РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2018»,

19–22 сентября 2018 года

Новосибирск, 2018

УДК 514: 515.1: 517.518: 517.54: 517.938: 517.958

ББК 22.15

Д 548

ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2018: Тезисы Международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2018. — 80 с.

ISBN 978-5-86134-220-9

Настоящее издание содержит тезисы докладов Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске–2018», 19–22 сентября 2018 г. Конференцию проводит Лаборатория топологии и динамики Новосибирского национального исследовательского государственного университета и Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Основная тематика докладов относится к следующим актуальным направлениям современной математики: дифференциальной геометрии, геометрии и топологии трехмерных многообразий, теории интегрируемых систем, квазиконформному анализу и функциональным пространствам, приложениям геометрии и топологии.

Сборник представляет интерес для научных работников и аспирантов, интересующихся современными проблемами геометрии, топологии и анализа.

Конференция и издание сборника поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект 18-01-20069 Г) и грантом Правительства РФ (Договор №14.Y26.31.0025 от 01.02.2018).

Редакторы: И. А. Тайманов, А. Ю. Веснин, Н. В. Абросимов

GEOMETRY DAYS IN NOVOSIBIRSK–2018: Abstracts of the International Conference. Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2018. — 80 p.

Editors: I. A. Taimanov, A. Yu. Vesnin, N. V. Abrosimov

$$Д \frac{1602050000 - 1}{Я82(03) - 2018}$$

ISBN 978-5-86134-220-9

Содержание

Abrosimov N. V., Vuong H. B. *On the volume of a compact hyperbolic antiprism* 5

Akimova A. A. *Classification of prime links in the thickened torus* 7

Alexandrov V. A. *Why there is no existence theorem for a convex polytope with prescribed directions and perimeters of the faces?* 8

Daurtseva N. A. *About cohomogeneity one almost complex structures on the* $S^2 \times S^4$ 9

Dynnikov I. A.*Dynamics related to the Rauzy gasket* 10

Gichev V. M. *Fluctuations of random polynomials on compact isotropy irreducible homogeneous spaces* 11

Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S. *On cycles of some dynamical systems with piecewise smooth trajectories* 12

Greshnov A. V. *Some topological properties of* f*-quasimetric spaces* 14

Gutman A. E. *Archimedean and directionally closed cones* 15

Kamalutdinov K. G. *General position theorem for self-similar fractals and it's applications* . 16

Karmanova M. B. *Minimal graph surfaces on two-step Carnot groups* 17

Kauffman L. H. *Vortex Reconnection and Concordance of Knots* 19

Kopylov A. P. *On unique determination of conformal type for domains in Euclidean spaces* . 20

Kopylov Ya. A. *The Rao–Reiter criterion for the amenability of homogeneous spaces* 21

Kordyukov Yu. A. *Laplacians on smooth distributions* 22

Lopes P. *Quandles of cyclic type with several fixed points* 23

Malyutin A. V. *Hyperbolic links are not generic* 24

Millionshchikov D. V. *Positively graded narrow Lie superalgebras* 25

Novikov R. G. *Moutard transformations for generalized analytic functions* 26

Sharygin G. I. *Cohomological obstructions for the deformation quantization of commutative families* 27

Shevchenko Yu. I., Skrydlova E. V. *Interpretation of classical affine connection by means Laptev affine connection* 28

Tetenov A. V. *Topological self-similar dendrites generated by m-sprouts* 29

Tripathi M. M. *Complex Golden Differential Geometry* 31

Андреев П. Д. *Об аксиоматическом построении сингулярной финслеровой геометрии* . 32

Банару М. Б. *О гиперповерхностях с типовыми числами 0 и 1 почти эрмитовых многообразий малых классов Грея–Хервеллы* 34

Банару М. Б., Банару Г. А. *О шестимерных приближенно келеровых многообразиях* . . 36

Белова О. О. *Об аналоге связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей с одноиндексными базисно-слоевыми формами* 37

Берестовский В. Н. *О R-дереве Урысона* 38

Богданова Р. А., Михайличенко Г. Г. *Последовательное по рангу* $\boldsymbol{(n+1,2)}$ *вложение двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств* 40

Букушева А. В. *Кораспределения би-метрических многообразий с продолженной метрикой* 44

Воронин А. Ф. *Обобщенная краевая задача Римана* 46

Галаев С. В. *О геометрии пространства расслоения допустимых ортонормированных реперов* 48

Ильин В. П. *Об интегрированном вычислительном окружении геометрического моделирования* 49

Качуровский А. Г. *Суммы Фейера периодических мер и эргодическая теорема фон Неймана* 50

