2}x - y + \eta(u), \omega(u), (\lambda - \omega'(u))v - \eta'(u)x - \beta'(u)y + \gamma(u)\right)$$

где функции $\beta(u), \gamma(u), \eta(u), \omega(u)$ определяются уравнениями

$$2\omega'(u)a(u)+a'(u)\omega(u) = 0, \omega''(u) = 0, \gamma'(u)-a(u) = 0, 2a(u)\beta(u)-2\beta''(u) = 0, 2a(u)\eta(u)-2\eta''(u) = 0.$$

Схема доказательства. Будем искать векторное поле X на $\mathcal{M}$, обозначив его координаты $K(v,x,y,u), L(v,x,y,u), M(v,x,y,u), N(v,x,y,u)$, где K, L, M, N – гладкие функции. Запишем уравнение солитона Риччи в специальной системе координат Уокера:

$$(2)\qquad \begin{cases} 2N_v &= 0\\ N_x + L_v &= 0\\ N_y + M_v &= 0\\ N_u + (x^2+y^2)a(u)N_v + K_v &= \lambda\\ 2L_x &= \lambda\\ M_x + L_y &= 0\\ (x^2+y^2)a(u)N_x + L_u + K_x &= 0\\ 2M_y &= \lambda\\ (x^2+y^2)a(u)N_y + M_u + K_y &= 0\\ 2(x^2+y^2)a(u)N_u + 2K_u + 2xa(u)L+ & \\ 2ya(u)M + (x^2+y^2)a'(u)N - 2a(u) &= \lambda(x^2+y^2)a(u) \end{cases}$$

Из уравнений системы нетрудно получить:

$$\begin{aligned} M(v,x,y,u) &= \frac{\lambda}{2}y + x + \beta(u),\\ L(v,x,y,u) &= \frac{\lambda}{2}x - y + \eta(u),\\ N(v,x,y,u) &= \omega(u),\\ K(v,x,y,u) &= (\lambda - \omega'(u))v - \eta'(u)x - \beta'(u)y + \gamma(u). \end{aligned} \tag{3}$$

Для данных функций выполнены все уравнения системы (2), за исключением последнего. Подставляя в него выражения (3), получим:

$$(x^2+y^2)(2\omega'(u)a(u) + a'(u)\omega(u)) - 2v\omega''(u) + 2y(a(u)\beta(u) - \beta''(u)) +$$

$$+ 2x(a(u)\eta(u) - \eta''(u)) + 2(\gamma'(u) - a(u)) = 0$$

Это выражение тождественно равно 0, поэтому имеем:

$$2\omega'(u)a(u) + a'(u)\omega(u) = 0, \omega''(u) = 0, \gamma'(u) - a(u) = 0, \tag{4}$$

$$2a(u)\beta(u) - 2\beta''(u) = 0, 2a(u)\eta(u) - 2\eta''(u) = 0. \tag{5}$$

Для любой гладкой функции $a(u)$ уравнения (4) локально разрешимы, а уравнения (5) можно свести к уравнениям Риккати, которые локально разрешимы.

Замечание. *По аналогичной схеме рассматриваются остальные случаи четырехмерных конформно плоских лоренцевых метрик на многообразиях Уокера. Случай $a(u) = 0$ рассматривается отдельно и дает в некотором смысле тривиальные решения.*

Замечание. *Локально конформно плоские лоренцевы солитоны Риччи с градиентным векторным полем X были ранее изучены в работе ([3]), где было показано, что они либо разложимы, либо стабильны ($\lambda = 0$).*

В размерности 3 тензор Вейля тривиален, поэтому данный случай рассматривается отдельно. Уравнение солитона Риччи на трехмерном лоренцевом локально симметрическом многообразии Уокера рассматривалось в работе [3]. В специальной системе координат Уокера (t, x, y), согласно [4], метрический тензор и тензор Риччи принимают следующий вид:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & \varphi(x,y) \end{pmatrix}, \quad \rho = -\tfrac{\varepsilon}{2}\varphi_{xx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

