РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2017»,

20–23 сентября 2017 года

Новосибирск, 2017

УДК 514; 515.1; 517.518; 517.54; 517.938; 517.958

ББК 22.15

Д 548

ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2017: Тезисы Международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2017. — 58 с.

ISBN 978-5-86134-210-0

Настоящее издание содержит тезисы докладов Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске–2017», 20–23 сентября 2017 г. Основная тематика докладов относится к следующим актуальным направлениям современной математики: дифференциальной геометрии, геометрии и топологии трехмерных многообразий, теории интегрируемых систем, квазиконформному анализу и функциональным пространствам, приложениям геометрии и топологии.

Сборник представляет интерес для научных работников и аспирантов, интересующихся современными проблемами геометрии, топологии и анализа.

Конференция и издание сборника поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект 17-01-20500).

Редакторы: И. А. Тайманов, А. Ю. Веснин, Н. В. Абросимов

GEOMETRY DAYS IN NOVOSIBIRSK–2017: Abstracts of the International Conference. Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2017. — 58 p.

Editors: I. A. Taimanov, A. Yu. Vesnin, N. V. Abrosimov

$Д \frac{1602050000 - 4}{Я82(03) - 2017}$

ISBN 978-5-86134-210-0

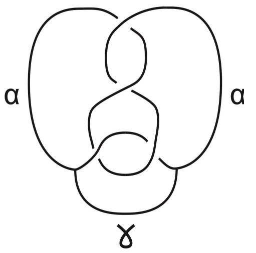
Содержание

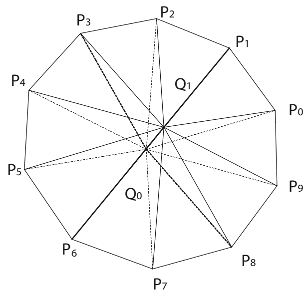
ON GEOMETRIC STRUCTURES ON THE FIGURE-EIGHT KNOT WITH A BRIDGE

NIKOLAY ABROSIMOV, ALEXANDER MEDNYKH, DARYA SOKOLOVA

An Euclidean structure on the figure-eight knot 4_1 arises when its conical angle α equals $2\pi/3$; this result is due to Thurston [1]. An explicit construction of fundamental set for the cone-manifold $4_1(\alpha)$ in E^3 was given in [2]. The existence of the euclidean structure on figure-eight with a bridge was established in [3].

In the present work we consider a two-parameter family of cone manifolds $4_1(\alpha,\alpha;\gamma)$ whose underlying space is S^3 and singular set is the figure-eight knot with additional bridge having conical angles α and γ along them, correspondingly (see fig.). For such cone manifolds we construct a fundamental set. That is a non-convex *butterfly* polyhedron P with 20 triangular faces and 12 vertices (see fig.). P is disjoint union of 10 simplices having one common edge. We found geometrical realisation of P both in E^3 and the Cayley-Klein model of H^3.





Theorem 1. *A hyperbolic structure on $4_1(\alpha,\alpha;\gamma)$ is exist if and only if*

$$\begin{cases} -1+3\,M^2+12\,X^2-4\,M^2X^2-16\,X^4 & \geq 0, \quad (i) \\ 5+6\,M^2+M^4-60\,X^2-12\,M^2X^2+80\,X^4 & > 0, \quad (ii) \end{cases}$$

where $M=\cot\frac{\alpha}{2}, \alpha\in(\frac{\pi}{3},\pi), X=\cos\frac{\theta}{2}, \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ and θ is the angle of relative rotation between singular components. The equality in (i) is achieved under the condition $\gamma=2\pi$, i.e. when the bridge disappears. The equality in (ii) is achieved if there exist an Euclidean structure on $4_1(\alpha,\alpha;\gamma)$.

Theorem 2. *If cone-manifold $4_1(\alpha,\alpha;\gamma)$ admits a hyperbolic structure then*

$$\begin{aligned} -\cos\frac{\gamma}{2} = {} & 8\,u^2-16\,u^4+5\,w-40\,u^2w+80\,u^4w+32\,u^2w^2-128\,u^4w^2 \\ & -20\,w^3+64\,u^2w^3+64\,u^4w^3-64\,u^2w^4+16\,w^5, \end{aligned}$$

where $u=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}A=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}B=\cos\alpha,\ w=\mathrm{tr}(A\,B^{-1})=u^2-(1-u^2)\,\mathrm{ch}\rho$ and $\rho=2\,h+i\,\theta$ is the complex hyperbolic distance between the singular components of $4_1(\alpha,\alpha;\gamma)$.

References

[1] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds. Lecture Notes.* // Princeton University, 1980.

[2] A. Mednykh, A. Rasskazov, *Volumes and Degeneration of Cone-structures on the Figure-eight Knot.* // Tokyo J. Math., **29**:2 (2006), 445–464.

[3] A. D. Mednykh, D. Yu. Sokolova, *The Existence of a Euclidean Structure on the Figure-Eight Knot with a Bridge.* // Yakutian Math. J., **22**:4 (2015), 25–33.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Akad. Koptyuga ave., 630090, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State University, 2 Pirogova st., 630090, Novosibirsk, Russia

E-mail address: `abrosimov@math.nsc.ru, smedn@mail.ru, from_dasha@mail.ru`

This research is funded by RSF, grant 16-41-02006.

HOW MANY TIMES CAN THE VOLUME OF A CONVEX POLYHEDRON BE INCREASED BY ISOMETRIC DEFORMATIONS?

VICTOR ALEXANDROV

We prove that the answer to the question of the title is 'as many times as you want'.

More precisely, given any constant $c > 0$, we construct two oblique triangular bipyramids, P and Q, in Euclidean 3-space, such that

(i) P is convex,

(ii) Q is nonconvex and intrinsically isometric to P,

(iii) $\operatorname{vol} Q > c \cdot \operatorname{vol} P > 0$.

The talk is based on the paper [1].

References

[1] V. Alexandrov, *How many times can the volume of a convex polyhedron be increased by isometric deformations?* // Beitr. Algebra Geom. (2017), DOI:10.1007/s13366-017-0336-8

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Akad. Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University, 2 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: alex@math.nsc.ru

THE COEFFICIENTS OF QUASIMÖBIUSNESS IN PTOLEMEIC SPACES

VLADISLAV ASEEV

In ptolemeic spaces the class of η-quasimöbius mappings $f : X \to Y$ with distortion function $\eta(t) = C \max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}$ may be completely characterized by the inequality $K^{-1} \leq (1 + \ln P(fT))/(1 + \ln P(T)) \leq K$ for all tetrads $T \subset X$ where $P(T)$ denotes the ptolemeic characteristic of a tetrad (see [1]). The number K in this condition has properties quite similar to those of coefficients of quasiconformality, so the concept of K-quasimöbius mapping may be introduced. In particular, the stability theorem has been proved for $(1 + \varepsilon)$-quasimöbius mappings in $\bar{R}^n$.

References

[1] V. V. Aseev, A. V. Sychev, A. V. Tetenov, *Möbius-invariant metrics and generalized angles in ptolemeic spaces* // Siberian Math. J., **46**:2 (2005), 189–204.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Akad. Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: btp@math.nsc.ru

GEODESICS AND CURVATURES OF SPECIAL SUB-RIEMANNIAN METRICS ON LIE GROUPS

VALERII BERESTOVSKII

Lemma. *Let $(M = G/K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ be any Riemannian symmetric space with semisimple Lie group G which is the connected component of all isometries of $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ Lie algebras of Lie groups G, K. Then there exists a unique decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ such that*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}. \tag{1}$$

In addition, if $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, $\mathfrak{k} = diag(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$ with semisimple compact Lie algebra $\mathfrak{h}$ then

$$\mathfrak{p} = \{(u, -u) : u \in \mathfrak{h}\}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] = \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}. \tag{2}$$

Corollary 1. *A left invariant distribution $\mathfrak{P}$ on G with $\mathfrak{P}(e) = \mathfrak{p}$ is two-generated, i.e.*

$$\mathfrak{P} + [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] = TG. \tag{3}$$

Theorem 1. **[1]** *Every parameterized by arc length geodesic of any connected smooth manifold $\mathfrak{M}$ with sub-Riemannian metric d, defined by an inner product $(\cdot,\cdot)$ and two-generated distribution $\mathfrak{P}$ on $\mathfrak{M}$, is normal.*

Theorem 2. *Let $(M = G/K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ be as in Lemma, $\mathfrak{P}$ as in Corollary 1, and $(\cdot,\cdot)$ any G-left-invariant and K-right-invariant inner product on G such that the canonical projection $p : (G, (\cdot,\cdot)) \to (G/K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ is a Riemannian submersion. Then the distribution $\mathfrak{P}$ is totally non-holonomic and the pair $(\mathfrak{P}, (\cdot,\cdot))$ defines a left-invariant sub-Riemannian metric d on G. In addition, every parameterized by arc length geodesic $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, of (G, d) with condition $\gamma(0) = e$ is normal and it is a one-parameter subgroup*

$$\gamma(t) = \exp(t\xi) \tag{4}$$

or a product of two one-parameter subgroups

$$\gamma(t) = \exp(t(\xi + \eta)) \exp(-t\eta) \tag{5}$$

with arbitrary $\eta \in \mathfrak{k}$ and unit vector $\xi \in \mathfrak{p}$, where $\xi = \dot{\gamma}(0)$ and $[\xi, \eta] \neq 0$.

Proposition. *Under conditions and notation of Theorem 2, the projection $p : (G, d) \to (G/K, \rho)$, where ρ is an intrinsic metric of symmetric Riemannian manifold $(M = G/K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, is a submetry [2].*

Corollary 2. *The space $(G, d))$ is isometric to a geodesic orbit sub-Riemannian manifold $((G \times K)/diag(K \times K), d)$. This means that any parameterized by arc length geodesic in $((G \times K)/diag(K \times K), d)$ is an orbit of some one-parameter subgroup in $G \times K$.*

Corollary 3. *Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$, $\mathfrak{k} = diag(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$ as in Lemma, $\mathfrak{p}$ as in (2), and H be a compact Lie group with Lie algebra $\mathfrak{h}$. Then the pair $(\mathfrak{p}, (\cdot,\cdot))$ defines a left-invariant sub-Riemannian metric d on $H \times H$, ; every parameterized by arc length geodesic $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, of $(H \times H, d)$ with condition $\gamma(0) = e$ is normal and it is a one-parameter subgroup*

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\exp(t\xi), \exp(-t\xi)) \tag{6}$$

or a product of two one-parameter subgroups

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\exp(t(\xi + \eta)) \exp(-t\eta), \exp(t(-\xi + \eta)) \exp(-t\eta)) \tag{7}$$

The publication was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation.

with arbitrary $\eta, \xi \in \mathfrak{h}$ *such that* $[\xi, \eta] \neq 0$, $(\xi, -\xi) = \dot{\gamma}(0)$, *and* $\langle 2\xi, 2\xi \rangle = 1$.

Corollary 4. *Let* $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *be a geodesic (4) or (5) of the space* (G, d).*) Then*

$$p(\gamma(t)) = p(\exp(t\xi)) \quad \text{or} \quad p(\gamma(t)) = p(\exp(t(\xi + \eta))). \tag{8}$$

In particular, in the case of Corollary 3,

$$p(\gamma(t)) = \gamma_1(t)\gamma_2^{-1}(t), \tag{9}$$

which is equal to

$$\exp(2t\xi) \quad \text{or} \quad \exp(t(\xi + \eta)) \exp(t(\xi - \eta)) \tag{10}$$

for the case (6) or (7).

On the ground of Corollary 4, we calculate geodesic curvature and torsion of $p(\gamma(t))$, $t \in \mathbb{R}$, for the case of $(G, d) = (Sp(1) \times Sp(1), d)$ which corresponds to compact irreducible Riemannian symmetric space $(Sp(1) \times Sp(1))/diag(Sp(1) \times Sp(1))$ of the type II. This symmetric space can be treated as the group $Sp(1)$ of unit quaternions with biinvariant Riemannian metric which is isometric to the canonical unit sphere S^3 in the Euclidean space $\mathbb{R}^4$. Note that the Lie algebra $\mathfrak{sp}(1)$ consists of all purely imaginary quaternions.

Theorem 3. *Geodesic curvature* k *and torsion* κ *for the projection of geodesic (6) or (7) in* $(Sp(1) \times Sp(1), d)$ *onto* $Sp(1) = S^3$ *are equal respectively to* $k = \kappa \equiv 0$ *in the first case and* $k \equiv \|[2\xi, n]\|$, $\kappa \equiv (2\xi, \eta)$ *in the second case. In addition,* $k^2 + \kappa^2 \equiv (\eta, \eta)$.

Remark. *Earlier in partial cases, results similar to Lemma and Theorem 2, have been proved in [3]. The authors of [3] used [1] and [4]. Instead of [4] the author used [5].*

A.F. Solovjev defined in [6] sectional and Ricci curvatures of any rigged distribution $\mathfrak{P}$ on a smooth Riemannian manifold M and gave in some cases (Lemma 4.1 and Theorem 2.4) concrete methods and formulas for their calculation. In addition, the curvatures depend on restriction of metric tensor to the distribution $\mathfrak{P}$ and chosen rigging $\mathfrak{P}_1$ of $\mathfrak{P}$ (i.e. another distribution on M such that $\mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P}_1 = TM$), but do not depend on restriction of metric tensor to $\mathfrak{P}_1$.

Theorem 4. **[6]** *Let* $p : (M, (\cdot, \cdot)) \to (B, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *be a Riemannian submersion,* $\mathfrak{P}$ *and* $\mathfrak{P}_1$ *respectively its horizontal and vertical distributions on* M. *Then for any non-collinear vectors* $u, v \in \mathfrak{P}(x)$, $x \in M$, *the Solovjev curvature* K_{uv} *in the direction of linear span*(u, v) *is equal to* $K^B_{dp(u)dp(v)}$, *where* K^B *is the usual sectional curvature of the Riemannian manifold* $(B, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

To apply Solovjev methods to calculate curvatures of a sub-Riemannian manifold (M, d) it is enough to choose reasonably a rigging $\mathfrak{P}_1$ of distribution $\mathfrak{P}$, taking a part in definition of sub-Riemannian metric d. The author suggested to choose $\mathfrak{P}_1$ if it is a unique rigging of $\mathfrak{P}$ which satisfies one of the following condition: 1) $[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}$, 2) $[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}_1$, 3) $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}_1$. Lemma for (G, d) in Theorem 2 and left-invariant $\mathfrak{P}_1$ with $\mathfrak{P}_1(e) = \mathfrak{k}$ and Theorem 4 imply

Theorem 5. *Let* $X, Y \in \mathfrak{p}$, $(X, X) = (Y, Y) = 1$, $(X, Y) = 0$. *Then* $K_{XY} = -([[X, Y], Y], X)$.

References

[1] A.A. Agrachev, A.V. Sarychev, *Abnormal sub-Riemnnian geodesics: Morse index and rigidity* // Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineare, **13** (1996), 635–690.

[2] V.N. Berestovskii, L. Guijarro, *A metric characterization of Riemannian submersions* // Ann. Glob. Anal. Geom., **18** (2000), 577–588.

[3] U. Boscain, T. Chambrion, J.-P. Gauthier, *On the K+P problem for a three-level quantum system: Optimality of resonance* // J. Dynam. Control Systems, **8** (2002), 547–572.

[4] V. Jurdjevich, *Geometric control theory* // Cambridge Univ. Press, 1997.