Клепиков П. Н., Родионов Е. Д. *Об алгебраических солитонах Риччи на 4-мерных локально однородных псевдоримановых многообразиях с изотропным тензором Вейля* 51

Клепикова С. В., Хромова О. П. *О вычислении тензора Вейля на 4-мерных локально однородных лоренцевых многообразиях* 52

Костин А. В. *Обобщенно выпуклые множества и задача о тени в гиперболическом пространстве* 53

Костина Е. А., Костина Н. Н. *Асимптотические оценки метрических характеристик многогранников в n-мерном гиперболическом пространстве* 54

Краснов В. А. *Об объеме гиперболического 4-симплекса* 55

Кулешов А. В. *Об одном эффективном действии группы $GL(n)$ на пространстве классов проективных реперов* 56

Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В. *Выпуклый анализ и аналог неравенства Юнга-Фенхеля для конформно-плоских метрик* 58

Кыров В. А. *Решение задачи вложения для евклидовых многомерных геометрий* 59

Левичев А. В., Пальянов А. Ю. *Минимальная $U(3)$-целочисленность и заряды кварков* 61

Морозов В. В. *К перечислению глобальных узлов и зацеплений* 62

Овчинников М. А. *Обобщение глобальных узлов Миядзаки $\mathcal{R}$ и $\mathcal{U}$ и их свойства* 63

Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д., Эрнст И. В. *Поля Киллинга и солитоны Риччи на к – симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности* 64

Романов А. С. *Квазиметрики и мера, пространства соболевского типа* 65

Романовский Н. Н. *Дифференциальные уравнения на метрических пространствах* 66

Сабитов И. Х. *О кратности корней многочлена объема многогранника* 68

Скурихин Е. Е. *Полугруппы эндоморфизмов категорных топологических пространств* 70

Султанов А. Я. *О группах аффинных преобразований непроективно-плоских пространств с линейной связностью* 72

Трямкин М. В. *Внутренняя геометрия поверхности в группе полуаффинных преобразований евклидовой плоскости* 74

Черников П. В. *Обобщение некоторых геометрических утверждений, связанных с сенсорными сетями* 75

Чуешев А. В., Чуешев В. В. *Дифференциалы Прима третьего рода на римановой поверхности конечного типа* 76

Чуешева Н. А. *Несколько примеров неединственности решений для двух нелинейных дифференциальных уравнений* 78

ON THE VOLUME OF A COMPACT HYPERBOLIC ANTIPRISM

NIKOLAY ABROSIMOV[1], VUONG HUU BAO[2]

We consider a compact hyperbolic antiprism. It is a convex polyhedron with $2n$ vertices in $\mathbb{H}^3$ which has a symmetry group S_{2n} generated by a mirror-rotational symmetry of order $2n$, i.e. rotation to the angle π/n followed by a reflection (see Fig. 1).

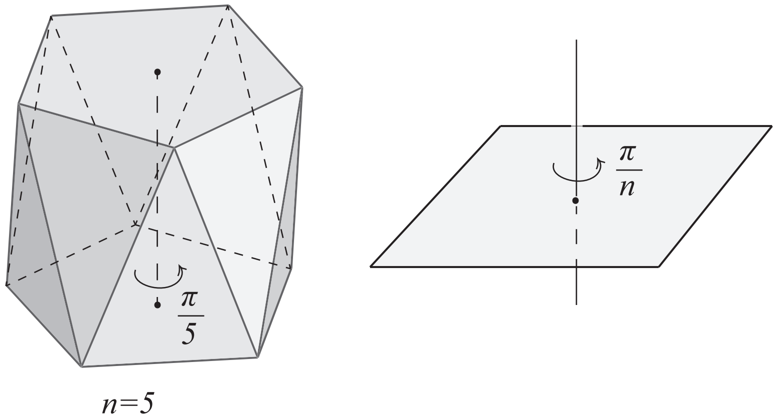


FIGURE 1. The symmetry of an antiprism.

We establish necessary and sufficient conditions for the existence of such polyhedra in hyperbolic space $\mathbb{H}^3$.

Theorem 1. *A compact hyperbolic antiprism with $2n$ vertices and edge lengths a, c having a symmetry group S_{2n} is exist if and only if*

$$1 + \cosh a - 2\cosh c + 2\,(1 - \cosh c)\cos\frac{\pi}{n} < 0.$$

Then we find relations between their dihedral angles and edge lengths in the form of a cosine rule.