где $\varphi(x, y)$ – некоторая гладкая функция, $\varepsilon = \pm 1$. Заметим, что локально симметрические метрики характеризуются условием $\varphi_{xx} = const$ Будем искать векторное поле X на многообразии $\mathcal{M}$, обозначив его координаты $A(t, x, y), B(t, x, y), C(t, x, y)$, где A, B, C – гладкие функции. Тогда уравнение солитона Риччи $\pounds_X g + \rho = \lambda g$ в специальной системе координат Уокера приобретает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}C_t & = & 0 \\ C_x + \varepsilon B_t & = & 0 \\ C_y + C_t\varphi + A_t & = & \lambda \\ 2B_x & = & \lambda \\ C_x\varphi + \varepsilon B_y + A_x & = & 0 \\ 2C_y\varphi + 2A_y + B\varphi_x + C\varphi_y - \frac{\varepsilon}{2}\varphi_{xx} & = & \lambda\varphi \end{array} \right. \tag{7}$$

В случае, когда $\varphi(x, y) \not\equiv 0$ система (7) приводится к виду:

$$X(t, x, y) = \left(t(\lambda - \beta) - \varepsilon x\omega'(y) + \mu(y), \frac{1}{2}\lambda x + \omega(y), \beta y + \gamma \right),$$

где β, γ – константы, а ω, μ – гладкие функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$2\beta\varphi - \lambda\varphi + 2\mu'(y) - 2\varepsilon x\omega''(y) + \varphi_y(\beta y + \gamma) + \varphi_x \left(\frac{\lambda}{2}x + \omega(y) \right) = \frac{\varepsilon}{2}\varphi_{xx} \tag{8}$$

При $C(t, x, y) \equiv 0$, $\lambda \neq 0$ уравнение (8) имеет следующее частное решение:

$$\varphi(x, y) = \left(\lambda - \varepsilon(\lambda x + 2\omega(y))^2\right) F(y) + \frac{2}{\lambda}\mu'(y) + \frac{\omega''(y)(\varepsilon\lambda x^2 - 1)}{\omega(y)\lambda},$$

где $F(y)$ – произвольная гладкая функция. При этом тензор Риччи будет выражаться следующим образом:

$$\rho = (\lambda^2 F(y) - \frac{\omega''(y)}{\omega(y)}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеет место

Теорема. *Пусть $(\mathcal{M}, g)$ – трёхмерное лоренцево многообразие Уокера. Тогда в окрестности произвольной точки в специальной системе координат Уокера для любой константы $\lambda \neq 0$ существует решение уравнения солитона Риччи, при условии, что тензор Риччи ρ зависит только от y.*

Замечание. *В случае трехмерных локально симметрических лоренцевых многообразий Уокера существование решения уравнения солитона Риччи было показано ранее в работе* [3].

Список литературы

[1] R. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces* // Contemporary Mathematics, **71**, 237–261 (1988).

[2] H.-D. Cao, *Recent progress on Ricci solitons* // Advanced Lectures in Mathematics, **11**, 1–38 (2010).

[3] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, S. Gavino Fernandez, *Locally conformally flat Lorentzian gradient Ricci solitons* // Journal of Geometric Analysis, **23**:3, 1196–1212 (2013).

[4] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikcevic and R. Vazquez-Lorenzo, *The geometry of Walker manifolds. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics* // Morgan & Claypool Publ. 2009.

[5] А. Галаев, *Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии* // Матем. сборник, **204**:9, 29–50 (2013).

Алтайский государственный университет, ул. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
E-mail address: oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru, igeh@ya.ru

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ ГРОТЕНДИКА-СЕРРА

ИВАН ПАНИН

Следующий результат М. Оянгурена иллюстрирует одну хорошо-известную гипотезу Гротендика-Серра.