[5] V.N. Berestovskii, *Universal methods of the search of the normal geodesics on Lie groups with left-invariant sub-Riemannian metric* // Siber. Math. J., **55**:5 (2014), 783–791.

[6] A.F. Solovjev, *Curvature of a distribution* // Math. Notes, **35**:1 (1984), 61–68.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Akad. Koptyuga ave., 630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University, 2 Pirogova st., 630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: vberestov1@inbox.ru

ON EMBEDDINGS OF NON-POSITIVELY CURVED COMPACT SURFACES IN FLAT LORENTZIAN MANIFOLDS

FRANÇOIS FILLASTRE, DMITRIY SLUTSKIY

In the 1940's, A. D. Alexandrov, looking at the induced (intrinsic) distances on the boundary of convex bodies of the Euclidean space, introduced a class of distances on compact surfaces. Nowadays, such distances are called *metrics of non-negative curvature* (*in the sense of Alexandrov*). He then proved the following famous result. We assume that all the surfaces we are considering are closed, oriented and connected.

Theorem 1. [1] *Let* (S, d) *be a metric of non-negative curvature on a compact surface. Then there exists a flat Riemannian manifold* R *homeomorphic to* $S \times \mathbb{R}$ *which contains a convex surface whose induced distance is isometric to* (S, d)*.*

If (S, d) is a metric space isometric to the induced distance on a flat torus (T, h), then the statement above is trivial, as R can be taken as $S \times \mathbb{R}$ with the metric $h + \mathrm{d}\, t^2$. Otherwise, by the Gauss–Bonnet formula, a compact surface S with a metric of non-negative curvature must have genus 0. A more classical way to state Theorem 1 in this case is to say that (S, d) is isometric to the induced distance on the boundary of a convex body of the Euclidean space.

We proved an analogous result for metrics of non-positive curvature.

Theorem 2. [2] *Let* (S, d) *be a metric of non-positive curvature* (*in the sense of Alexandrov*) *on a compact surface. Then there exists a flat Lorentzian manifold* L *homeomorphic to* $S \times \mathbb{R}$ *which contains a spacelike convex surface whose induced distance is isometric to* (S, d)*.*

Theorem 2 generalizes the results of F. Labourie and J.-M. Schlenker [3] for smooth metrics of non-positive curvature and of F. Fillastre [4] for polyhedral metrics of non-positive curvature.

References

[1] A. D. Alexandrov, *Intrinsic geometry of convex surfaces* // Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[2] F. Fillastre, D. Slutskiy *Embeddings of non-positively curved compact surfaces in flat Lorentzian manifolds* // `arXiv:1703.07253` (2017), 1–27.

[3] F. Fillastre, J. M. Schlenker *Surfaces convexes fuchsiennes dans les espaces lorentziens à courbure constante* // Math. Ann., **316**:3 (2000), 465–483.

[4] F. Fillastre *Surfaces convexes fuchsiennes dans les espaces lorentziens à courbure constante* // Math. Ann., **350**:2 (2011), 417–453.

University of Cergy-Pontoise, AGM Research Center in Mathematics, 2 Adolphe Chauvin ave., 95302, Pontoise, France

E-mail address: `Francois.Fillastre@u-cergy.fr, Dmitriy.Slutskiy@u-cergy.fr`

A PARTIAL CONVERSE TO TERGN'S CONVEXITY THEOREM

VICTOR GICHEV

A compact smooth submanifold M of $\mathbb{R}^n$ is called *isoparametric*, if its normal bundle is flat and for every local parallel normal vector field the corresponding principal curvatures are constant. The subject has long and reach history (see [1]). The family of parallel to M submanifolds defines a foliation $\mathfrak{F}$ of $\mathbb{R}^n$. If $\operatorname{codim} M > 2$, then $\mathfrak{F}$ is linearly isometric to the foliation of orbits of the isotropy representation of some symmetric space. In particular, M is homogenous in this case. However, there are non-homogeneous isoparametric submanifolds of codimension 2.

We say that a submanifold of $\mathbb{R}^n$ is centered if it is contained in some round sphere. Any compact isoparametric manifold is centered. We may assume that the center is at zero. For every $p \in M$ there is a finite Coxeter group W acting in the normal space N_p which preserves $M \cap N_p$. Moreover, $M \cap N_p$ is an orbit of W.

Let ν_p be the orthogonal projection onto N_p and let $\widehat{X}$ denote the convex hull of a set X. Suppose M isoparametric. Tergn's Convexity Theorem ([2]) states that

$$\nu_p M = \widehat{Wp}$$

for any $p \in M$. It generalizes the well known Kostant's Convexity Theorem. The aim of the talk is to present a partial converse: if M is a smooth compact centered submanifold of $\mathbb{R}^n$ such that for all $p \in M$ the set $M \cap N_p$ is finite and, moreover,

$$\nu_p M = \widehat{M \cap N_p},$$

then, under some additional regularity conditions, M is isoparametric.

References

[1] G. Thorbergsson, *A Survey on Isoparametric Hypersurfaces and Their Generalizations* // in: Handbook on Differential geometry, Elsevier, 2000, 963–995.

[2] C. L. Terng, *Convexity theorem for isoparametric submanifolds* // Invent. Math., **85** (1986), 487–492.

Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics, 13 Pevtsova st., 644099, Omsk, Russia

E-mail address: gichev@ofim.oscsbaras.ru

ON MONODROMY IN THE PRONY SYSTEM WITH NEAR-COLLIDING NODES

VLADIMIR GOLUBYATNIKOV, YOSEF YOMDIN

Problems of reconstruction of spike-trains signals $F_d(x) = \sum_{j=1}^{d} a_j \delta(x - x_j)$ from the integral measurements (moments) $m_k = \int x^k F(x) dx$, where $\{a_1, \dots a_d\}$, $\{x_1, \dots x_d\} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (or in $\mathbb{C}^d \setminus \{0\}$) are well-known in modern literature, see for example [1 - 5] and references therein.

Just for simplicity of exposition, we condider here 2-dimensional case $d = 2$ of near-colliding signals $x_1 \approx x_0 \approx x_2 \neq x_1 \in \mathbb{C}$, $x_0 \neq 0$. So, we get the Prony system

$$(1) \qquad a_1 + a_2 = m_0 \neq 0; \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = m_1; \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = m_2; \quad a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 = m_3.$$

Let $\mathcal{P}_2 = \mathbb{C}^4(a_1, a_2, x_1, x_2)$ be the parameter space of the signal $F_2(x)$; denote by $\mathcal{M}_2 = \mathbb{C}^4(m_0, m_1, m_2, m_3)$ the corresponding moment space. The system (1) defines the Prony mapping $PM : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_2$, its inversion $(PM)^{-1}$ describes reconstruction of $F_2(x)$ from its moments. See [1 - 3] for general case of arbitrary $d \geq 2$.

Let $\Delta \subset \mathcal{P}_2$ be the set of parameters with colliding nodes $x_1 = x_2 = x_0$. Then $PM(\Delta)$ is defined by the relations $m_3 = m_0 x_0^3 = m_1 x_0^2 = m_2 x_0$. Consider a loop in the space $\mathcal{M}_2 \setminus PM(\Delta)$ parametrized by $\varphi \in [0, 2\pi]$ and small $\varepsilon > 0$:

$$(2) \qquad m_0 \neq 0; \quad m_1 = m_0 x_0 + \frac{\varepsilon^2 e^{i\varphi}}{x_0}; \quad m_2 = m_0 x_0^2 + \varepsilon^2 e^{i\varphi}; \quad m_3 = m_0 x_0^3.$$

Let $\sigma_1 = x_1 + x_2$, $\sigma_2 = x_1 x_2$. Then the identities $m_2 - \sigma_1 m_1 + \sigma_2 m_0 = 0$; $m_3 - \sigma_1 m_2 + \sigma_2 m_1 = 0$; imply that

$$(3) \qquad x_{1,2} = x_0 - \frac{x_0 \varepsilon^2 e^{i\varphi} \pm x_0 \varepsilon \sqrt{4 m_0 e^{i\varphi} x_0^2 + 3\varepsilon^2 e^{2i\varphi}}}{2 m_0 x_0^2 + 2\varepsilon^2 e^{i\varphi}}.$$

When φ varies from 0 to 2π, the factor $\sqrt{e^{i\varphi}}$ varies from $+1$ to -1, the node $x_1(\varphi)$ transforms to $x_2(\varphi)$ and vice versa. At the same time the amplitudes a_1 and a_2 of the summands of $F_2(x)$ change their roles as well.

Theorem. *The equations* (1), (2), (3) *determine a nontrivial monodromy in the space* $\mathcal{P}_2$.

Similar constructions can be realized in higher-dimensional cases $d > 2$.

References

[1] A. Akinshin, G. Goldman, V. Golubyatnikov, Y. Yomdin, *Accuracy of reconstruction of spike-trains with two near-colliding nodes* // arXiv:1701.01482, 5 Jan 2017.

[2] D. Batenkov, G. Goldman, Y. Salman, Y. Yomdin, *Algebraic geometry of error amplification: the Prony leaves* // arXiv:1701.05338, 17 Febr 2017.

[3] D. Batenkov, Y. Yomdin, *Geometry and singularities of the Prony mapping* // J. Singul., **10** (2015), 1–25.

[4] E. L. Candès, C. Fernandez-Grqanda, *Towards a mathematical theory of super-resolution* // Commun. Pure Appl. Math., **67**:6 (2014), 906–956.

[5] T. Peter, G. Plonka, *A generalized Prony method for reconstruction of sparse sums of eigenfunctions of linear operators* // Inverse Probl., **29** (2013), 025001–025021.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Akad. Koptyuga ave., 630090, Novosibirsk, Russia

Weizmann Institute of Science, 234 Herzl st., 7610001, Rehovot, Israel
E-mail address: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Supported by RFBF, grant 15-01-00745.

DUALITY FOR ORLICZ SPACES OF DIFFERENTIAL FORMS

YAROSLAV KOPYLOV

We consider Orlicz spaces of differential forms on a Riemannian manifold. A Riesz-type theorem about the functionals on Orlicz spaces of forms is obtained and then other duality theorems result from it as consequences. We also extend the results on the Hölder-Poincaré duality for reduced $L_{q,p}$-cohomology by Gol′dshtein and Troyanov to $L_{\Phi_I,\Phi_{II}}$-cohomology, where Φ_I and Φ_{II} are N-functions of class $\Delta_2 \cap \nabla_2$.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Akad. Koptyuga ave., 630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `yakop@math.nsc.ru`

ON $U(2)$-, AND $U(1,1)$-PARALLELIZATIONS OF CHRONOMETRIC BUNDLES

ALEXANDER LEVICHEV

Chronometric theory (which is due to Segal, see [1]) is based on the space-time $\mathbf{D}$ which can be represented as a causal Lie group. The causal structure is determined by an invariant Lorentzian form on the Lie algebra $u(2)$. Similarly (in author's publications), the space-time $\mathbf{F}$ is represented as a causal Lie group where the causal structure is now determined by an invariant Lorentzian form on the Lie algebra $u(1,1)$. Lie groups G, G_F are introduced as $SU(2,2)$-reps which are related by conjugation: $h = WgW$. Here g is arbitrary in the original $G = SU(2,2)$ whereas W is a certain 4 by 4 matrix (see [2]) with 2 by 2 blocks P, Q, Q, P (in that order). Linear-fractional G-action on $\mathbf{D}$ is global and conformal; it is fundamental for the analysis in space-time bundles based on the parallelizing group $U(2)$. This analysis has been done by Paneitz and Segal in 1980s. Linear-fractional (locally defined) G_F-action in $\mathbf{F} = U(1,1)$

$$h(U) = (VU + W)(XU + Y)^{-1} \tag{1}$$

has been introduced in [2]. Here each h is viewed as consisting of 2 by 2 blocks V, W, X, Y. For a 2 by 2 matrix M denote $W(M) = (PM + Q)(QM + P)^{-1}$ when it exists. Define the imbedding of $\mathbf{F}$ into $\mathbf{D}$ by

$$Z = W(U) \tag{2}$$

One can verify that (2) is well-defined for arbitrary U in $\mathbf{F}$.

The current work deals with both D-, and F-parallelizations as well as it is dedicated to the verification of the key condition (the *coherence condition*)in the fundamental Paneitz-Segal theorem (see [I, p.99, Theorem 4.1]). In this theorem ϕ stands for a Lie group G homomorphism into the group of C^∞-homeomorphisms of its certain subgroup N. The coherence condition reads as follows. If x, y belong to N then

$$\phi(x)y = xy. \tag{3}$$

References

[1] S. M. Paneitz, I. E. Segal, *Analysis in space-time bundles I: General considerations and the scalar bundle* // J. Funct. Anal., **47**:1 (1982), 78–142.

[2] A. V. Levichev, *Pseudo-Hermitian realization of the Minkowski world through DLF theory* // Phys. Scr., **83**: 1 (2011), 1–9.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Akad. Koptyuga ave., 630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: alevichev@gmail.com

VASSILIEV INVARIANTS AND LINK HOMOTOPY IN DIMENSION FOUR

ASH LIGHTFOOT

The theory of Vassiliev invariants has found many applications beyond classical knot theory, and in this talk I will discuss two particular generalizations. The first is due to Kamada, who introduced the notion of Vassiliev invariants for surfaces in 4-space; here, the analogue of a crossing change of a knot is a "Casson finger move" of a surface. The second was introduced by Kirk and Livingston, who considered Vassiliev invariants of classical two-component links, for which the two components must stay disjoint. I will explain how the study of link homotopy in dimension four connects these two notions, and discuss pertinent problems in this setting.

National Research University Higher School of Economics, 6 Usacheva st., 119048, Moscow, Russia
E-mail address: `alightfoot@hse.ru`

CLASSIFYING MATVEEV'S VIRTUAL 3-MANIFOLDS

ANDREI MALYUTIN

S. V. Matveev [1] introduced a concept of virtual 3-manifolds generalizing classical compact 3-manifolds. A virtual 3-manifold can be presented either as an equivalence class of the so-called special polyhedra or as an equivalence class of face identification schemes of tetrahedra. In the same paper [1], Matveev constructed a natural map from the set of nondegenerate virtual 3-manifolds to the set of 3-manifolds with RP^2-singularities and posed the problem, whether this map is bijective. A positive answer to this question would give a straightforward classification of virtual 3-manifolds, identifying them with 3-manifolds with RP^2-singularities. However, it turns out that the answer is negative: we show that the mentioned map is not injective. Moreover, we present an infinite family of virtual 3-manifolds corresponding to the same 3-manifold with RP^2-singularities. As an alternative approach to the classification of virtual 3-manifolds, we propose to identify them with 3-*manifolds with Möbius singularities.* (A compact 3-dimensional polyhedron W is a 3-*manifold with Möbius singularities* if the link of any point of W is either a 2-sphere, or a 2-disc, or a Möbius band.)

Joint research with E. Fominykh and A. Vesnin.

References

[1] S. V. Matveev, *Virtual 3-manifolds* // Sib. Elektron. Mat. Izv., **6** (2009), 518–521.

St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics, 27 Fontanka, 191023, St. Petersburg, Russia

E-mail address: malyutin@pdmi.ras.ru

Supported by RFBR grant 16-01-00609.