Theorem 2. *The dihedral angles A, C and the edge lengths a, c of a compact hyperbolic antiprism with $2n$ vertices are related by the equalities*

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{-\sqrt{\cosh a - 1}\left(1 + \cosh a - 2\cosh c\,\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{2(1 + \cosh a - 2\cosh^2 c)(\cos\frac{2\pi}{n} - \cosh a)}},\\ \cos C &= \frac{\cosh c - \cosh a\,\cosh c + 2(\cosh^2 c - 1)\cos\frac{\pi}{n}}{1 + \cosh a - 2\cosh^2 c}.\end{aligned} \tag{1}$$

Finally, we obtain exact integral formulas expressing the volume of a hyperbolic antiprism in terms of the edge lengths.

Theorem 3. *The volume of a compact hyperbolic antiprism with $2n$ vertices and edge lengths a, c is given by the formula*

$$V = n\int_{c_0}^{c} \frac{a\,G + t\,H}{(2\cosh^2 t - 1 - \cosh a)\sqrt{R}}\,dt,$$

This work was supported by the Laboratory of Topology and Dynamics, Novosibirsk State University (contract no. 14.Y26.31.0025 with the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

where

$$G = 2\left(\cosh t - \cos\frac{\pi}{n}\right)\sinh a\ \sinh t,$$
$$H = -(\cosh a - 1)\left(1 + \cosh a + 2\cosh^2 t - 4\cosh t\cos\frac{\pi}{n}\right),$$
$$R = 2 - \cosh a(2 + \cosh a) + \cosh 2t + 4(\cosh a - 1)\cosh t\cos\frac{\pi}{n} - 2\sinh^2 t\cos\frac{2\pi}{n}$$

and c_0 is the root of the equation $2\cosh c\left(1 + \cos\frac{\pi}{n}\right) = 1 + \cosh a + 2\cos\frac{\pi}{n}$.

In particular case $n = 3$ an antiprism become an octahedron with $\overline{3}$-symmetry (see Fig. 2). In this case theorems 1, 2 and 3 are coincide with the results given in [1]. When $n = 2$ the upper and lower n-gonal faces of an antiprism degenerate to line segments. Thus we get a tetrahedron with a symmetry group S_4. The latter case was previously studied in [2].

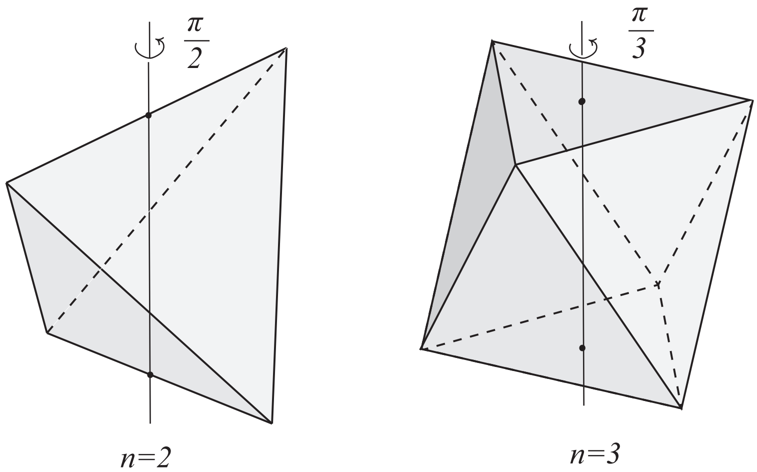


FIGURE 2. Particular antiprisms with $2n$ vertices for $n = 2, 3$.

REFERENCES

[1] N.V. Abrosimov, E.S. Kudina, A.D. Mednykh, *On the volume of a hyperbolic octahedron with $\overline{3}$-symmetry* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **288** (2015), 1–9.

[2] N.V. Abrosimov, B.H. Vuong, *The volume of a hyperbolic tetrahedron with symmetry group S_4* // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **23**:4 (2017), 7–17.

[1]SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS, 4 KOPTYUGA AVE., NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA; NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY, 1 PIROGOVA ST., NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: abrosimov@math.nsc.ru

[2]NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY, 1 PIROGOVA ST., NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: vuonghuubao@live.com

CLASSIFICATION OF PRIME LINKS IN THE THICKENED TORUS

ALYONA AKIMOVA[1], SERGEI MATVEEV[2], AND VLADIMIR TARKAEV[3]

One of the main problems of the knot theory is to construct complete tables of knots and links arranged in increasing of the crossing number. Many researchers worked in this area during last 150 years. Recent tables includes only the so-called prime links, which can not be obtained by some known operations from already tabulated objects.