Теорема.*Пусть — гладкое связное комплексное аффинное алгебраическое многообразие. Пусть E и F — два квадратичных пространства над кольцом регулярных функций $[X]$ многообразия . Если E и F изоморфны над полем частных () кольца $[X]$, то квадратичные пространства E и F изоморфны локально по отношению к топологии Зариского на , т.е. для каждой точки многообразия найдется такая функция g из $[X]$, что $g(x)$ не равно нулю и квадратичные пространства E и F изоморфны над кольцом дробей $[X]_g$.*

Упомянутая гипотеза Гротендика-Серра утверждает, в частности, что аналогичное утверждение имеет место для главных G-расслоений, где G — произвольная связная редуктивная алгебраическая группа над полем комплексных чисел. Другие примеры, иллюстрирующие гипотезу, будут приведены и окончательный результат тоже будет сформулирован.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия

E-mail address: paniniv@gmail.com

ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА, ОТВЕЧАЮЩИЙ СЕМЕЙСТВУ ГАМИЛЬТОНОВО МИНИМАЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}P^2$

БАЯН САПАРБАЕВА

Подмногообразие $M \subset \mathbb{C}P^n$ (погруженное или вложенное), $\dim_{\mathbb{R}} M = n$, называется *лагранжевым,* если ограничение формы Фубини-Штуди на M равно нулю. Подмногообразие M называется *гамильтоново минимальным* (H-минимальным), если вариации обьемы M вдоль всех гамильтоновых полей равны 0. В [1] были построены первые примеры H-минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}P^n$ (отличных от минимальных). В [3] было показано, что с каждой лагранжевой поверхностью связан естественным образом двумерный оператор Шредингера.

Теорема. *Поверхность Σ является образом композиции отображений $\mathcal{H} \circ \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$, где $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^5$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$,*

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y) &= \sqrt{\frac{k}{k-m}} \mathrm{cn}(\nu x, \kappa) e^{i\pi m y}, \\ \psi_2(x,y) &= \sqrt{\frac{k}{k-n}} \mathrm{sn}(\nu x, \kappa) e^{i\pi n y}, \\ \psi_3(x,y) &= \sqrt{\frac{k(n-m)\mathrm{cn}^2(\nu x, \kappa) - n(k-m)}{(k-m)(k-n)}} e^{i\pi k y}, \end{aligned}$$

$\nu = \sqrt{m(n-k)}\pi$, $\kappa = \sqrt{\frac{k(m-n)}{m(k-n)}}$, $\mathrm{sn}(\nu x, \kappa), \mathrm{cn}(\nu x, \kappa)$ — эллиптические функции Якоби. Индуцированная метрика на Σ имеет вид $ds^2 = 2e^v(dx^2 + dy^2)$, где

$$2e^v = k\pi^2 \Big((m-n)\, \mathrm{sn}(\nu x, \kappa)^2 - m \Big).$$

Функции ψ_i удовлетворяют уравнению Шредингера $L\psi_i = 0$, где

$$L = \partial_x^2 + \partial_y^2 + i(m+n+k)\pi \partial_y + 2k\pi^2 \big((m-n)\, \mathrm{sn}^2(\nu x, \kappa) - m \big). \tag{1}$$

Список литературы

[1] А. Е. Миронов, *О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$* // Матем. сб., **195**:1 (2004), 89–102.

[2] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, *Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения* // Функц. анализ и его прил., **47**:1 (2013), 47–61.

[3] А. Е. Миронов, *Иерархия уравнений Веселова–Новикова и интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$* // Сиб. электрон. матем. изв., **1** (2004), 38–46.

[4] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности* // ДАН СССР, **229**:1 (1976), 15–18.

[5] А. Е. Миронов, *О гамильтоново минимальных лагранжевых торах в $\mathbb{C}P^2$* // Сиб. матем. журн., **44**:6 (2003), 1324–1328.

[6] Hui Ma, *Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}P^2$* // Ann. Global Anal. Geom., **27**:1 (2005), 1–16.

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: sopik2002@mail.ru

Работа поддержана РНФ (грант 14-11-00441).

КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

ЛЯЗЗАТ УРЫНБАЕВА

В работе мы изучаем коммутирующие разностные операторы ранга один. Нами построены одноточечные и двухточечные операторы и найдены солитонные решения цепочки Тоды в случае, когда спектральная кривая является сингулярной алгебраической кривой, а именно — сферой с двойной точкой.

Напомним, что если разностные операторы

$$L_k = \sum_{j=-K^-}^{K^+} u_j(n)T^j, \qquad L_m = \sum_{j=-M^-}^{M^+} v_j(n)T^j, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $n \in Z$ — дискретная переменная, T — оператор сдвига по дискретной переменной

$$Tf_n = f_{n+1},$$

коммутируют, то существует спектральная кривая Γ, заданная в плоскости $\mathbb{C}^2$ некоторым полиномом $Q(\lambda, \mu)$, которая параметризует их совместные собственные функции и собственные значения. А именно,

$$L_k\psi_n(P) = \lambda(P)\psi_n(P), \qquad L_m\psi_n(P) = \mu(P)\psi_n(P), \quad P \in \Gamma.$$

Ранг l коммутирующей пары операторов L_k и L_m определяется как размерность пространства совместных собственных функций в точке $P \in \Gamma$ общего положения. И.М. Кричевер и С.П. Новиков [1] доказали, что максимальное коммутативное кольцо разностных операторов, содержащее L_k и L_m, изоморфно кольцу мероморфных функций на Γ с полюсами в некоторых точках $P_1, \dots, P_s$. Такие операторы называются s-точечными. И.М. Кричевером и С.П. Новиковым получен существенный прогресс в задаче классификации одноточечных операторов ранга l, ими же найдены операторы ранга два, отвечающие эллиптическим спектральным кривым. Теория таких операторов связана с теорией алгебро-геометрических решений высокого ранга $2D$-цепочки Тоды [1]. Д. Мамфордом [2] и И.М. Кричевером [3] найдены спектральные данные, отвечающие двухточечным операторам ранга 1. Одноточечные операторы ранга два, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым, изучались в [4]. Спектральные данные для одноточечных операторов ранга один найдены в [5].

В настоящей работе рассматриваются одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один $L_2,\ L_3$ в случае, когда спектральная кривая является сферой с двойной точкой. Пусть

$$\Gamma = \mathbb{CP}^1/\{a_1 \sim -a_1\}, \qquad q \in \Gamma.$$

Арифметический род такой кривой равен 1. При этом

$$L_2\psi_n = (T^2 + u_nT + c_n)\psi_n = f(z)\psi_n, \quad L_3\psi_n = g(z)\psi_n, \quad z \in \Gamma.$$

Совместные собственные функции L_2 и L_3 удовлетворяют уравнению

$$\psi_{n+1}(P) = \chi(n, P)\psi_n(P), \tag{1}$$

где $\chi(n, P)$ рациональная функция на Γ. Для того, чтобы найти операторы L_2 и L_3, достаточно найти $\chi(n, P)$. Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \quad \sigma(z) = -z.$$

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Функция χ имеет вид*

$$\chi(z,n) = \frac{1}{z} + \frac{b_n(z-\gamma_{n+1})}{(z-\gamma_n)(\gamma_n-\gamma_{n+1})} - \frac{1}{\gamma_{n+1}},$$

где $b_n = \frac{\gamma_n^2-\alpha^2}{\alpha^2}$, γ_n *— произвольный функциональный параметр дискретной переменной* $n \in \mathbb{Z}$.

При этом, оператор

$$L_2 = T^2 + u_nT + c_n$$

с коэффициентами

$$u_n = \frac{\gamma_{n+1}(\alpha^2-\gamma_n\gamma_{n+1})}{\alpha^2\gamma_n(\gamma_n-\gamma_{n+1})} + \frac{\gamma_{n+1}(\alpha^2-\gamma_{n+1}\gamma_{n+2})}{\alpha^2\gamma_{n+2}(\gamma_{n+1}-\gamma_{n+2})},$$

$$c_n = \frac{(\alpha^2-\gamma_n\gamma_{n+1})^2}{\alpha^4(\gamma_n-\gamma_{n+1})^2},$$

коммутирует с некоторым оператором L_3.