INTERIOR ESTIMATE FOR ELLIPTIC PDE AND DISTORTION OF QUASICONFORMAL, HARMONIC MAPS

MIODRAG MATELJEVIÇ

We study the groth of gradient of mappings which satisfy certain PDE equations (or inequalities) using Green-Laplacian formula for functions and its derivatives. If in addition the considered mappings are quasiconformal (qc) between C^2 domains, we show that they are Lipschitz. Some of the obtained results can be considered as versions of Kellogg-Warshawski type theorem for qc-mappings.

More precisely, developing further methods from Heinz paper [2], we prove

Theorem. *(i) Let Ω be a Jordan domain in $\mathbb{R}^n$ with C^2 boundary and $f\colon \mathbb{B}_n \xrightarrow{onto} \Omega$ be C^2, which has continuous extension on $\overline{\mathbb{B}}$.*
(ii) Suppose that f satisfy Poisson-Laplace type inequality on $B_0 = B(z_0, r_0) \cap \mathbb{B}$, where $x_0 \in \mathbb{S}$ and $r_0 > 0$.
There is $0 < r_1 < r_0$, $c > 0$ and a unit vector fields X on $B_1 = B(x_0, r_1) \cap \mathbb{B}$ such that $|df_x(X)| \le c$ for every $x \in B_1$ and $X \in T_x\mathbb{B}$.

If in addition f is qc in B_0, then f is Lipshitz continuous ob B_1.

Every Lyapunov domain in plane is exhausted by a monotonous sequence of C^∞–domains which are Lyapunov - uniformly bounded. Hence we can prove that qc harmonic mappings between Lyapunov–domains (in particular C^2-domains) are Lipshitz.

We also plan to discuss a major breakthrough concerning the initial Schoen Conjecture: A quasiconformal map of the sphere $\mathbb{S}^2$ admits a harmonic quasi-isometric extension to the hyperbolic space $\mathbb{H}^3$.

Among the other things, as tool we use the interior estimates for Poisson type inequality and try to imply it to study boundary regularity of Dirichlet Eigenfunctions on bounded domains which are C^2 except at a finite number of corners (Y. Sinai's question).

References

[1] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial Differential Equation of Second Order* // Springer Verlag, 2d ed., 1983.

[2] E. Heinz, *On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings* // J. Anal. Math., **5** (1956/57), 197–272.

[3] D. Kalaj, M. Mateljeviç, *Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains* // J. Anal. Math., **100** (2006), 117–132

University of Belgrade, Belgrade, Serbia
E-mail address: miodrag@matf.bg.ac.rs

ON KATZARKOV–KONTSEVICH–PANTEV CONJECTURES

VICTOR PRZYJALKOWSKI

Let X be an n-dimensional Calabi–Yau complete intersection in a smooth toric variety. Batyrev and Borisov in [2] constructed, using a nef-partition for X and the dual nef-partition, mirror dual Calabi–Yau variety Y. They proved that

$$h^{p,q}_{st}(X) = h^{p,n-q}_{st}(Y),$$

where $h^{p,q}_{st}(V)$ are *stringy Hodge numbers*; in particular, they coincide with the usual ones of a crepant resolution of V if such resolution exists. Hodge numbers mirror symmetry conjecture predicts that the same equalities hold for mirror dual Calabi–Yau varieties.

Mirror dual object for a Fano variety X is not a variety again, but the so called *Landau–Ginzburg model* — a smooth (non-compact) variety Y with non-constant complex-valued function w called *superpotential*. Usually the Landau–Ginzburg model is treated as a family of fibers of w. Katzarkov, Kontsevich, and Pantev in [4] defined three sets of numbers, $f^{p,q}(Y,w)$, $h^{p,q}(Y,w)$, and $i^{p,q}(Y,w)$. (In [5] these definitions are slightly corrected.) That is, they considered a *tame compactified Landau–Ginzburg model* as a smooth compact variety Z with a function $w\colon Z \to \mathbb{P}^1$ such that for $D = w^{-1}(\infty)$ one has $-K_Z = D$, $Y = Z \setminus D$, and D is a simple normal crossing divisor. One can define *w-adopted log forms*

$$\Omega^a_Z(log\, D, w) = \{\alpha \in \Omega^a_Z(log\, D) \mid dw \wedge \alpha \in \Omega^{a+1}_Z(log\, D)\}$$

and numbers

$$f^{p,q}(Y,w) = \dim H^p(Z, \Omega^q_Z(log\, D, w)).$$

Consider a smooth fiber Y_b. A nilpotent operator $N = log\, T$ acts on $H^m(Y, Y_b)$, where T is a monodromy at infinity, and the *weight filtration $W(N,m)$ on $H^m(Y,Y_b)$ centered in m* agrees with it. The Landau–Ginzburg Hodge numbers $h^{p,q}(Y,w)$ are defined by

$$h^{p,n-q}(Y,w) = \dim gr^{W(N,n-a)}_{2(n-p)} H^{n+p-q}(Y,Y_b) \quad \text{if } a = p-q \geq 0,$$

$$h^{p,n-q}(Y,w) = \dim gr^{W(N,n+a)}_{2(n-q)} H^{n+p-q}(Y,Y_b) \quad \text{if } a = p-q < 0.$$

The motivation of this definition is the following. Homological mirror symmetry conjecture states, in particular, that the derived category of coherent sheaves $\mathcal{D}^b(X)$ is equivalent to the Fukaya–Seidel category $FS(Y)$. In particular, their Hochschild homologies are isomorphic. Conjecturally, $HH_m(FS(Y)) \cong H^m(Y,Y_b)$. Serre functors acting on both categories should coincide; on $\mathcal{D}^b(X)$ a logarithm of this functor is, up to a sign, the multiplication by $c_1(K_X)$, and on $FS(Y)$ the Serre functor is inverse to T, so its logarithm defines the same weight filtration as $W(N,m)$.

Finally, using mixed Hodge structures for sheaves of vanishing cycles to singular fibers, one can define the numbers $i^{p,q}(Y,w)$. The following theorem and two conjectures one can find in [4]. We present them here with corrections from [5].

Theorem. *One has*

$$\dim H^m(Y,Y_b;\mathbb{C}) = \sum_{p+q=m} i^{p,q}(Y,w) = \sum_{p+q=m} h^{p,q}(Y,w) = \sum_{p+q=m} f^{p,q}(Y,w).$$

Conjecture A. *One has*

$$i^{p,q}(Y,w) = h^{p,q}(Y,w) = f^{p,q}(Y,w).$$

The author was supported by Laboratory of Mirror Symmetry NRU HSE, RF government grant, ag. 14.641.31.0001, grant MK-6019.2016.1, and RFBR grants 15-01-02164 and 15-01-02158.

Conjecture B. *Let (Y, w) be a Landau–Ginzburg model of Fano type for a Fano variety X of dimension n. Then*

$$f^{p,q}(Y, w) = h^{p,n-q}(X).$$

These conjectures can be proved for dimensions 2 and 3. That is, Landau–Ginzburg models for del Pezzo surfaces are constructed in [1]. For a degree d del Pezzo surface its Landau–Ginzburg model is a rational elliptic surface with a wheel of d smooth rational curves over infinity. In [5] the following theorem is proven.

Theorem. *Let X be a del Pezzo surface. Then the last equality of Conjecture A holds, the first one does not hold, and Conjecture B for Landau–Ginzburg models constructed in* [1] *holds.*

Methods that are used in [5], together with methods from [3], can be generalized to higher-dimensional case. That is, in [6] *toric Landau–Ginzburg models* are defined as specific Laurent polynomials that reflect specific symplectic and deformational properties of Fano varieties. Conjecturally, *Calabi–Yau compactifications* of families given by these polynomials satisfy homological mirror symmetry. In [7] these Calabi–Yau compactifications are constructed. The following statement belongs to A. Harder, L. Katzarkov, V. Lunts, and V. Przyjalkowski.

Claim. *Let X be a Fano threefold. Then the last equality of Conjecture A holds, the first one does not hold, and Conjecture B for Calabi–Yau compactifications of Minkowski toric Landau–Ginzburg models holds.*

Methods we apply to prove these statement use topology of the fibration and specific Hodge-theoretic calculations. The important property we need is maximal unipotency of the monodromy at infinity; it is related with the conjecture that the fiber over infinity is a reduced reducible divisor that is combinatorially dual to a triangulation of a sphere. Another important ingredient is the number of components of reducible fibers of the fibration minus the numbers of reducible fibers. This allow us to hope that Conjecture A and Conjecture B can be studied (in the similar way as above) for complete intersections in projective spaces. Calabi–Yau compactifications for them are constructed in [8], and reducible fibers are studied in [9].

References

[1] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves* // Invent. Math., **166**:3 (2006), 537–582.

[2] V. Batyrev, L. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers* // Invent. Math., **126**:1 (1996), 183–203.

[3] A. Harder, *The Geometry of Landau–Ginzburg models*, thesis, `https://era.library.ualberta.ca/files/c0z708w408#.WB93zdKLRdg`.

[4] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models* // J. Diff. Geom. **105**:1 (2017), 55–117.

[5] V. Lunts, V. Przyjalkowski, *Landau–Ginzburg Hodge numbers for mirrors of del Pezzo surfaces* // arXiv:1607.08880.

[6] V. Przyjalkowski, *Weak Landau–Ginzburg models for smooth Fano threefolds* // Izv. Math. **77**:4 (2013), 135–160.

[7] V. Przyjalkowski, *Calabi–Yau compactifications of toric Landau–Ginzburg models for smooth Fano threefolds* // Sb. Math. **208**:7 (2017), DOI:10.1070/SM8838, arXiv:1609.09740.

[8] V. Przyjalkowski, *On Calabi–Yau compactifications of toric Landau–Ginzburg models for Fano complete intersections* // Math. Notes, **102** (2018), arXiv:1701.08532.

[9] V. Przyjalkowski, C. Shramov, *On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models* // Int. Math. Res. Not., **2015**:21 (2015), 11302–11332.

Steklov Mathematical Institute, 8 Gubkina st., 119991, Moscow, Russia.

National Research University Higher School of Economics, Laboratory of Mirror Symmetry, 8 Usacheva st., 117312, Moscow, Russia.

E-mail address: `victorprz@mi.ras.ru, victorprz@gmail.com`

ALMOST CONTACT STRUCTURES ON HOPF BUNDLE

YAROSLAVNA SLAVOLYUBOVA

Let M be a real smooth manifold of dimension $n \geq 3$. An almost contact structure on M is a triple (η, ξ, φ), where η is a nonzero 1-form on M, ξ is a vector field on $M : \eta(\xi) = 1$, $d\eta(\xi, .) = 0$, φ is so called affinor considered as continuous tangent spaces endomorphisms field on $M : \eta \circ \varphi = 0$, $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$, I denotes an identity operator on T_xM for any $x \in M$ [1]. When $(d\eta)^n \wedge \eta \neq 0$ totaly on M, almost contact structure is a normal contact structure. We consider almost contact structures on Hopf bundle $S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$. Here S^n is a n-dimensional sphere, $\mathbb{C}P^n$ is a complex projective space of complex dimension n, and sphere S^{2n+1} is considered as submanifold in $\mathbb{C}^{n+1}$. The main statement of the talk is the next result that generalizes the well-known Boothby-Wang theorem:

Theorem 1. *Hopf bundle admits the unique contact structure, but any almost contact structure is induced by a pair of totaly linear-independent vector fields X, Y on $\mathbb{C}P^n$ and continuous tangent spaces endomorphisms field J on $\mathbb{C}P^n$ so that $J^2 = -I + X^* \otimes X + Y^* \otimes Y$, $JX = JY = 0$, $X^* \circ J = 0$.*

We take an natural riemannian metric g_0 on sphere S^{2n+1} induced by standart hermitian inner product in $\mathbb{C}^n$, vector field Z that touches the orbit of action for S^1 on S^{2n+1}, and distribution D on S^{2n+1} that is orthogonal to Z with respect to metric g_0. In the beginning, we show that Z generates the Boothby-Wang contact structure on Hoph bundle. Further, we show that any vector field $X \in C^1(D)$ generates a noncontact 1-form on S^{2n+1}, and also any affinor φ for this noncontact 1-form and vector field φZ together are equivalent to endomorphisms field J from theorem 1. By this way, we accomplish the proof of theorem 1.

References

[1] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds (Progress in Mathematics, Vol. 203)* // Birkhauser Boston, 2002.

Kemerovo Institute (Branch) of Plekhanov Russian University of Economic, 39 Kuznetskiy ave., 650992, Kemerovo, Russia

E-mail address: jar1984@mail.ru

VOLUME OF HYPERBOLIC TETRAHEDRON WITH SYMMETRY S_4

VUONG HUU BAO

We consider a hyperbolic tetrahedron with symmetry group C_2 by Schönflies notation (or 2-symmetry by Hermann-Mauguin notation). By definition, a tetrahedron has 2-symmetry if it admits a π rotation around the axis passing through the middles of two opposite edges (see fig. 1).

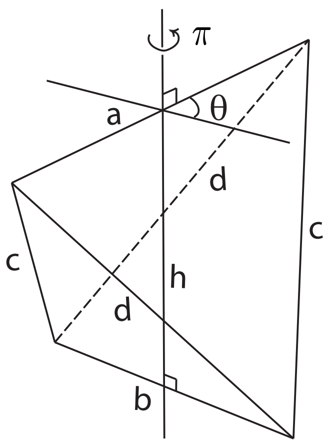


FIGURE 1. Tetrahedron with 2-symmetry

In particular case when $a = b$, $\theta = \pi/2$ (and $c = d$) we get a tetrahedron with $\overline{4}$-symmetry.

We use the method established by N.V. Abrosimov, E.S. Kudina and A.D. Mednykh in [1]. Roughly speaking, we model a polyhedron in Cayley-Klein model of the hyperbolic space and use the vector algebra in Minkowski space to get the relations between dihedral angles and edge lengths. We find a criterion of existence for such a tetrahedron and obtain exact formula for its hyperbolic volume.

Theorem 1. *A hyperbolic tetrahedron with edge lengths a, c admitting $\overline{4}$-symmetry is exist if and only if* $1 + cha - 2chc < 0$.

Theorem 2. *The volume of a hyperbolic tetrahedron with edge lengths a, c admitting $\overline{4}$-symmetry is given by the formula*

$$V = \int_0^a f(a,c)\, da = \int_{arch((1+cha)/2)}^c g(a,c)\, dc, \ where$$

The present work is supported by Russian Science Foundation (grant 16-41-02006).

$$
\begin{aligned}
f(a,c) &= -a\frac{1}{\sqrt{A_2^2-A_1^2}}\frac{A_3}{A_2}sha - 2c\frac{1}{\sqrt{A_2^2-C_1^2}}\frac{C_2}{A_2}sha,\\
g(a,c) &= -a\frac{1}{\sqrt{A_2^2-A_1^2}}\frac{A_4}{A_2}shc - 2c\frac{1}{\sqrt{A_2^2-C_1^2}}\frac{C_3}{A_2}shc,\\
&A_1 = (1-cha)(1+cha)^3 - 16(1+cha)^2ch^2c + 64ch^4c,\\
&A_2 = (cha-1)(1+cha)^3 - 16(1+cha)^2ch^2c + 64ch^4c,\\
&A_3 = 64ch^2c\,(1+cha)^2[cha(1+cha)^2 + 4(1-2cha)ch^2c],\\
&A_4 = 64chc\,(1-cha)(1+cha)^3[(1+cha)^2 - 8ch^2c],\\
&C_1 = (ch^2a-1)[(1+cha)^2 - 8ch^2c],\\
&C_2 = 16ch^2c\,(1+cha)^3[1-cha(4+cha)]+\\
&8(1+cha)^2(1+2cha)^2(1+2cha)^2(1+2cha)ch^2c - 64chach^4c,\\
&C_3 = 16chc[(1-cha)(1+cha)^3 + 16(1+cha)^2ch^2c - 64ch^4c]+\\
&2(1-ch^2a)(1+cha)(cha-1+2ch^2a-16ch^2c)[(1+cha)^2-8ch^2c].
\end{aligned}
$$

We also obtain existence criteria and volume formulas in more general cases when $a \neq b$ or $\theta \neq \pi/2$ $(c \neq d)$.