A link L is called

composite, if at least one of the following conditions holds:

(1) L is a connected sum of links $L_1 \subset T \times I$ and $L_2 \subset \mathbb{S}^3$. In this case, the connected sum is defined by analogy with the classical connected sum of two links in $\mathbb{S}^3$ with the exception that $L_1 \subset T \times I$ can be trivial,

(2) L is a circular connected sum of two non-trivial links $L_i \subset T_i \times I$, $i = 1, 2$, where T_1, T_2 are disjoint copies of the torus, see [1];

split, if there exists an embedded surface in the thickened torus (either a torus, which is parallel to the boundary, or a 2-dimensional sphere), which does not intersects L and cuts the thickened torus into two parts such that each part contains a component of L;

essential, if any annulus, which is isotopic to $c \times I \subset T \times I$, where $c \subset T$ is a nontrivial simple closed curve, has non-empty intersection with L;

prime, if L is non-split, essential, non-composite and contains more than one component.

We construct a table of prime links in the thickened torus with two or more components, which have diagrams with at most 5 crossings. Recall that a link having single component is a knot. Therefore, we do not consider 1-component links, because the table of knots in the thickened torus had been constructed in [2].

Theorem. *There exist no more than* 138 *pairwise inequivalent prime links with two or more components in the thickened torus having diagrams with at most* 5 *crossings.*

Note that we say "no more than" instead of "exactly", because today we can examine all conditions in the definition of prime link except one. Namely, there is no instrument to verify that the given link in the thickened torus is not circular connected sum. Therefore, some constructed links can be non-prime, if they are circular connected sums.

References

[1] S. Matveev *Prime decompositions of knots in $T \times I$*, Topology and its Applications, **159**:7 (2011), 1820–1824.

[2] A. Akimova, S. Matveev *Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **23**:6 (2014), 1450031-1 – 1450031-19.

[3] A. Akimova, S. Matveev, V. Tarkaev *Classification of links of small complexity in the thickened torus*, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, **23**:4 (2017), 18–31. (in Russian)

[1]South Ural State University, 76 Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080, Russia
Email address: akimovaaa@susu.ru

[2]Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16 S. Kovalevskaya str., Yekaterinburg, 620990, Russia;
Chelyabinsk State University, 129 Bratiyev Kashirinykh st., Chelyabinsk, 454001, Russia
Email address: matveev@csu.ru

[3]Chelyabinsk State University, 129 Bratiyev Kashirinykh st., Chelyabinsk, 454001, Russia
Email address: v.tarkaev@gmail.com

The work is supported by RFBR (grant 17-01-00690).

WHY THERE IS NO EXISTENCE THEOREM FOR A CONVEX POLYTOPE WITH PRESCRIBED DIRECTIONS AND PERIMETERS OF THE FACES?

VICTOR ALEXANDROV

In 1897, Hermann Minkowski proved the following uniqueness and existence theorems:

Theorem 1 (H. Minkowski, [3, p. 103–121]). *A convex polytope is uniquely determined, up to translations, by the directions and the areas of its faces.*

Theorem 2 (H. Minkowski, [3, p. 103–121]). *Let unit vectors $\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_m$ in $\mathbb{R}^3$ and real numbers $F_1, \dots, F_m$ satisfy the following conditions:*
(i) *$\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_m$ are not coplanar and no two of them coinside with each other*;
(ii) *F_k is positive for every $k = 1, \dots, m$*;
(iii) $\sum_{k=1}^{m} F_k \boldsymbol{n}_k = 0$.
Then there exists a convex polytope $P \subset \mathbb{R}^3$ such that $\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_m$ (and no other vector) are outward face normals for P and F_k is the area of the face with outward normal $\boldsymbol{n}_k$ for every $k = 1, \dots, m$.

Both Theorems 1 and 2 have many applications and generalizations. For more details the reader is referred to [1] and [4]. One of those generalizations has the following consequence:

Theorem 3 (A.D. Alexandrov, [1, Chapter II, § 4]). *A convex polytope in $\mathbb{R}^3$ is uniquely determined, up to translations, by the directions and the perimeters of its faces.*

Our study is motivated by the question why there is no existence theorem corresponding to uniqueness Theorem 3 in the same manner as existence Theorem 2 corresponds to uniqueness Theorem 1?

We choose some special unit vectors $\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_5$ in $\mathbb{R}^3$ and denote by $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$ the set of all points $(L_1, \dots, L_5) \in \mathbb{R}^5$ with the following property: there exists a compact convex polytope $P \subset \mathbb{R}^3$ such that the vectors $\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_5$ (and no other vector) are unit outward normals to the faces of P and the perimeter of the face with the outward normal $\boldsymbol{n}_k$ is equal to L_k for all $k = 1, \dots, 5$.