Основной результат данной работы — солитонные решения цепочки Тоды. Для этого рассматривается разностный оператор L_2, коэффициенты которого зависят также от t

$$L_2 = T^2 + u_nT + c_n,$$

который коммутирует с оператором Лакса

$$[L_2, \partial_t - A] = 0,$$

где

$$A = T + a_n,$$

для цепочки Тоды

$$\dot{u}_n = u_n(a_n - a_{n+1}), \qquad a_n = a_{n+2} + u_n - u_{n+1}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Функции*

$$u_n = 2b((-a-b)^{n+1}(a-\gamma) + (a-b)^{n+1}e^{2at}(a+\gamma))^2/((-a-b)^{2+2n}(a-\gamma)^2 + 2e^{2at}(b^2-a^2)^n(a^2+b^2)(a^2-\gamma^2) + e^{4at}(a-b)^{2+2n}(a+\gamma)^2),$$

и

$$a_n = 4a^2(a^2-\gamma^2)/-2(a^2-\gamma^2) + (-a-b)^{n+1}(a-b)^{-n}e^{-2at}(a-\gamma)^2 + +(-a-b)^{-n}(a-b)^{n+1}e^{2at}(a+\gamma)^2.$$

являются решением системы (2).

Список литературы

[1] И.М. Кричевер, С.П. Новиков, *Двумеризованная цепочка Тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения* // УМН. **58**:3 51–88 (2003).

[2] D. Mumford, *An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg de Vries equation and related non-linear equations* // Proc. Int. Symp. on Alg. Geom. (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya, Tokyo, 115–153 (1978).

[3] И.М. Кричевер, *Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения* // УМН. **33**:4 215–216 (1978).

[4] Г.С. Маулешова, А.Е. Миронов, *О коммутирующих разностных операторах ранга 2* // УМН. **70**:3 (423) 181–182 (2015).

[5] Г.С. Маулешова, А.Е. Миронов, *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один* // ДАН, **466**:4 399–401 (2016).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: urynbaeva.lyazzat@mail.ru

ФОРМУЛА РЕШЕТНЯКА И ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ НАТТЕРЕРА В ТЕНЗОРНОЙ ТОМОГРАФИИ

ВЛАДИМИР ШАРАФУТДИНОВ

Формула Решетняка утверждает, что преобразование Радона R является изометрией между $L^2(\mathbb{R}^n)$ и гильбертовым пространством $H^{(n-1)/2}_{(n-1)/2,e}(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R})$ четных функций на $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$, снабженным некоторой специальной нормой. Мы обобщаем этот результат на соболевские пространства: R является изометрией между $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $H^{s+(n-1)/2}_{(n-1)/2,e}(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R})$ для любого действительного s. Более того, используя потенциалы Рисса, мы определяем некоторые новые гильбертовы пространства $H^s_t(\mathbb{R}^n)$ $(t>-n/2)$ и доказываем, что R есть изометрия между $H^s_t(\mathbb{R}^n)$ и $H^{s+(n-1)/2}_{t+(n-1)/2,e}(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R})$. Обобщенная формула Решетняка тесно связана с оценками устойчивости Наттерера: $c\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\le\|Rf\|_{H^{s+(n-1)/2}(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R})}\le C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ для функций f с носителями в фиксированном шаре. Затем мы получаем аналоги этих результатов для лучевого преобразования симметричных тензорных полей.

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия;

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: sharaf@math.nsc.ru

Работа частично поддержана программой Президиума РАН, проект 0314-2015-0013.

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ — 2016»,

21 — 24 сентября 2016 года

Подписано в печать 01.08.2016 Формат 60×84 1/8

Усл. печ. л. 10,16 Уч.-изд. л. 6,5 Тираж 100 экз. Заказ 123

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга 4.

Отпечатано в ООО "Технотрэйд"
г. Новосибирск, ул. Журинская, 78, 2 этаж
Тел. +7 (383) 201-49-82