References

[1] N.V. Abrosimov, E.S. Kudina and A.D. Mednykh, *On the volume of a hyperbolic octahedron with $\overline{3}$-symmetry* // Proc. Steklov Inst. Math., **288** (2015), 1–9.

Novosibirsk State University, 2 Pirogova st., 630090, Novosibirsk, Russia

E-mail address: vuonghuubao@live.com

О ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ $\mathbb{R}$-ДЕРЕВЬЯХ

ПАВЕЛ АНДРЕЕВ

В работах [1]–[3] изучается строение локально полных локально компактных подобно однородных, но не однородных пространств с внутренней метрикой. Если отказаться от условия локальной компактности, то локально полное подобно однородное не однородное пространство может оказаться, например, $\mathbb{R}$-деревом, каждая точка которого является точкой ветвления (см. [4]).

Пусть X — локально полное подобно однородное не однородное $\mathbb{R}$-дерево, отличное от $\mathbb{R}_+$. Оно называется строго вертикальным, если на любом его отрезке функция радиуса полноты имеет локальный экстремум не более, чем в одной внутренней точке этого отрезка. Строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево X называется ветвящимся вверх (соответственно, вниз), если все локальные экстремумы радиуса полноты являются локальными минимумами (соответственно, максимумами).

Под числом ветвления $\mathbb{R}$-дерева X в точке $a \in X$ понимается кардинальное число $\kappa - 1$, где κ — кардинальное число компонент связности пространства $X \setminus \{a\}$.

Теорема. 1. *Для любого кардинального числа $\kappa > 0$ существует строго вертикальное локально полное подобно однородное не однородное $\mathbb{R}$-дерево X, в каждой точке которого число ветвления равно $\kappa + 1$, причём X может быть как ветвящимся вверх, так и ветвящимся вниз.*

2. *Если локально полное подобно однородное не однородное $\mathbb{R}$-дерево X, отличное от $\mathbb{R}_+$, не является строго вертикальным, то его число ветвления в каждой точке не меньше мощности континуума.*

Список литературы

[1] В .Н. Берестовский, *Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой* // Изв. вузов. Математика, **48**:11, 2–22 (2004).

[2] И. А. Гундырев, *Строение подобно-однородных локально компактных простанств с внутренней метрикой* // Математические труды, **17**:2, 132–141 (2014).

[3] И. А. Гундырев, *Строение подобно-однородных локально компактных простанств с внутренней метрикой. II* // Математические труды, **18**:1, 15–26 (2015).

[4] П. Д. Андреев, *Полулинейные метрические полурешётки на $\mathbb{R}$-деревьях*, Изв. вузов. Математика, 6, 3–13 (2007).

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, наб. Северной Двины, 17, Архангельск, 163060, Россия

E-mail address: pdandreev@mail.ru

О ШЕСТИМЕРНОЙ СФЕРЕ С ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВОЙ СТРУКТУРОЙ

ГАЛИНА БАНАРУ, МИХАИЛ БАНАРУ

Шестимерная сфера S^6 с канонической приближенно келеровой структурой занимает особое место в эрмитовой геометрии. Самое очевидное объяснение этого факта такое: каноническая приближенно келерова структура, индуцируемая на S^6, — исторически первый пример отличной от келеровой почти эрмитовой структуры [1]. Количество опубликованных в серьезных математических журналах статей о различных аспектах геометрии приближенно келеровой шестимерной сферы исчисляется многими десятками. Среди них как работы классиков эрмитовой геометрии (А. Грей, Е. Калаби, В.Ф. Кириченко, К. Секигава), так и статьи многих других геометров из самых разных стран. Отметим, что обзор [2] об эрмитовой геометрии шестимерных многообразий содержит множество разнообразных связанных с геометрией сферы S^6 результатов, которые были получены до 2012 года.

В докладе предполагается произвести краткий обзор основных результатов о геометрии приближенно келеровой сферы S^6, полученных в последнее время (например [3]). Кроме того, предполагается представить несколько собственных результатов, как опубликованных (например [4] и [5]), так и совсем новых. Среди прочего, будет показано, что почти контактные метрические гиперповерхности приближенно келеровой шестимерной сферы допускают почти контактную метрическую структуру косимплектического типа (это понятие ввели в рассмотрение В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев [6]), которая, однако, не является ни косимплектической структурой, ни структурой Кенмоцу, ни какой-либо другой известной структурой этого вида.

Список литературы

[1] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Одесса: Печатный дом, 2013.

[2] М. Б. Банару, *Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры, **126**, 10–61 (2014).

[3] R. Sharma, S. Deshmukh, *On Lagrangian submanifolds of the nearly Kaehler 6-sphere* // Contemp. Math., **674**, 153–160 (2016).

[4] A. Abu-Saleem, M. B. Banaru, *On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere* // Malays. J. Math. Sci., **8**, 35–46 (2014).

[5] M. B. Banaru, G. A. Banaru, *A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere* // Bull. Transilv. Univ. Braşov, Ser. III, Math. Inform. Phys., **8(57)**:2, 21–28 (2015).

[6] В. Ф. Кириченко, И. В. Ускорев, *Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур* // Математические заметки, **84**:6, 838–850 (2008).

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000, Россия

E-mail address: mihail.banaru@yahoo.com

О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ НА 0- И 1-ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ МАЛЫХ КЛАССОВ ГРЕЯ-ХЕРВЕЛЛЫ

МИХАИЛ БАНАРУ

1. Известно, что на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. Изучением почти контактных метрических структур на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий занимались многие геометры: Д. Блэр (США), С. Ишихара, М. Окумура, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, К. Яно (Япония), В. Ф. Кириченко, Л. В. Степанова (Россия).

В [1] автором было установлено, что в 6-мерном келеровом подмногообразии алгебры октав почти контактная метрическая структура на гиперповерхности с типовым числом 1 (или 1-гиперповерхности) является косимплектической. То есть такой же, как и на вполне геодезической гиперповерхности (или 0-гиперповерхности) в 6-мерном келеровом подмногообразии алгебры Кэли. Позднее этот результат был обобщен для почти контактных метрических гиперповерхностей произвольного келерова многообразия [2].

Для 6-мерной сферы с канонической приближенно келеровой структурой (такая структура не интегрируема, и, следовательно, не является келеровой) получены схожие результаты. Именно, доказано, что и на вполне геодезической гиперповерхности, и на гиперповерхности с типовым числом 1 возможна реализация почти контактной метрической структуры только одного вида — слабо косимплектической структуры (иногда ее называют структурой Эндо) [3], [4]. Этот результат также был обобщен для почти контактных метрических гиперповерхностей произвольного приближенно келерова многообразия [5].

Для 6-мерных специальных эрмитовых подмногообразий алгебры октав также получен результат аналогичного плана: доказано, что на гиперповерхности с типовым числом 1 реализуется структура, идентичная той, что реализуется на вполне геодезической гиперповерхности [6]. И снова этот результат получил обобщение для почти контактных метрических гиперповерхностей произвольного специального эрмитова многообразия [7].

Классы келеровых, приближенно келеровых и специальных эрмитовых многообразий относят к так называемым малым классам Грея–Хервеллы почти эрмитовых многообразий. Кроме них к этим малым классам относят классы W_2 и W_4, которые называют классами почти келеровых (almost Kählerian, AK-) и локально конформных келеровых (locally conformal Kählerian, LCK-) многообразий, соответственно. Причем последнее название не совсем точно. На самом деле, класс W_4 только содержит локально конформные келеровы многообразия, а совпадает с классом LCK-многообразий лишь для размерности не ниже шести [8].

2. Как известно [8], почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX,\ JY\rangle = \langle X,\ Y\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. С каждой AH-структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$ на многообразии связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (то есть 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

и называемого фундаментальной формой структуры.

Почти эрмитова структура принадлежит классу почти келеровых структур (классу W_2), если выполняется условие $\delta F = 0$. Почти эрмитова структура принадлежит классу W_4, если

$$\nabla_X \ (F) \ (Y, Z) \ = \ -\frac{1}{2(n-1)} \{ \langle X, Y \rangle \ \delta F(Z) - \langle X, Z \rangle \ \delta F(Y) - $$
$$- \langle X, JY \rangle \ \delta F(JZ) + \langle X, JZ \rangle \ \delta F(JY) \}, \ X, Y, Z \in \aleph(M^{2n}),$$

где δ — оператор кодифференцирования, а ∇ — риманова связность метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ [8].

Напомним [8], что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются условия [8]:

$$\eta(\xi) = 1, \ \Phi(\xi) = 0, \ \eta \circ \Phi = 0, \ \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta,$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \ X, Y \in \aleph(N).$$

(Здесь Φ — поле тензора типа (1, 1), ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.)

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Классическими примерами почти контактной метрической структуры являются упомянутые выше косимплектическая и слабо косимплектические структуры, а также структуры Сасаки и Кенмоцу [8].

3. Теорема 1. *В W_4-многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числами 0 и на гиперповерхности с типовым числом 1 являются идентичными.*

Принимая во внимание, что класс W_4 почти эрмитовых многообразий содержит все LCK-многообразия, мы получаем такое

Следствие. *В локально конформном келеровом многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числами 0 и на гиперповерхности с типовым числом 1 являются идентичными.*

Теорема 2. *Структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} почти келерова многообразия M^{2n} имеют следующий вид:*

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta \wedge \omega_\gamma + i\sigma^\alpha_\beta \omega^b \wedge \omega + \left(-\sqrt{2}\tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta n} + i\sigma^{\alpha\beta} \right) \omega_\beta \wedge \omega;$$
$$d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + i\sigma^\beta_\alpha \omega_b \wedge \omega + \left(-\sqrt{2}\,\tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n} - i\sigma_{ab} \right) \omega^\beta \wedge \omega; \quad (1)$$
$$d\omega = \sqrt{2}B_{n\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sqrt{2}B^{n\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta - 2i\sigma^\alpha_\beta \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \left(\tilde{B}_{n\beta n} + i\sigma_{n\beta} \right) \omega \wedge \omega^\beta + \left(\tilde{B}^{n\beta n} - i\sigma^\beta_n \right) \omega \wedge \omega_\beta.$$

Здесь $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ — компоненты форм смещения ($\omega^n = \omega$); $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_\alpha = \omega^{\hat{a}}$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1$; $a, b, c = 1, \ldots, n$. Функции $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ являются компонентами структурных тензоров Кириченко [9]; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в почти келерово многообразие M^{2n}.

Если гиперповерхность является вполне геодезической, то есть все компоненты ее второй квадратичной формы σ обращаются в нуль, то уравнения (1) существенно упрощаются:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta \wedge \omega_\gamma + \left(-\sqrt{2}\,\tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta n} \right) \omega_\beta \wedge \omega;$$
$$d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \left(-\sqrt{2}\tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n} \right) \omega^\beta \wedge \omega; \quad (2)$$

$$d\omega = \sqrt{2}B_{n\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sqrt{2}B^{n\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta + \left(\tilde{B}_{n\beta n}\right)\omega \wedge \omega^\beta + \left(\tilde{B}^{n\beta n}\right)\omega \wedge \omega_\beta.$$

Обратим внимание на то, что эти уравнения не соответствуют ни косимплектической структуре (в случае, когда почти келерова структура отлична от келеровой), ни слабо косимплектической структуре, ни структурам Кенмоцу или Сасаки, ни другим видам известных почти контактных метрических структур [8]. Предположение, которое мы выдвигаем, состоит в следующем. Если типовое число гиперповерхности N^{2n-1} почти келерова многообразия M^{2n} равно единице, то есть единице равен ранг ее второй квадратичной формы, то почти контактная метрическая структура на этой гиперповерхности тоже задается уравнениями (2).

Другими словами, мы формулируем такое

Предположение. *В произвольном почти келеровом многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числом 0 и на гиперповерхности с типовым числом 1 являются идентичными.*

Разумеется, получение структурных уравнений (1) и (2) является только первым (хотя и весьма существенным) шагом к тому, чтобы подтвердить или опровергнуть такое предположение.

Если выдвинутое предположение окажется верным, то это означает, что для АН-многообразий всех малых классов Грея–Херવеллы вид почти контактных метрических структур на гиперповерхностях с типовыми числами 1 и 0 будет одинаковым.

Список литературы

[1] М.Б. Банару, *О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли* // Изв. Вузов. Математика, **10**, 13–18 (2014).

[2] М.Б. Банару, *О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий* // Сибирский математический журнал, **55**:4, 719–723 (2014).

[3] A. Abu-Saleem, M.B. Banaru, *On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere* // Malays. J. Math. Sci., **8**, 35–46 (2014).

[4] M.B. Banaru, G.A. Banaru, *A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere* // Bull. Transilv. Univ. Braşov, Ser. III, Math. Inform. Phys., **8(57)**:2, 21–28 (2015).

[5] М.Б. Банару, *Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях* // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика, **3**, 60–62 (2014).

[6] М.Б. Банару, *О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым сислом 1 или 0 в 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли* // Сибирский математический журнал, в печати.

[7] M.B. Banaru, *A note on geometry of special Hermitian manifolds* // Lobachevskii J. Math., в печати.

[8] В.Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Одесса: Печатный дом, 2013.

[9] A. Abu-Saleem, M.B. Banaru, *Some applications of Kirichenko tensors* // An. Univ. Oradea, Fasc. Mat, **17**:2, 201–2008 (2010).

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000, Россия

E-mail address: mihail.banaru@yahoo.com

ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

РАДА БОГДАНОВА, ВЛАДИМИР КЫРОВ, ГЕННАДИЙ МИХАЙЛИЧЕНКО

Известна полная классификация трехмерных феноменологически симметричных геометрий [1]. Она включает симплициальные геометрии I, II и III типов, задаваемые метричекими функциями:

$$f(ij) = \frac{y_i - y_i}{x_i - x_j} + w_i + w_j; \tag{1}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_i}{x_i - x_j} \exp(w_i + w_j); \tag{2}$$

$$f(ij) = arctg \frac{y_i - y_i}{x_i - x_j} + w_i + w_j; \tag{3}$$

где (x_i, y_i, w_i) и (x_j, y_j, w_j) — координаты точек i и j трехмерного пространства R^3 [2].

Главной задачей работы является нахождение локально эффективных действий в R^3 некоторых шестимерных групп Ли G, сохраняющих значения метричеких функций (1) — (3) (групп движений этих геометрий). Для решения поставленной задачи сначала через экспоненциальное отображение находятся локальные однопараметрические подгруппы, соответствующие ранее известным базисным операторам $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ алгебр Ли этих действий:

$$\partial_x, \quad \partial_y, \quad x\partial_x + y\partial_y, \quad -2x\partial_y + \partial_w, \quad -x^2\partial_y + x\partial_w, \quad -x^2\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_w; \tag{4}$$

$$\partial_x, \quad \partial_y, \quad x\partial_x + y\partial_y, \quad x\partial_x - y\partial_y + \partial_w, \quad x^2\partial_x + x\partial_w, \quad -y^2\partial_y + y\partial_w; \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x, \quad \partial_y, \quad x\partial_x + y\partial_y, \quad 2y\partial_x - 2x\partial_y + \partial_w, \\ 2xy\partial_x + (y^2 + x^2)\partial_y + x\partial_w, \quad (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y - y\partial_w, \end{array} \right. \tag{6}$$

а затем композицией находятся явные выражения для локальных действий.