Our main result reads that $\mathcal{L}$ is not locally-analytic set, i.e., we prove that, for some point $(L_1, \dots, L_5) \in \mathcal{L}$, there is no neighborhood $U \subset \mathbb{R}^5$ and analytic set $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^5$ such that $\mathcal{L} \cap U = \mathcal{A} \cap U$.

From our point of view, our main result explains why a general existence theorem is not known which determines a convex polytope in $\mathbb{R}^3$ via unit normals and perimeters of its faces. The reason is that no analytic condition, similar to condition (iii) in Theorem 2, does exist.

The talk is based on the author's paper [2].

References

[1] A. D. Alexandrov, *Convex polyhedra* // Springer, 2005.
[2] V. Alexandrov, *Why there is no an existence theorem for a convex polytope with prescribed directions and perimeters of the faces?* // Abh. Math. Semin. Univ. Hamb., **88**:1 (2018), 247–254.
[3] H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski. Band I* // Teubner, 1911.
[4] G. Panina, *A.D. Alexandrov's uniqueness theorem for convex polytopes and its refinements* // Beitr. Algebra Geom., **49**:1 (2008), 59–70.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyug ave., Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University, 2 Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: alex@math.nsc.ru

ABOUT COHOMOGENEITY ONE ALMOST COMPLEX STRUCTURES ON THE $S^2 \times S^4$

NATALIYA DAURTSEVA

The action of a group G on a manifold M is said to be *cohomogeneity one* if the orbit space M/G is one-dimensional. Suppose G is a compact connected Lie group which acts on the compact connected manifold M by cohomogeneity one. M is called *an interval cohomogeneity one manifold* if the orbit space M/G is a closed interval $[0,T] \subset \mathbb{R}$. Such a manifold is determined by its group diagram $G \supset K^{\pm} \supset K$. Here K is called a principal isotropy subgroup and $K^{\pm}$ are non-principal isotropy subgroups with the property $K^{\pm}/K \simeq S^{l_{\pm}}$. The open set $M^* \subset M$ corresponding to the interior of M/G is diffeomorphic to $(0,T) \times G/K$, and $G/K^{\pm}$ are non-principal orbits corresponding to the boundary points of M/G. Conversely any collection of compact groups $G \supset K^{\pm} \supset K$, with $K^{\pm}/K \simeq S^{l_{\pm}}$ determines an interval cohomogeneity one manifold.

At [1, 2] authors classified all possible group diagrams of cohomogeneity one nearly Kähler 6-manifolds. The case of $S^2 \times S^4$, with group diagram $SU(2) \times SU(2) \supset U(1) \times SU(2), U(1) \times SU(2) \supset \Delta U(1)$ was overlooked, but later was specified at [3] by Foscolo L. and Haskins M. In [3] authors have proven the existence of exotic nearly Kähler structures on S^6 and $S^3 \times S^3$ which are inhomogeneous but of cohomogeneity one. For $S^2 \times S^4$ was conjectured that it carries no cohomogeneity one nearly Kähler structure.

The $S^2 \times S^4$ is a special manifold for a number of reasons. Firstly this is in list of products of even-dimensional spheres with almost complex structures, and the unique in above list almost complex product with non almost complex multiplier S^4. It is diffeomorphicaly embeddable in $\mathbb{R}^7$ and inherits Cayley structure. The question about existence of nearly Kähler or complex structures on $S^2 \times S^4$ is open.

There exists several means to define cohomogeneity one actions of $SU(2) \times SU(2)$ on $S^2 \times S^4$ [4, 5]. At the talk I'll describe the cohomogeneity one almost complex structures on $S^2 \times S^4$ for those actions and some their properties.

References

[1] F. Podestà, A. Spiro *Six-dimensional nearly Kähler manifolds of cohomogeneity one* // J. Geom. Phys., **60**:2 (2010), 156–164.

[2] F. Podestà, A. Spiro *Six-dimensional nearly Kähler manifolds of cohomogeneity one (II)* // Comm. Math. Phys., **312**:2 (2012), 477–500.

[3] L. Foscolo, M. Haskins *New G_2-holonomy cones and exotic nearly Kahler structures on S^6 and $S^3 \times S^3$* // Ann. Math., **185**:1 (2017), 59–130.

[4] C. A. Hoelscher *Classification of cohomogeneity one manifolds in low dimensions* // Pac. J. Math., **246**:1 (2010), 129–186.

[5] C. A. Hoelscher *Diffeomorphism type of six-dimensional cohomogeneity one manifolds* // Ann. Glob. Anal. Geom., **38**:1 (2010), 1–9.