Теорема 1. *Локально эффективное действие группы Ли $G = SL_2(D)_R$ в R^3 задает группу движений симплициального пространства I типа. В явном виде это действие записывается так:*

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \ w' = w + \frac{1}{2\varepsilon}\left(1 - \frac{\overline{cz + d}}{cz + d}\right),$$

где $a, b, c, d = const$, $ad - bc = 1$.

В данной теореме D — это кольцо дуальных чисел, $SL_2(D)$ — специальная линейная группа над D, а $G = SL_2(D)_R$ — ее овеществление. $a, b, c, d, z \in D$, причем, например, $z = x + \varepsilon y, \quad \overline{z} = x - \varepsilon y, \quad \dfrac{\overline{z}}{z} = 1 - 2\varepsilon\dfrac{y}{x}, \ \varepsilon^2 = 0.$

Теорема 2. *Локально эффективное действие группы Ли $G = SL_2(R) \times SL_2(R)$ в R^3 задает группу движений симплициального пространства II типа. В явном виде это действие записывается так:*

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1} + a, \ y' = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2}, \ w' = w + \ln\frac{c_2 y + d_2}{c_1 x + d_1},$$

где $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 = const$, $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$, $a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$.

Здесь через $SL_2(R)$ обозначена специальная линейная группа над R.

Теорема 3. *Локально эффективное действие группы Ли* $G = SL_2(C)_R$ *в* R^3 *задает группу движений симплициального пространства III типа. В явном виде это действие записывается так:*

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},\ w' = w + \frac{1}{2i} Ln \frac{\overline{cz+d}}{cz+d},$$

где $a, b, c, d = const$, $ad - bc = 1$.

В формулировке теоремы через $G = SL_2(C)_R$ обозначено овеществление комплексной специальной линейной группы.

Список литературы

[1] Г. Г. Михайличенко, *Двумерные геометрии:* монография // Барнаул: БГПУ, 2004.

[2] Г. Г. Михайличенко, *Математические основы и результаты теории физических структур:* монография // Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012.

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

E-mail address: bog-rada@yandex.ru

E-mail address: kyrovVA@yandex.ru

E-mail address: mikhailichenko@gasu.ru

ПРОДОЛЖЕННЫЕ СТРУКТУРЫ С МОДИФИЦИРОВАННОЙ МЕТРИКОЙ НА КОРАСПРЕДЕЛЕНИЯХ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

АЛИЯ БУКУШЕВА

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. В работе [1] получены первые результаты по геометрии кораспределения D^*, состоящего из допустимых 1-форм: $\lambda \in D^* \leftrightarrow \lambda(\vec{\xi}) = 0$. По аналогии с тем, как это было сделано в случае распределения почти контактной метрической структуры [2-5], на кораспределении D^* с помощью внутренней связности [6] была определена почти контактная метрическая структура, названная продолженной почти контактной метрической структурой. В работе [7] введено понятие модифицированной римановой метрики, естественным образом определяемой на кокасательном расслоении риманова многообразия. В настоящем исследовании мы определяем на кораспределении D^* продолженную метрическую структуру, чья метрика определяется по аналогии с тем, как это сделано в работе [7].

Введем на кораспределении D^* структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ [2-5] $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n; a, b, c = 1, ..., n-1)$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, p_a)$ на многообразии D^*, где p_a — координаты допустимого ковектора в кобазисе $(dx^a, \eta = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$, сопряженном базису $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n, \partial_n)$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной.

Пусть Γ^c_{ab} — коэффициенты внутренней связности ∇ [6]. Поставим каждому допустимому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(D)$, $\vec{x} = x^a \vec{e}_a$, и каждому допустимому ковекторному полю $\lambda \in \Gamma(D^*)$, $\lambda = \lambda_a dx^a$, векторные поля $\vec{x}^h = x^a \vec{\varepsilon}_a$, $\lambda^v = \lambda_a \partial^a$ соответственно, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n + p_b \Gamma^b_{ac} \partial^c$, $\partial^a = \frac{\partial}{\partial p_a}$. На тотальном пространстве D^* векторного расслоения (D^*, π, M), где $\pi : D^* \to M$ — естественная проекция, таким образом, возникает гладкое распределение $\tilde{D} = H \oplus V$ где $H = Span(\vec{\varepsilon}_a)$, $V = Span(\partial^a)$.

Определим на пространстве D^* метрический тензор G, полагая $(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = g_{ab}$, $G(\partial^a, \partial^b) = 0$, $G(\partial_n, \partial_n) = 1$, $G(\vec{\varepsilon}_a, \partial^b) = \delta_{ab}$, $G(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = G(\partial^a, \partial_n) = 0$, и допустимую почти комплексную структуру J, таким образом, что $J(\vec{\varepsilon}_a) = (\varphi \vec{e}_a)^h$, $J(\partial^a) = (\varphi \vec{e}_a)^v$, $J(\partial_n) = \vec{0}$. Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Система $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ является почти контактной метрической структурой.*

Назовем полученную структуру продолженной (до распределения D^*) почти контактной метрической структурой с модифицированной метрикой. Имеют место следующие структурные уравнения [7]:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R^c_{abe} \partial^e,$$
$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial^b] = -\Gamma^b_{ac} \partial^c,$$
$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = -p_b \partial_n \Gamma^b_{ac} \partial^c.$$

Здесь $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}$ - компоненты тензора Схоутена [2]:

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}].$$

Структурные уравнения используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Почти контактная метрическая структура* $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ *с модифицированной метрикой нормальна тогда и только тогда, когда распределение* D *является распределением нулевой кривизны.*

Список литературы

[1] С. Галаев, Ю. Шевцова, *О геометрии кораспределения почти контактной метрической структуры* // Математика. Механика, **18**, 20–21 (2016).

[2] С. Галаев, *Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой* // Сибирский математический журнал, **57**:3(337), 632–640 (2016).

[3] А. Букушева, С. Галаев, И. Иванченко, *О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой* // Математика. Механика, **13**, 10–14 (2011).

[4] А. Букушева, *Использование Mathematica для описания геометрии динамических систем* // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники, сб. труд. всеросс. конф., Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 248–249 (2015).

[5] А. Букушева, *О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий* // Математика. Механика, **15**, 8–11 (2013).

[6] С. Галаев, А. Гохман, *Почти симплектические связности на неголономном многообразии* // Математика. Механика, **3**, 28–31 (2001).

[7] E. Calvino-Louzao, E. Garcia-Rio, P. Gilkey, A. Vazquez-Lorenzo, *The geometry of modified Riemannian extensions* // Proc. R. Soc. A, **465**:2107, 2023–2040 (2009).

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: bukusheva@list.ru

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ВАЛЕРИЙ ВОЛЧКОВ, ВИТАЛИЙ ВОЛЧКОВ

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности n, $\mathcal{M}(n)$ – группа евклидовых движений $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}$ – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ положительной лебеговой меры. Рассмотрим следующую задачу: описать класс локально суммируемых функций f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\int\limits_{g\mathcal{K}} f(x)dx = 0 \tag{1}$$

для любого $g \in \mathcal{M}(n)$. Эта задача допускает различные обобщения и модификации. Например, вместо одного компакта $\mathcal{K}$ можно рассматривать семейство компактов, а вместо уравнения (1) изучать решения системы уравнений свёртки с заданными распределениями.

Первые работы по этой теме были выполнены в 1929 году и принадлежат румынскому математику Д. Помпейю, который изучал существование ненулевых функций с условием (1) для некоторых $\mathcal{K}$. Он ошибочно предполагал, что в случае, когда $\mathcal{K}$ – шар, уравнение (1) имеет только нулевое решение. Далее Ф. Джон установил, что функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ с нулевыми интегралами по всем шарам фиксированного радиуса r однозначно определяется своими значениями в шаре $B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < r\}$. Позже, в исследованиях Ф. Джона, Д. Дельсарта, Л. Хермандера, Л. Зальцмана, К.А. Беренстейна и др., обнаружились глубокие связи указанных вопросов со многими разделам современной математики и приложениями.

В последние годы значительное внимание уделяется локальным вариантам сформулированной задачи, то есть, когда функция f задана на ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ и равенство (1) выполнено для $g \in \mathcal{M}(n)$: $g\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$. При переходе от глобальной ситуации к локальной трудности существенно возрастают. Это связано с нарушением групповой структуры, действующей на множестве решений уравнения (1). Среди первых результатов в этом направлении отметим аппроксимационную теорему Л. Хермандера для решений уравнения свертки на выпуклых областях в $\mathbb{R}^n$, а также локальную теорему о двух радиусах, полученную К.А. Беренстейном и Р. Гэем в 1986 году. Мощный аппарат для полного решения многих задач такого типа, позволивший, в частности, снять абсолютно все лишние ограничения, имеющиеся в работах предшественников, был создан в работах В.В. Волчкова в конце прошлого века. Он основан на представлении решений широкого класса уравнений свёртки в виде рядов по специальным функциям. Результаты этой методики подытожены в монографии [1], где поставлено более пятидесяти новых проблем, рассчитанных на продвижение данного направления. В частности, многообещающей программой исследований представлялось развить технику из [1] для различных классов однородных пространств с инвариантной мерой. Однако здесь возникли серьёзные препятствия (например, в случае компактных двухточечно-однородных пространств, симметрических пространств высоких рангов и группы Гейзенберга).

Ряд этих трудностей был преодолен в результате создания нового метода, разработанного авторами данной работы [2], [3]. Он основан на построении и изучении семейства трансмутационных операторов, устанавливающих гомеоморфизм между пространством однородных функций заданной степени на том или ином пространстве и пространством чётных функций на вещественной оси. В некотором обобщенном смысле эти операторы коммутируют с оператором обобщенной свёртки, что позволяет произвести редукцию ряда задач интегральной геометрии и уравнений свертки на однородном пространстве к одномерному случаю, который хорошо изучен. Отметим, что реализация указанного подхода требует развития аппарата, связанного с изучением обобщенных сферических функций и соответствующих сферических преобразований.

В данной работе мы изучаем возможность дальнейших приложений трансмутационных операторов к различным экстремальным задачам интегральной геометрии. Полученные результаты уточняют некоторые теоремы, установленные ранее в [2], [3].

Список литературы

[1] V. Volchkov, *Integral Geometry and Convolution Equations* // Kluwer Academic Publishers, 2003.
[2] V. Volchkov, Vit. Volchkov, *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group* // Springer, 2009.
[3] V. Volchkov, Vit. Volchkov, *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces* // Birkhäuser, 2013.

Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24, Донецк, 83001
E-mail address: valeriyvolchkov@gmail.com

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ МАСЛОВА ПОДМНОГООБРАЗИЙ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

СЕРГЕЙ ГАЛАЕВ

В работе [1] на многообразии с почти контактной метрической структурой была определена N-продолженная симплектическая связность, с помощью которой определялись обобщенные классы Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных метрических пространств. В частности, было показано, что все характеристические классы Маслова вполне геодезических лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств равны нулю. Результаты, полученные в работе [1], позволяют обобщить метод построения геометрических инвариантов, разработанный Трофимовым В.В. с целью классификации интегрируемых гамильтоновых систем. В связи с конструкциями обобщённых классов Маслова естественным образом возникают симплектические связности. Характеристические классы лагранжевых подмногообразий N^n стандартного симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$ определяются с помощью отображения, сопоставляющего каждой точке $x \in N^n$ перенесенного в начало $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ касательного пространства T_xN^n. В случае произвольного симплектического многообразия параллельный перенос касательных пространств лагранжевых подмногообразий осуществляют симплектические связности [2].

Пусть M — гладкое многообразие с почти контактной метрической структурой. Для каждой точки $x \in M$ подпространство $D_x \subset T_xM$ является симплектическим линейным пространством относительно фундаментальной формы $\Omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{x},\varphi\vec{y})$. Назовем подмногообразие $Y \subset M$ лежандровым подмногообразием почти контактного метрического многообразия, если в каждой точке $y \in Y$ касательное пространство T_yY является лагранжевым подпространством пространства D_x. Опишем обобщение [1] конструкции В.В. Трофимова [2] на случай многообразия с почти контактной метрической структурой. Пусть x_0 — фиксированная точка многообразия M. Определим отображение $f : [M,Y] \to G_m(D_{x_0})$, где $[M,Y]$ — пространство путей $\alpha : [0,1] \to M$, таких, что $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) \in Y$, $G_m(D_{x_0})$ — грассманиан, порожденный пространством D_{x_0}. Пусть, теперь $\nabla^B = (\nabla, 0)$ — ассоциированная симплектическая связность [3-5]. Образ пространства $T_{\alpha(1)}Y$ при соответствующем параллельном переносе в точку $\alpha(0) = x_0$ обозначим $f(\alpha)$. Рассмотрим отображение f^* в обобщенной теории когомологий:

$$f^* : h^*(G_m(D_{x_0})) \to h^*([M,Y]).$$

Классы когомологий $f^*(\alpha)$ назовем обобщенными классами Маслова лежандрова подмногообразия Y. Пусть, теперь, M — почти AP-многообразие, т.е. почти контактное метрическое многообразие, наделенное дополнительно структурой F почти произведения. На почти AP-многообразии с помощью связности Леви-Чивита $\dot{\nabla}$ и эндоморфизма F определим связность, обобщающую связность Схоутена-ван Кампена — ассоциированная связность Схоутена-ван Кампена $\tilde{\nabla}$. С помощью связности $\tilde{\nabla}$ удобно выделять различные классы подмногообразий почти AP-многообразия. В частности, можно показать, что AP-многообразие является SQS-многообразием тогда и только тогда, когда $\tilde{\nabla}F = \tilde{\nabla}\varphi = 0$. Как и в случае контактного метрического многообразия, определим лежандрово подмногообразие, как подмногообразие Y многообразия M, наделенное теми же свойствами, что и лежандрово подмногообразие контактного метрического многообразия, но касающееся распределения L, где $TM = L \oplus L^{\perp} \oplus D^{\perp} = D \oplus D^{\perp}$, где $L^{\perp} = K \cap D$, а L — ортогональное ему распределение в D. Легко показать, что распределения L параллельно относительно связности $\tilde{\nabla}$, и, тем самым, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Все характеристические классы Маслова вполне геодезических лежандровых подмногообразий SQS-многообразия равны нулю.*

Список литературы

[1] С. Галаев, *О характеристических классах Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: межвуз. темат. сб. науч. тр., Калининград: Изд-во БФУ им. И. Канта. **46**, С.68–75 (2015).

[2] В. Трофимов, *Индекс Маслова лагранжевых подмногообразий симплектических многообразий* // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. **23**, С. 190–194. (1988).

[3] С. Галаев, А. Гохман, *Почти симплектические связности на неголономном многообразии* // Математика. Механика, **3**, 28–31 (2001).

[4] А. Букушева, С. Галаев, И. Иванченко, *О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой* // Математика. Механика, **13**, 10–14 (2011).

[5] А. Букушева, С. Галаев, *О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию* // Математика. Механика, **7**, 12–14 (2005).

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: sgalaev@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПОДХОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

ВАЛЕРИЙ ИЛЬИН

Рассматриваются проблемы вычислительной геометрии и некоторые подходы к их реализации в многомерных прямых и обратных начально-краевых задачах математического моделирования, описываемых дифференциальными и/или интегральными уравнениями в расчетных областях, состоящих из подобластей с контрастными материальными свойствами и имеющих сложную конфигурацию кусочно-гладких многосвязных граничных поверхностей. Алгоритмы решения в данных случаях базируются на построении адаптивных неструктурированных и динамических сеток с различными типами конечных элементов, при современных требованиях к точности, насчитывающих до десятков миллиардов узлов и предполагающих применение масштабируемого распараллеливания на многопроцессорных вычислительных системах. Вопросы геометрического моделирования (на макро- и на сеточном уровне) вовлекают широкий круг проблем, касающихся необходимого обеспечения как высокой производительности расчетов, так и богатого искусственного интеллекта. В работе описываются некоторые математические и технологические решения, основанные на автоматизации построения алгоритмов с компьютерными аналитическими выкладками, на дифференциальном исчислении и оптимизации геометрических форм, на методах преобразования обобщенных графов, на изогеометрическом анализе и других подходах.

Институт вычислительной математики и математической геофизики, пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: `ilin@sscc.ru`

О НЕКОТОРОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕОРЕМЫ ОБ ОБЩЕМ ПОЛОЖЕНИИ ДЛЯ САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУР

КИРИЛЛ КАМАЛУТДИНОВ, АНДРЕЙ ТЕТЕНОВ

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, ...S_m\}$ - система сжимающих отображений в $\mathbb{R}^n$, G - полугруппа, порожденная $\mathcal{S}$. Непустое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *аттрактором* системы $\mathcal{S}$, если $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(K)$. Если все S_i - подобия, то K называется *самоподобным множеством*, а пара $(K, \mathcal{S})$ - *самоподобной структурой*. Говорят, что система $\mathcal{S}$ удовлетворяет *слабому условию отделимости* (WSP), если $\mathrm{Id} \notin \overline{\{g^{-1}f : \ f, g \in G\}}$.

Рассмотрим семейство самоподобных множеств $K_{pq} \subset \mathbb{C}$, для $p, q \in \mathbb{C}$, $|p|, |q| \leq 1/8$, определенных как аттракторы соответствующих систем $\mathcal{S}_{pq} = \{S_1, ..., S_4\}$ подобий в $\mathbb{C}$, где $S_1(z) = pz$, $S_2(z) = qz$, $S_3(z) = pz - p + 1$, $S_4(z) = qz - q + 1$.

Сначала мы доказываем следующую Теорему об общем положении для гёльдерово-параметризованных множеств:

Теорема 1. *Пусть $K_i, i = 1, 2$ - компактные метрические пространства, $D \subset \mathbb{R}^d$ - замкнутый шар. Пусть $\varphi_i(\xi, x) : D \times K_i \to \mathbb{R}^n$ - непрерывные отображения такие, что*
(a) они α-гёльдеровы по x;
(b) существует такое $M > 0$, что для любых $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$, функция $\Phi(\xi, x_1, x_2) = \varphi_1(\xi, x_1) - \varphi_2(\xi, x_2)$ удовлетворяет неравенству $\|\Phi(\xi', x_1, x_2) - \Phi(\xi, x_1, x_2)\| \geq M\|\xi' - \xi\|$.
Тогда $\Delta = \{\xi \in D| \ \ \varphi_1(\xi, K_1) \cap \varphi_2(\xi, K_2) \neq \emptyset\}$ - компактное множество с хаусдорфовой размерностью не более $\min\left\{\dfrac{\dim_H(K_1 \times K_2)}{\alpha}, d\right\}$.

Используя модификацию Теоремы Барнсли о коллаже [1] и Теорему 1, мы доказываем следующий результат о семействе K_{pq}:

Теорема 2. *Существует подмножество $\mathcal{D}$ полной меры во множестве $\{(p, q) : \ |p|, |q| \leq 1/8\} \subset \mathbb{C}^2$ такое, что самоподобные структуры $(K_{pq}, \mathcal{S}_{pq}), (p, q) \in \mathcal{D}$, попарно изоморфны и обладают следующими свойствами:*
(i) каждое множество K_{pq} - дисконтинуум размерности $\dim_H K_{pq} \leq 2/3$;
(ii) числа p, q, порождают плотную группу второго типа [2] в $\mathbb{C}$, так что $\mathcal{S}_{pq}$ не удовлетворяет WSP;
(iii) $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{K_{pq}}{t} = \mathbb{C}$.

Список литературы

[1] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere* // Academic Press, 1988.

[2] A. V. Tetenov, K. G. Kamalutdinov, D. A. Vaulin, *On two classes of dense 2-generator subgroups in* $\mathbb{C}$ // Siberian Electr. Math. Rep., **11**, 891–895 (2014).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: `kirdan15@mail.ru, a.tetenov@gmail.com`

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00414.

ОБ ЭЙНШТЕЙНОВО-ПОДОБНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ПО А. ГРЕЮ

ПАВЕЛ КЛЕПИКОВ, ЕВГЕНИЙ РОДИОНОВ

В последнее время активно изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, например, эйнштейново-подобные (псевдо)римановы многообразия в смысле А. Грея [1].

Говорят, что (псевдо)риманово многообразие принадлежит к классу $\mathcal{A}$, если тензор Риччи является циклично параллельным

$$(\nabla_X r)(Y,Z) + (\nabla_Y r)(Z,X) + (\nabla_Z r)(X,Y) = 0$$

для любых векторных полей X, Y и Z.

(Псевдо)риманово многообразие принадлежит к классу $\mathcal{B}$, если тензор Риччи является тензором Кодацци, т.е.

$$(\nabla_X r)(Y,Z) = (\nabla_Y r)(X,Z)$$

для любых векторных полей X, Y и Z.

Многообразия, принадлежащие классу $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$, являются эйнштейново-подобными (псевдо)римановыми многообразиями по А. Грею [1].

В данной работе изучаются однородные (псевдо)римановы многообразия с эйнштейново-подобной метрикой в случае малой размерности, получена классификация таких многообразий в четырехмерном случае.

Список литературы

[1] A. Gray, *Einstein-like manifolds which are not Einstein* // Geom. Dedicata, **7**, 259–280 (1978).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
E-mail address: klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №16–01–00336А).

ОБ ИЗОТРОПНОСТИ ТЕНЗОРОВ ВЕЙЛЯ И СХОУТЕНА-ВЕЙЛЯ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

СВЕТЛАНА КЛЕПИКОВА, ОЛЕСЯ ХРОМОВА

Работы многих математиков посвящены изучению конформно плоских (псевдо)римановых многообразий, т.е. многообразий с тривиальным тензором Вейля. Кроме того, можно рассматривать многообразия, тензор Вейля (или тензор Схоутена-Вейля) которых имеет нулевой квадрат длины, а сам он не является нулевым. В этом случае такие многообразия называют многообразиями с изотропным тензором Вейля (или Схоутена-Вейля соответственно).

Отметим, что в случае римановой метрики квадрат длины тензора в некотором ортонормированном базисе представляет собой сумму квадратов всех компонент, и равен нулю только если сам тензор тривиален. Поэтому естественно рассматривать лишь случай псевдоримановой метрики.

В трехмерном случае тензор Вейля тривиален, и роль его аналога играет тензор Схоутена-Вейля. В работах Клепикова П.Н., Клепиковой С.В., Родионова Е.Д., Славского В.В., Хромовой О.П., Чибриковой Л.Н. была решена задача о классификации трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и изотропным тензором Схоутена-Вейля [1, 2].

Данная работа продолжает исследования в случае четырехмерных однородных псевдоримановых пространств с нетривиальной подгруппой изотропии. В ней получена классификация таких многообразий с изотропными тензорами Вейля и Схоутена-Вейля.

Список литературы

[1] Е. Д. Родионов, В. В. Славский, Л. Н. Чибрикова, *Левоинвариантные лоренцевы метрики на трехмерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля* // ДАН. Серия: Математика, **401**:4, 459–461 (2005).

[2] П. Н. Клепиков, С. В. Клепикова, Д. Н. Оскорбин и др., *Методы компьютерной математики в задачах геометрии и анализа*: монография // Под. ред. Е. Д. Родионова, Изд-во: АлтГУ, Барнаул, 2016.

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
E-mail address: klepikova.svetlana.math@gmail.com, khromova.olesya@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №16–01–00336А).

НОТОИДЫ И ИХ СВЯЗЬ С УЗЛАМИ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ

ФИЛИПП КОРАБЛЕВ, ЯНА МАЙ

Теория нотоидов была построена В. Тураевым в 2011 году. В работе [1] введены основные понятия этой теории. В работе [2] классифицированы узлы в утолщенном торе.

В докладе будет построено отображение поднятия, которое каждому нотоиду сопоставляет узел геометрической степени 1 в утолщенном торе, и будут рассмотрены основные свойства этого отображения.

Список литературы

[1] V. Turaev, *Knotoids* // Osaka J. Math., **49**:1 (2013), 195–223.

[2] A. Akimova, S. Matveev, *Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings* // J. Knot Theory Ramifications, **23**:6 (2014).

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: ykilyina@gmail.com

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-11-10291).

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГЕССЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЕЕ АНАЛОГИ

АНДРЕЙ КОСТИН

В работе рассматриваются интерпретации Гессе двумерных пространств постоянной кривизны и их аналоги в больших размерностях. В частности, интерпретация Гессе двумерного пространства единичной кривизны с индефинитной метрикой строится в многообразии пар точек проективной прямой.Если на проективной прямой ввести неоднородную координату,то индефинитная метрика в этом многообразии примет вид

$$ds^2 = \frac{4dudv}{u - v^2}.$$

Здесь u- неоднородная координата первой точки, v- неоднородная координата второй точки. Геодезические этой индефинитной метрики будут задаваться уравнениями

$$uv + a(u + v) = b,$$

где a, b- вещественные константы, а также

$$u + v = const.$$

Будут рассмотрены различные подходы к построению моделей трёхмерного пространства Лобачевского и его идеальной области в пространстве эрмитовых матриц, а также к истолкованию преобразований многообразий фигур этих пространств.

Список литературы

[1] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства* // М.: Наука, 1969.

Казанский федеральный университет, Елабужский институт, ул. Казанская, 89, Елабуга, 423604 , Россия

E-mail address: kostin_andrei@mail.ru

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ И ЦИКЛИЧЕСКИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ В ИДЕАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

НАТАЛЬЯ КОСТИНА, ЕВГЕНИЯ КОСТИНА

Существуют различные критерии вписанности треугольника и четырехугольника в окружность, эквидистанту или орицикл на плоскости Лобачевского. Эти критерии являются либо линейными (связывают длины отрезков), либо угловыми (связывают величины углов), либо смешанными. Часть этих критериев опубликована в научных или научно-популярных статьях [1], другие являются математическим фольклором. Мы рассмотрим аналогичные критерии вписанности в циклы в идеальной области [2] плоскости Лобачевского. Приведём один из критериев вписанности в орицикл для треугольника в идеальной области с радиусом кривизны R.

Теорема. *Треугольник, все стороны которого эллиптические, вписан в орицикл тогда и только тогда, когда для длин его сторон выполняется равенство*

$$sin\frac{a}{2R} + sin\frac{b}{2R} = sin\frac{c}{2R}.$$

Список литературы

[1] П. В. Бибиков, *Описанные циклические линии треугольника на плоскости Лобачевского* // Матем. просв., сер. 3, **13**, 142–148 (2009).

[2] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства* // М.: Наука, 1969.

Казанский федеральный университет, Елабужский институт, ул. Казанская, 89, Елабуга, 423604, Россия

E-mail address: natnikost@mail.ru, evgeniia.kostina@gmail.com

ГРАФ КРОНРОДА-РИБА КОНФОРМНО-ПЛОСКОГО СПЛАЙНА

МАРИЯ КУРКИНА, ОЛЬГА САМАРИНА, ВИКТОР СЛАВСКИЙ

Компактному выпуклому подмножеству $Q \subset H^3_\kappa$ в пространстве Лобачевского H^3_κ кривизны $(-\kappa)$, здесь κ – положительное число можно сопоставить конформно-плоскую метрику $ds^2 = \frac{dx^2}{h_Q{}^2(x)}$ – ограниченной одномерной секционной кривизны, где функция $h_Q \in C^{1,1}$ определена на единичной сфере $S^2 \subset R^3$ евклидова пространства R^3. В работе [1] функция $h_Q(x)$ называлась опорной функцией выпуклого множества Q.

Если функцию $h_Q(x) = h(x)$ рассматривать как сужение на сферу однородной функции определенной на всем R^3 (т. е. $h(\lambda x) = \lambda h(x)$, $\lambda > 0$), то одномерная секционная кривизна в направлении единичного касательного к сфере вектора ξ в точке $x \in S^2$ будет вычисляться формулой:

$$K_{1/2}(x,\xi) = h(x)\frac{d^2h}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla h|^2,$$

где вторая производная $\frac{d^2h}{d\xi^2}$ по направлению ξ и градиент функции ∇h в R^3 понимается в смысле производных Кларка [2]. Ограниченность одномерной секционной кривизны означает неравенство $|K_{1/2}(x,\xi)| \leq \frac{\kappa}{2}$ для всех точек $x \in S^2$ и всех касательных единичных векторов ξ в точке $x \in S^2$.

Теорема. *Пусть Q конечный выпуклый многогранник пространства Лобачевского в общем положении, тогда функция h_Q будет функцией Морса с конечным числом невырожденных особых точек определяемых строением многогранника Q.*

Следствие. *В условиях теоремы существует алгоритм автоматизированного построения дерева Кронрода-Риба функции h_Q [3].*

В работе найдены деревья Кронрода-Риба соответствующие конформно-плоским сплайнам на S^2 [1].

Список литературы

[1] М. Куркина, Е. Родионов, В. Славский, *Численные методы интерполяции для решения некоторых задач выпуклой геометрии в пространстве лобачевского* // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, **13**:1, 76–90 (2013).

[2] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*: пер. с англ., под ред. В. И. Благодатских. // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

[3] Ю. Жуков, *Алгоритм автоматизированного построения дерева Кронрода-Риба* // Навигация и гидрография, **38**, 44–50 (2014).

Югорский государственный университет, ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск, 628012, Россия

E-mail address: mavi@inbox.ru, samarina.ov@mail.ru, slavsky2004@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России: (код проекта 1148), Российского фонда фундаментальных исследований (№№ проектов: 15-41-00092-r-Urals, 15-41-00063-r-Urals, 15-01-06582-a, 16-01-00336-a).

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ ДВУХ МНОЖЕСТВ

ВЛАДИМИР КЫРОВ, ГЕННАДИЙ МИХАЙЛИЧЕНКО

В работе [1] дается определение однометрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств (ФС ГДМ) ранга $(n+1, m+1)$, которая задается дифференцируемой невырожденной метрической функцией с открытой и плотной в $R^m \times R^n$ областью определения:

$$f : R^m \times R^n \to R,$$

а также выполняется аксиома феноменологической симметрии: справедлива функциональная связь

$$\Phi(f(\mu_1, \nu_1), f(\mu_1, \nu_2), \ldots, f(\mu_{n+1}, \nu_{m+1})) = 0,$$

для открытого и плотного подмножества кортежей $\langle \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \mu_{n+1}; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \nu_{m+1} \rangle$ длины $n+m+2$ из окрестности $V(\langle \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \mu_{n+1}; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \nu_{m+1} \rangle) \subset R^{m(n+1)} \times R^{n(m+1)}$. Функция Φ — дифференцируемая и $\mathrm{rang}\Phi = 1$. Точки из первого множества обозначаются $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, а точки из второго множества — $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots$

В координатах метрическая функция ФС ГДМ ранга $(n+1, m+1)$ задается так:

$$f(\mu, \nu) = f(x^1(\mu), \ldots, x^m(\mu), \xi^1(\nu), \ldots, \xi^n(\nu)),$$

где $(x^1(\mu), \ldots, x^m(\mu))$ — координаты точки $\mu \in R^m$, а $(\xi^1(\nu), \ldots, \xi^n(\nu))$ — координаты точки $\nu \in R^n$.