Kemerovo State University, 6 Krasnaya st., Kemerovo, 650000, Russia
Email address: `natali0112@ngs.ru`

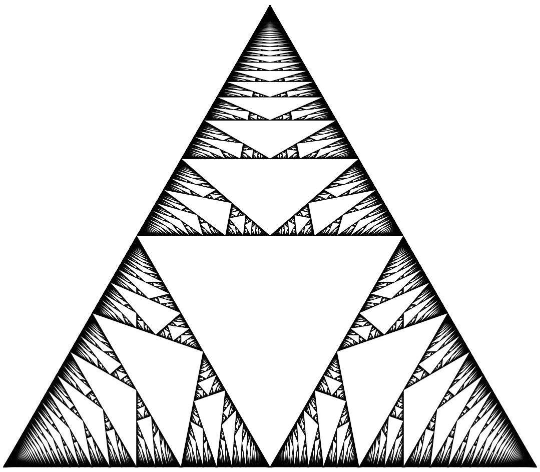
The work was partially supported by the Presidential Grant for Leading Scientific Schools NSh-5913.2018.1.

DYNAMICS RELATED TO THE RAUZY GASKET

IVAN DYNNIKOV

The Rauzy gasket is a fractal set homeomorphic to the Sierpinski triangle, but having quite different geometry. It was discovered, independently, several times in connection with problems in dynamical systems which had, at first look, quite different natures. These included certain symbolic dynamical systems as well as measured foliations on surfaces.

The Rauzy gasket is a subset of a triangle Δ defined as follows. For a point $p \in \Delta$ whose barycentric coordinates do not satisfy the triangle inequalities define $f(p)$ as the point whose barycentric coordinates are obtained from those of p by subtracting from the largest coordinate the sum of the other two and then renormalizing. If the barycentric coordinates of p satisfy the triangle inequalities, then $f(p)$ is undefined. The Rauzy gasket is the set of points p such that $f^k(p)$ is defined for any $k \in \mathbb{N}$.



In my talk, I will overview the problems in which the Rauzy gasket arises naturally, and explain how these problems are related to each other.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, 8 Gubkina st., Moscow, 119991, Russia
Email address: dynnikov@mech.math.msu.su

FLUCTUATIONS OF RANDOM POLYNOMIALS ON COMPACT ISOTROPY IRREDUCIBLE HOMOGENEOUS SPACES

VICTOR GICHEV

Let $M = G/H$ be the isotropy irreducible homogeneous space of a compact Lie group G and E be a G-invariant finite dimensional subspace of $L^2(M, \sigma)$, where σ is the invariant probability measure on M. We say that functons in E are polynomials. Set $\mathcal{D}_b(u) = \int_M |\nabla u|^b \, d\sigma$, where $b \geq 0$ and u is a smooth function on M. If $b = 2$, then $\mathcal{D}_b$ is the Dirichlet form. We consider the variance of $\mathcal{D}_b$ assuming that u is a random vector which is uniformly distributed in the unit sphere S in E. The normalized evaluation mapping defines a natural G-equivariant immersion $\iota : M \to S$ that is a finite covering and a local metric homothety. The coefficient s of the local homothety ι determines expectation of some standard metric quantities, for example, of the volume of the nodal set. As a rule, the expectation depends only on s and dimensions of the involved spaces. For the variance this is not true.

Let o be the base point of M corresponding to H and π_o, π_p be the orthogonal projections in E onto the tangent spaces $T_o = T_o\bar{M}$, $T_p = T_p\bar{M}$ to $\bar{M} = \iota(M)$ at o, p, respectively. The spectrum of the linear operator $\pi_o\pi_p\pi_o$ defines the pair T_o, T_p up to a linear isometry of E as well as a pair of m-dimensional subspaces of $\mathbb{R}^{2m}$, where $m = \dim M$, i.e., an orbit of the stable subgroup $\mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(m)$ in $\mathrm{O}(2m)$ of a point in the real Grassmann manifold $\mathrm{Gr}(2m, m)$. Thus the measure σ on M defines an $\mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(m)$-invariant measure $\tilde{\sigma}$ on $\mathrm{Gr}(2m, m)$. Set $\mu_b(p) = \int_{S^{2m-1}} |\pi_p u|^b |\pi_o u|^b \, du$. We consider it as a function on $\mathrm{Gr}(2m, m)$ keeping the notation T_p, π_p for arbitrary m-dimensional subspaces of $\mathbb{R}^{2m}$. The computation of the variance can be reduced to the integration of μ_b over $\tilde{\sigma}$. We prove that μ_b attains its least value on $\mathrm{Gr}(2m, m)$ if $\pi_p = \pi_o' = I - \pi_o$, where I is the identical operator, compute $\mu_b(\pi_o')$, and find the quadratic term of the Taylor fomula for μ_b at π_o'. We find the explicit formulas for μ_2 and μ_4. If n is positive integer, then μ_{2n} is a symmetric polynomial of the eigenvalues of $\pi_o\pi_p\pi_o$ whose coefficients are positive. Using these results, we estimate the variance of $\mathcal{D}_b$ in several special cases.