Важной задачей является классификация ФС ГДМ. Нас интересуют следующие:

ФС ГДМ ранга (2,2):

$$f(\mu, \nu) = x(\mu)\xi(\nu); \tag{1}$$

ФС ГДМ ранга (3,2):

$$f(\mu, \nu) = x(\mu)\xi(\nu) + \eta(\nu); \tag{2}$$

ФС ГДМ ранга $(3,3)$:

$$f(\mu, \nu) = x(\mu)\xi(\nu) + y(\mu)\eta(\nu); \tag{3}$$

$$f(\mu, \nu) = x(\mu)\xi(\nu) + y(\mu) + \eta(\nu). \tag{4}$$

В данных тезисах говорится о комплексификации однометрических ФС ГДМ гиперкомплексными числами различного ранга: два, три, четыре и т.д. В результате комплексификации получаются метрические функции s-метрических ФС ГДМ [2]. Произвольное гиперкомплексное число имеет вид: $x = x^0 i_0 + x^1 i_1 + \cdots + x^n i_n$, где $x^0, x^1, \ldots, x^n \in R$, $i_0 = 1$, $i_1, \ldots, i_n$ — мнимые единицы. Сложение, умножение на действительное число определяются покомпонентно, а произведение записываются следующим образом: $xy = \sum_{k,l=0}^{n} x^k y^l i_k i_l$. Произведение мнимых единиц $i_k i_l$ и определяется специальной таблицей умножения.

Проведем комплексификацию метрических функций (1) — (4), переходя к соответствующим гиперкомплексным функциям и координатам, полагая

$$f_{\text{к}} = \sum_{j=0}^{n} f^j i_j,\ x = \sum_{j=0}^{n} x^j i_j,\ y = \sum_{j=0}^{n} y^j i_j,\ \xi = \sum_{j=0}^{n} \xi^j i_j,\ \eta = \sum_{j=0}^{n} \eta^j i_j.$$

Тогда комплексифицированные метрические функции будут иметь вид:

ФС ГДМ ранга (2,2):

$$f_{\text{к}}(\mu, \nu) = x(\mu)\xi(\nu); \tag{1'}$$

ФС ГДМ ранга (3,2):

$$f_{\text{к}}(\mu, \nu) = x(\mu)\xi(\nu) + \eta(\nu); \tag{2'}$$

ФС ГДМ ранга $(3,3)$:

$$f_{\text{к}}(\mu, \nu) = x(\mu)\xi(\nu) + y(\mu)\eta(\nu); \tag{3'}$$

$$f_{\text{к}}(\mu,\nu) = x(\mu)\xi(\nu) + y(\mu) + \eta(\nu). \tag{4'}$$

Можно найти группы движений для комплексифицированных ФС ГДМ, то есть множество преобразований, сохраняющих функцию $f_{\text{к}}(\mu,\nu)$.

Теорема. *Группы движений комплексифицированных ФС ГДМ рангов* $(2,2)$, $(3,2)$ *и* $(3,3)$ *с метрическими функциями* $(1')$ — $(4')$ *задаются уравнениями:*
ФС ГДМ ранга (2,2):

$$x' = xa,\ \xi' = a^{-1}\xi;$$

ФС ГДМ ранга (3,2):

$$x' = xa + b,\ \xi' = a^{-1}\xi,\ \eta' = \eta - ba^{-1}\xi;$$

ФС ГДМ ранга (3,3):
первое решение

$$X' = XA,\ \Xi' = A^{-1}\Xi,$$

где $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}, \Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix};$
второе решение

$$x' = xa + b,\ y' = y + xc + d,\ \xi' = a^{-1}(\xi - c),\ \eta' = \eta - ba^{-1}(\xi - c) - d.$$

Заметим, что здесь все элементы являются гиперкомплексными числами.

Можно записать также функциональные связи:

ФС ГДМ ранга (2,2):

$$f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1)f_{\text{к}}^{-1}(\mu_2,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2)f_{\text{к}}^{-1}(\mu_2,\nu_2) = 0;$$

ФС ГДМ ранга (3,2):

$$\begin{gathered}(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_1))(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_1))^{-1} - \\ -(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_2))(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_2))^{-1} = 0;\end{gathered}$$

ФС ГДМ ранга (3,2):
первое решение:

$$F_{\text{к}}(\mu_1,\mu_2;\nu_1,\nu_2)F_{\text{к}}^{-1}(\mu_1,\mu_3;\nu_1,\nu_2) = F_{\text{к}}(\mu_1,\mu_2;\nu_1,\nu_3)F_{\text{к}}^{-1}(\mu_1,\mu_3;\nu_1,\nu_3),$$

где матрица $F_{\text{к}}(\mu_1,\mu_2;\nu_1,\nu_2) = \begin{pmatrix} f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) & f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2) \\ f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_1) & f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_2) \end{pmatrix};$
второе решение:

$$\begin{gathered}[(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_3)) - (f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_3))]\times \\ \times[(f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_3)) - (f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_1) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_3))]^{-1} = \\ = [(f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_1,\nu_3)) - (f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_3))]\times \\ \times[(f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_2,\nu_3)) - (f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_2) - f_{\text{к}}(\mu_3,\nu_3))]^{-1}.\end{gathered}$$

Список литературы

[1] Г. Г. Михайличенко, *Математические основы и результаты теории физических структур* // Горно-Алтайск, 2016.

[2] Г. Г. Михайличенко, В. А. Кыров, *Гиперкомплексные числа в некоторых геометриях двух множеств. I* // Изв. вузов. Матем., **7**, 19–29 (2017).

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

E-mail address: `kyrovVA@yandex.ru`

E-mail address: `mikhailichenko@gasu.ru`

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ИНВАРИАНТЫ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

СЕРГЕЙ МАТВЕЕВ, ВЛАДИМИР ТУРАЕВ

В 2015 году С. В. Матвеев и В. Г. Тураев предложили явные формулы для вычисления DW-инвариантов над полем $\mathbb{Z}_2$ для трехмерных многообразий. В докладе будет рассказано о вычислении таких инвариантов над любым полем $\mathbb{Z}_n$, где n — простое число.

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: svmatveev@gmail.com

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10291.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТАБУЛИРОВАННЫХ УЗЛОВ В УТОЛЩЁННОЙ БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА

ЛИЛИЯ НАБЕЕВА

На протяжение последних лет активно развивается теория узлов в трехмерных многообразиях отличных от трехмерной сферы. Например, в таких многообразиях, как проективном пространстве [1], линзовых пространствах [2], полном торе [3], в утолщенном торе [4] и в утолщенной бутылке Клейна [5].

Утолщенной бутылкой Клейна называется ориентируемое косое произведение $K\tilde{\times}I$ бутылки Клейна K на отрезок I. Под узлом в $K\tilde{\times}I$ понимается произвольная простая замкнутая кривая, лежащая в утолщенной бутылке Клейна. Два узла называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм многообразия $K\tilde{\times}I$ на себя, переводящий узел в узел.

В статье [5] были табулированы существенные узлы в утолщенной бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трех перекрестков. На первом шаге табулирования таких узлов был получен полный список (возможно с дубликатами), состоящий из 33 диаграмм узлов. На втором шаге с помощью обобщения полинома Кауффмана на случай узлов в утолщенной бутылке Клейна было доказано, что 28 диаграмм задают 28 различных узлов.

В данной работе будет доказано, что оставшиеся 5 диаграмм являются дубликатами пяти из 28 выше упомянутых узлов. Узлы с номерами 3_6, 3_9, 3_{20} эквивалентны узлам с номерами 3_7, 3_{21}, 3_{25}, соответственно и узлы 3_{23}, 3_{26} эквивалентны узлу 3_{23}.

Список литературы

[1] J. Drobotukhina, *Classification of Links in RP^3 with at Most Six Crossings* // Adv. Math., **18** (1994), 87–121.

[2] M. Manfredi, M. Mulazzani, *On knots and links spaces* // Вестник ЧелГУ, Математика. Механика. Информатика, **3** (2015), 118–134.

[3] B. Gabrovsek, M. Mroczkowski, *Knots in the solid torus up to 6 crossings* // J. Knot Theory Ramifications, **21**:11 (2012), 1250106–1250148.

[4] A.A. Akimova, S.V. Matveev, *Classification of Knots of Small Complexity in Thickened Toti* // J. Math. Sci., **202**:1 (2014), 1–12.

[5] S.V. Matveev, L.R. Nabeeva, *Tabulating knots in the thickened Klein Bottle* // Sib. Math. J., **57**:3 (2016), 542–548.

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: liya.nabeyeva@yandex.ru

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10291).

О СОЛИТОНАХ РИЧЧИ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ К-СИММЕТРИЧЕСКИХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

ДМИТРИЙ ОСКОРБИН, ЕВГЕНИЙ РОДИОНОВ, ИГОРЬ ЭРНСТ

Важным обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях являются солитоны Риччи Задача нахождения солитонов Риччи является достаточно сложной, поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на размерность, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи. Одним из важных примеров такого рода ограничений являются многообразия Уокера, то есть псевдоримановы многообразия, допускающие гладкое параллельное (в смысле связности Леви-Чивита) распределение изотропных векторов. Геометрия многообразий Уокера, а также солитоны Риччи на них исследовались в работах многих математиков.

В настоящей работе рассмотрено уравнение солитона Риччи на некоторых лоренцевых многообразиях Уокера. К числу таких многообразий относятся неразложимые 2- и 3- симметрические лоренцевы многообразия, которые были исследованы Д.В. Алексеевским, А.С. Галаевым. К. Онда и В. Батат исследовали солитоны Риччи на четырёхмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях и доказали локальную разрешимость уравнения солитона Риччи на таких многообразиях. Позднее авторами была доказана разрешимость уравнения солитона Риччи на 2- и 3- симметрических лоренцевых многообразиях произвольной размерности. В данной работе исследуется общее решение уравнения солитона Риччи на 2- и 3- симметрических четырехмерных лоренцевых многообразиях.

Список литературы

[1] D. Alekseevsky, A. Galaev *Two-symmetric Lorentzian manifolds* // J. Geom. Phys., **61**:12, 2331–2340 (2011).

[2] W. Batat, K. Onda K. *Ricci and Yamabe solitons on second-order symmetric, and plane wave 4-dimensional Lorentzian manifolds* // J. Geom., **105**:3, 561–575 (2014).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
E-mail address: oskorbin@yandex.ru

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭНИКИ

ИРИНА ПОЛИКАНОВА

В связи с изучением линий с аффинно-эквивалентными дугами в n-мерном вещественно-комплексном аффинном пространстве A^n [1]-[4], автор выяснил, что свойством аффинной эквивалентности дуг обладают линии, задаваемые в некоторой аффинной системе координат (сокращённо АСК) параметризацией:

$$\vec{r} = (u, u^2, u^3, ..., u^n), \quad u \in I, \tag{1}$$

где I – числовой промежуток. Имея целью доказать гипотезу о единственности (с точностью до аффинной эквивалентности) линии (1) в классе невырожденных полных линий с аффинно-эквивалентными дугами, мы решили приглядеться к ней пристальней. Поскольку наименование её нам не встречалась, предлагаем назвать её *эникой* от $n-ica$ по аналогии с кубикой (для $n = 3$). Назовём АСК *канонической*, если в ней эника γ_n задаётся *канонической параметризацией*

$$\vec{r} = \left(u, \frac{u^2}{2!}, \frac{u^3}{3!}, ..., \frac{u^n}{n!}\right), \quad u \in I. \tag{2}$$

Алгебраические свойства эники

1. Эника – невырожденная полиномиальная линия степени n, т. е. не содержащаяся в гиперплоскости и задаваемая параметризацией вида $\vec{r} = \vec{r}(u) = (f_1(u), ..., f_n(u))$, где $f_1(u)$,...,$f_n(u)$ – многочлены от параметра $u \in I$, наивысшая степень которых равна n. И, наоборот, невырожденная полиномиальная линия степени n в A^n есть эника.

2. Эника не имеет точек уплощения.

3. Всякая k-мерная плоскость пересекает энику не более, чем в $k+1$ точках с учётом их кратности. k-мерная соприкасающаяся плоскость к энике пересекает её в единственной точке (кратности $k+1$).

4. При $2 \leq k \leq n+1$ всякие k точек эники линейно независимы.

5. Эника однозначно определяется набором из n^2+1 точек, ей принадлежащих.

6. Линия, окрестность каждой точки которой является эникой, сама есть эника.

7. Центры масс множеств точек пересечения эники с любым семейством параллельных гиперплоскостей, пересекающих энику в точках, сумма кратностей которых равна n, лежат на прямых одного и того же направления, которое назовём *асимптотическим.* Асимптотическое направление у эники единственно.

8. Всякая k-мерная плоскость параллельная асимптотическому направлению пересекает энику не более, чем в k точках, с учётом их кратности. В частности, прямая асимптотического направления пересекает энику не более, чем в одной точке.

9. Соприкасающиеся плоскости (любых размерностей) в разных точках эники не параллельны и не совпадают.

10. Прямая асимптотического направления не параллельна соприкасающимся гиперплоскостям эники ни в одной точке.

11. Для любой точки эники существует каноническая АСК с началом в этой точке. Если

$$I = \{O; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} \quad \text{и} \quad II = \{O; \vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$$

– две канонические АСК, то найдётся действительное число λ такое, что $\vec{a}_i = \lambda^{\frac{i}{n}}\vec{e}_i$, $i = 1, ..., n$, а параметры u и v соответственно первой и второй канонических параметризаций связаны соотношением: $u = \lambda^{\frac{1}{n}}v$. Причём, последние векторы $\vec{e}_n$ и $\vec{a}_n$ всегда имеют асимптотическое направление. Если фиксировать во всех канонических АСК последний вектор, то для каждой точки эники существует единственная каноническая АСК с началом в этой точке.

12. В случае задания эники γ_n канонической параметризацией (2) АСК

$$\left\{M(t); \vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), ..., \vec{r}^{(n)}(t)\right\}$$

будет канонической, непрерывно меняющейся от точки к точке.

13. Проекция эники γ_n, вдоль $(n-k)$-мерной координатной плоскости $O_{x_{k+1}\dots x_n}$ канонической АСК на k-ую соприкасающуюся плоскость в точке O есть эника γ_k. Это отображение проектирования γ_n на γ_k является гомеоморфизмом.

14. k-мерные плоскости при $k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, параллельные координатной плоскости $O_{x_1 x_3 \dots}$, проходящей через все оси с нечётными номерами канонической АСК $O_{x_1\dots x_n}$, пересекают энику γ_n либо в двух точках, либо не пересекают вовсе. При этом центры масс этих пар точек лежат на энике γ_{n-k} в координатной плоскости $O_{x_2 x_4 \dots x_{2(n-k)}}$.