In the paper [1], the construction of the first paragraph of this text was applied to the computation of the expectation of the volumes of level sets and estimation of the L^p-norms of polynomials. The results mentioned in the second paragraph are joint with Irina Markina. The book [2] contains a recent survey of this area.

References

[1] V. M. Gichev, *Metric Properties in the mean of polynomials on compact isotropy irreducible homogeneous spaces* // Analysis and Mathematical Physics, **3**:2 (2013), 119–144.

[2] S. Zelditch, *Eigenfunctions of the Laplacian on a Riemannian Manifold* // AMS, Regional Conference Series in Mathematics, **125** (2017).

Sobolev Institute of Mathematics (Omsk Branch), 13 Pevtsova st., Omsk, 644099, Russia
Email address: gichev@ofim.oscsbras.ru

ON CYCLES OF SOME DYNAMICAL SYSTEMS WITH PIECEWISE SMOOTH TRAJECTORIES

VLADIMIR P. GOLUBYATNIKOV[1], LILIYA S. MINUSHKINA[2]

Some of our recent publications were devoted to existence and uniqueness of cycles in phase portraits of piecewise linear dynamical systems which simulate circular gene networks functioning. We consider now piecewise linear dynamical systems of more general type

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_3) - k_1x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1) - k_2x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = f_3(y_2) - k_3x_3, \tag{1}$$

with step-functions

$$f_j(x_{j-1}) = A_j \text{ for } 0 \le x_{j-1} < 1; \ f_j(x_{j-1}) = 0 \text{ for } 1 \le x_j, \quad j = 1, 2, 3$$

in their right-hand sides. Here and below $A_j > 2k_j > 0$, and we assume that $j - 1 = 3$ for $j = 1$. All variables, coefficients and functions here are non-negative, see [3, 4] for biological interpretations and descriptions. In the particular case $k_j = 1$ for all $j \ge 1$, analogous dynamical higher-dimensional systems were considered in [1, 2].

Our considerations are based on discretization of the phase portrait of the system (1). We verify that the domain $Q = \left[0, \frac{A_1}{k_1}\right] \times \left[0, \frac{A_2}{k_2}\right] \times \left[0, \frac{A_3}{k_3}\right]$ is invariant with respect to positive shifts along the trajectories of the system (1). The planes $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ decompose Q by 8 blocks which we enumerate by binary indices $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Here $\varepsilon_j = 0$, if $x_j \le 1$ for all points of the block; respectively, $\varepsilon_j = 1$, if the opposite equality $x_j > 1$ holds there, see [1, 2].

Theorem. *If $A_1 > 2k_1$, $A_2 > 2k_2$, $A_3 > 2k_3$, then the dynamical system* (1) *has at least one cycle $\mathcal{C}$.*

This cycle travels from block to block of the decomposition of the domain Q according to the cyclic diagram

$$\ldots \to \{0,0,1\} \to \{0,1,1\} \to \{0,1,0\} \to \{1,1,0\} \to \{1,0,0\} \to$$
$$\to \{1,0,1\} \to \{0,0,1\} \to \ldots \tag{2}$$

For each block of this diagram, trajectories of its points can pass to only one of adjacent blocks according to the corresponding arrow. In each of the blocks of this decomposition, the system of differential equations (1) is linear and can be solved explicitly, all its trajectories are piecewise smooth with the angle points on the planes $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, i.e., on the common faces of the adjacent blocks.

In more simple particular case when $k_1 = k_2 = k_3$, these trajectories are piecewise linear, and in each block the positive shifts along the trajectories are described by the projective transformations of the faces of the blocks.

For example, $\{0,0,1\} \cap \{0,1,1\} \to \{0,1,1\} \cap \{0,1,0\}$ is a projective transformation corresponding to the homothety with the center $C_2 = (0, A_2/k_2, 0) \in \{0,1,0\}$ in one of the vertices of Q, and so on. In this case the uniqueness of the cycle $\mathcal{C}$ of the system (1) was shown in [1].

In our case, the shifts along trajectories of the system (1) are described by analogous "curvilinear transformations" $x_j(t) = x_j^0 + (c_j - x_j^0)t^{k_j}$.