Заметим, что, как следует из [5, pr. 6.1], определённый выше канонический базис совпадает с экви-аффинным базисом, предложенным D. Davis для изучения аффинных кривых.

Список литературы

[1] И. Поликанова, *Об аффинной эквивалентности параболических дуг* // Сб. науч. ст. междунар. конф. "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования", Барнаул, 344–346 (2014).

[2] И. Поликанова, *О линиях в n-мерном аффинном пространстве с аффинно-эквивалентными дугами* // МАК-2015: "Математики - Алтайскому краю": сб. труд. всеросс. конф. по матем., Барнаул: Изд-во Алт.ун-та, 34–38 (2015).

[3] И. Поликанова, *Некоторые свойства линий с аффинно-эквивалентными дугами* // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст., вып. 2. – Изд-во Алт. ун-та, 55–61 (2016).

[4] I. Polikanova, *Curves with affine-congruent arcs* // Междунар. конф. "Геометрический анализ и теория управления". Тезисы докладов. Новосибирск: ИМ СО РАН, 106 (2016).

[5] D. Davis, *Generic affine differential geometry of curves in R^n* // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A, 1195–1205 (2006).

Алтайский государственный педагогический университет, пр. Социалистический, 126, Барнаул, 656015, Россия

E-mail address: Anirix1@yandex.ru

О СЛОЖНОСТИ 3-МНОГООБРАЗИЙ

ЕВГЕНИЙ ФОМИНЫХ

В докладе будет дан обзор последних результатов по установлению точных значений и нахождению двусторонних оценок сложности трехмерных многообразий.

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: efominykh@gmail.com

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10291).

ГОМОТОПИЧЕСКИ ПОЛНОЦЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. МЕТРИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

ПАВЕЛ ЧЕРНИКОВ

Топологическое пространство, гомотопически эквивалентное некоторому CW-комплексу, называется *гомотопически полноценным пространством* [1, 2]. Приведем описание метрических гомотопически полноценных пространств.

В [3] определяется понятие абсолютного окрестностного h-ретракта в классе $\mathcal{M}$ всех метрических пространств.

Сформулируем это определение. Замкнутое подмножество A метрического пространства X называется *окрестностным h-ретрактом X*, если существуют окрестность U множества A в X и такое непрерывное отображение $r : U \to A$, что $r|A \simeq \mathrm{id}_A$.

Метрическое пространство Y называется *абсолютным окрестностным h-ретрактом*, если всякое замкнутое подмножество A любого метрического пространства X, гомеоморфное Y, является окрестностным h-ретрактом X.

Совокупность всех абсолютных окрестностных h-ретрактов обозначим через $ANHR(\mathcal{M})$.

Теорема. *Метрическое пространство Y принадлежит $ANHR(\mathcal{M})$ в том и только том случае, когда Y гомотопически эквивалентно некоторому CW-комплексу.*

Случай бикомпактных топологических пространств рассмотрен в [4].

Список литературы

[1] J. W Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex* // Trans. Amer. Math. Soc., **90**:2, 272–280 (1959).

[2] М. М. Постников *Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств* // М.: Наука, 1985.

[3] П. В. Черников, *Приближение измеримых отображений и ретракты* // М., Деп. в ВИНИТИ, № 2453-В90, 1990.

[4] П. В. Черников, *Бикомпактное пространство гомотопически полноценно тогда и только тогда, когда оно есть абсолютный окрестностный h-ретракт* // Мат. заметки, **79**:2, 309–310 (2006).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ТОРА

МИРА ЧЕШКОВА

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность переноса M [1, с. 315]

$$r(u,v) = U(u) + V(v), \quad u \in [-\pi,\pi], v \in [-\pi,\pi], \tag{1}$$

где $U(u), V(v)$ — 2π-периодические вектор-функции, причем кривые $U(u), V(v)$ не принадлежат одной плоскости и не вырождаются в отрезки прямых.

Положим

$$U(u) = (0, \cos(u), \sin(u)), \quad V(v) = (\cos(v), \sin(v), 0). \tag{2}$$

Кривые (2) есть окружности. Поверхность переноса (1) имеет вид

$$r(u,v) = (\cos(v), \sin(v) + \cos(u), \sin(u)), \quad u \in [-\pi,\pi], v \in [-\pi,\pi].$$

Теорема 1. *Формула (1) определяет модель тора.*

Действительно,

$$r(-\pi,v) = U(-\pi) + V(v) = U(-\pi + 2\pi) + V(v) = r(\pi,v),$$
$$r(u,-\pi) = U(u) + V(-\pi) = U(u) + V(-\pi + 2\pi) = r(u,\pi).$$

Имеем склейку противоположных сторон прямоугольника $u \in [-\pi,\pi], v \in [-\pi,\pi]$ по точкам, лежащим на общей горизонтали, и, одновременно, склейку по точкам, лежащим на общей вертикали [2, с. 75].

Исследуем характер точек на поверхности M. Гауссова кривизна K равна

$$K = \frac{\sin(v)\cos(u)}{g^2}, \quad g = 1 - \sin(u)^2\cos(v)^2.$$

Для параболических точек

$$\sin(v)\cos(u) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) определяет четыре окружности

$$S_1 : r = r(u,0), \quad S_2 : r = r(u,\pi), \quad S_3 : r = r(\pi/2, v), \quad S_4 : r = r(-\pi/2, v).$$

Точки касания этих окружностей есть особые точки. Для них $g = 0$.

Постороим параболические, эллиптические и гиперболические точки поверхности M (рис. 1).

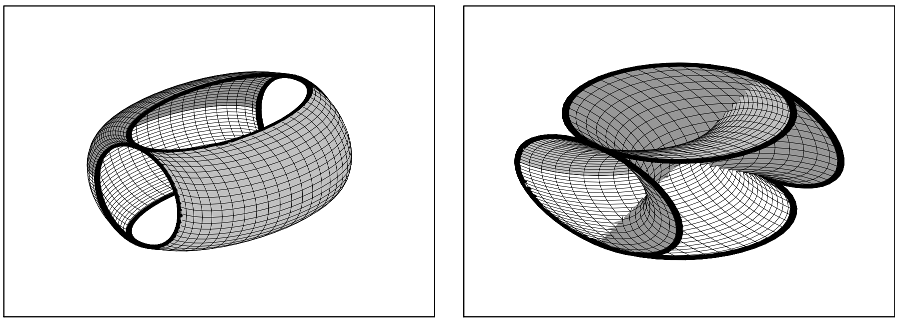


Рис. 1. Параболические и эллиптические точки, параболические и гиперболические точки поверхности M

Теорема 2. *Пусть вектор-функции* $r_1 = r_1(u, v), r_2 = r_2(u, v)$ *определяют модели тора. Тогда вектор-функции*

$$r_t = tr_1(u, v) + (1 - t)r_2(u, v), t \in [0, 1], u \in [-\pi, \pi], v \in [-\pi, \pi] \tag{4}$$

также определяют модели тора.

Рассмотрим классический тор T:

$$r_2(u, v) = (2 + \cos(u))(\cos(v), \sin(v), 0) + \sin(u)(0, 0, 1)$$

и гомотопию (4) [2, с. 148], где $r_1 = r_1(u, v)$ — тор M. Построим ее (рис. 2), полагая $t = 0, t = 1/2, t = 3/4, t = 1$.

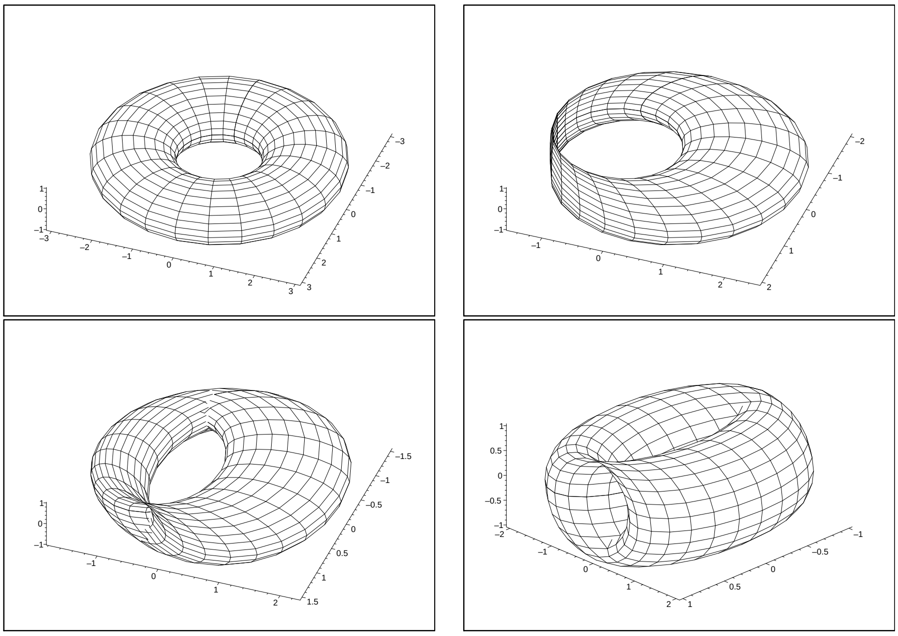


Рис. 2. Гомотопия $r_t = r_t(u, v)$

Рассмотрим инверсию [3, с. 482] $r^* - r_0 = \frac{m^2(r-r_0)}{<r-r_0,r-r_0>}$ относительно сферы радиуса m с центром r_0.

Теорема 3. *Если тор не проходит через центр инверсии, то инверсия тора есть тор.*

Построим тор T (темный) и его инверсию для $r_0 = (2, 0, 0), m = 2$, тор M (темный) и его инверсию для $r_0 = (2, 0, 2), m = 4$ (рис. 3).

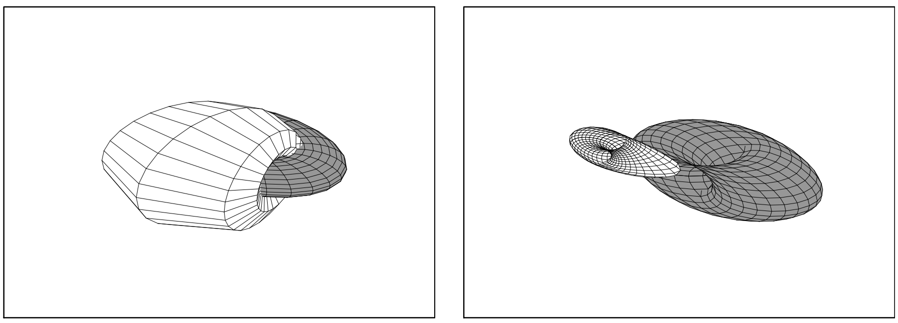


Рис. 3. Инверсия торов

Список литературы

[1] С. Н. Кривошапко, В. Н. Иванов, С. М. Халаби *Аналитические поверхности* // М., 2006.

[2] Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко *Введение в топологию* // М., 1995.

[3] Б. А. Розенфельд *Многомерные пространства* // М., 1966

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия

E-mail address: `cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru`

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМАЛЬНОСТИ СПЕЦИАЛЬНЫХ СПАЙНОВ С ТРЕМЯ 2-КОМПОНЕНТАМИ

ЕКАТЕРИНА ШУМАКОВА

В работе [1] найдены точные значениях сложности виртуальных многообразий, задаваемых специальными полиэдрами с одной или двумя 2-компонентами. В докладе будут представлены достаточные условия минимальности специальных спайнов с тремя 2-компонентами и приведены примеры бесконечных серий таких спайнов. Работа выполнена совместно с Е. А. Фоминых

Список литературы

[1] А. Ю. Веснин, В. Г. Тураев, Е. А. Фоминых, *Сложность виртуальных трехмерных многообразий* // Матем. сб., **207**:11, 4–24 (2016).

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: shumakova_kate@mail.ru

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10291).

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ТРЕХМЕРНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ КАРТ

ТАМАРА ШУШУЕВА

Автор работы [1] определяет понятие n-мерной комбинаторной карты и связанные с ним понятия и свойства, такие как клетки, границы, двойственность и другие, используя их в геометрическом моделировании. В нашей работе мы имеем немного другой подход к трактовке понятия трехмерной комбинаторной карты (или 3-карты), что позволяет выяснить связь с накрытиями и использовать его в дальнейшем для подсчета карт. Также приводим примеры 3-карт и некоторые наблюдения и замечания.

Пусть Σ — клеточное разбиение трехмерного замкнутого ориентированного многообразия M, а Σ' — его барицентрическое подразбиение. Поскольку M ориентированное, то существует «шахматная» раскраска в черный и белый цвет тетраэдров из Σ'. Обозначим через $F^{\pm}$ и F множество всех окрашенных тетраэдров и множество только черных тетраэдров соответственно. Пусть A, B, C, D вершины одного из тетраэдров из F, и также будем называть отражения в соответствующих его гранях. Тогда элементы $a = AC$, $b = AD$, $c = BD$ есть повороты второго порядка, отправляющие черный (белый) тетраэдр в черный (белый). Пусть $\Delta = \langle A, B, C, D\rangle$ группа, порожденная отражениями A, B, C, D. Обозначим через Δ^+ подгруппу индекса 2 в Δ, порожденную элементами a, b, c. Группа Δ действует на $F^{\pm}$, в то время как Δ^+ действует на F. Поэтому мы получаем два гомоморфизма $\varphi\colon \Delta \to Sym(F^{\pm})$ and $\varphi^+\colon \Delta^+ \to Sym(F)$.

Определение. *Трехмерная комбинаторная карта (или 3-карта) это набор $(F; a, b, c)$ со следующими свойствами:*
1° *F — конечное множество флагов;*
2° *a, b, c — инволюции, действующие без неподвижных точек свободно на F;*
3° *Группа Δ^+ транзитивна на множестве F;*
4° *Орбиты перестановки ab являются ребрами, bc — гранями, $\langle a, bc\rangle$ — клетками и $\langle ab, c\rangle$ — вершинами трехмерной карты.*

Данное определение мы иллюстрируем следующими примерами: «pillow» с 4 помеченными вершинами, «shell» с 2 помеченными вершинами, конус с 3 помеченными вершинами, четырехугольная грань с 4 помеченными вершинами и другие.

Замечание. *С помощью метода Рейдемейстера-Шрайера можно показать, что группа Δ^+ свободно порождена инволюциями a, b, c.* Следовательно в определении 3-карты можно заменить их образами $\varphi^+(a)$, $\varphi^+(b)$, $\varphi^+(c)$.

Справедливо следующее утверждение:

Предложение. *Существует взаимно-однозначное соответствие между орбитами на $F^{\pm}$ и элементами 3-карты: при этом орбиты $\langle A, B\rangle$ соответствуют граням, $\langle C, D\rangle$ — ребрам, $\langle A, B, C\rangle$ — клеткам, а $\langle B, C, D\rangle$ — вершинам 3-карты.*

Список литературы

[1] P. Lienhardt, *N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds* // Int. J. Comput. Geom. Appl., **6**:3, 275–324 (1994).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: talavshuk@yandex.ru

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-41-02006).

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2017»,

20–23 сентября 2017 года

Подписано в печать 15.08.2017 Формат 60×84 1/8

Усл. печ. л. 6,71. Уч.-изд. л. 4,3. Тираж 100 экз. Заказ 276

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Отпечатано в ООО «Дигит Про»
г. Новосибирск, ул. Журинская, 78, 2 этаж
Тел. +7 (383) 201-49-82