These constructions and the proof of the theorem can be reproduced in the case of any odd-dimensional piecewise linear dynamical system of the type (1). If the dimension of the system equals $2k + 1$, then it should have a piecewise smooth cycle $\mathcal{C}$ contained in the union

Supported by the program N I.1.5. of SB RAS, project N 0314-2018-0011; and by RFBR, grant 18-01-00057.

of $4k+2$ blocks which compose a cyclic diagram analogous to (2); one of typical fragments of this diagram has the form

$$\ldots \to \{1,0,1,0\ldots 0,1\} \to \{0,0,1,0\ldots 0,1\} \to \{0,1,1,0\ldots 0,1\}\ldots$$

All the other parts of this diagram are obtained by corresponding shifts $\mod (2k+1)$ of the positions of indices of the blocks in this fragment. The case of even dimensional dynamical systems of the type (1) is much more complicated, see [2]. The cyclic diagrams of the type (2) do not appear there.

References

[1] N.B. Ayupova, V.P. Golubyatnikov *On the uniqueness of a cycle in an asymmetric three-dimensional model of molecular repressilator* // Journal of applied and industrial mathematics. **8**:2 (2014), 1–6.

[2] V.P. Golubyatnikov, A.E. Kalenykh *On structure of phase portraits of some nonlinear dynamical systems* (Russian) // Siberian journal of pure and applied mathematics. **15**:1 (2015), 45–53.

[3] L. Glass L., J.C. Pasternack *Stable oscillations in mathematical models of biological control systems* // Journal of Mathematical Biology. **6** (1978), 207–223.

[4] J.D. Murrey *Mathematical Biology. I. An Introduction* // Springer, New York, 2002.

[1]Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

[2]Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: l.minushkina@g.nsu.ru

SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES OF f-QUASIMETRIC SPACES

ALEXANDER GRESHNOV

Assume that X is an arbitrary set consisting of at least two points, and $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ is a function satisfying the identity axiom: $x = y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$. We call ρ a distance function. The value $\rho(x, y)$ is called the distance from x to y.

Consider an arbitrary function $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that $f(x, y) \to 0$ when $(x, y) \to (0, 0)$. A distance function ρ is called *f-quasimetric* if the following f-triangle inequality holds $\rho(x, z) \le f(\rho(x, y), \rho(y, z))$ $\forall x, y, z \in X$. The pair (X, ρ) is called *f-quasimetric space* [1]. f-quasimetric is *symmetric* if $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Put $B(y, r) = \{x \in X \mid \rho(y, x) < r\}$. Define open sets in X as follows. A set $A \subset X$ is open if for each $y \in A$ there exists $r > 0$ such that $B(y, r) \subset A$. Open sets define a topology τ.

Obviously, if $f(x, y) = x + y$ then f-triangle inequality becomes the standard triangle inequality. In this case is called quasimetric and (X, ρ) is called *quasimetric space* [2]. In the most important for applications case, $f(x, y) = q_1x + q_2y$ for some $q_1 > 0$, $q_2 > 0$. Then the function ρ is called (q_1, q_2)-quasimetric and the pair (X, ρ) is called (q_1, q_2)-quasimetric space [1, 3]. Note that in this case $q_1 \ge 1$, $q_2 \ge 1$ since set X contains at least two elements.

For a (q_1, q_2)-quasimetric space (X, ρ) denote by $Q = Q(\rho)$ the set of all points $q' = (q'_1, q'_2) \in \mathbb{R}^2$ such that the (q'_1, q'_2)- triangle inequality for ρ holds. Obviously, the nonempty set Q is convex, closed, and $Q \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 1,\ y \ge 1\}$. The set Q contains extreme points, and each of them is a Pareto optimal point of Q (in the sense of the minimization of their components). The definition of an extreme point immediately implies that if (a, b) is an extreme point of a (q_1, q_2)-quasimetric ρ then $K_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge a,\ y \ge b\} \subseteq Q$. A point $q \in Q$ is called *best* if $q \le q'$ for all $q' \in Q$ (the inequality is understood coordinatewise). The definition of best point immediately implies that best point (a, b) is unique if it exists; in this event, $Q = K_{a,b}$. Since the set $K_{a,b}$ has only one extreme point, namely, the point with coordinates (a, b), so we have: if a (q_1, q_2)-quasimetric ρ has two extreme points then ρ has no best point.

In [1] examples of symmetric (q, q)-quasimetrics were constructed for $q > 1$ whose (q, q)-quasimetric balls are not open; on the other hand, see for example [4], $(1, q_2)$-quasimetric balls are always open. In our talk we discuss the problem of existence of $(q_1, 1)$-quasimetrics whose $(q_1, 1)$-balls are not open.

References

[1] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, L.V. Lokutsievskii, K.V. Storozhuk, *Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics* // Topology and its Applications, **221** (2001), 178–194.

[2] W.A. Wilson, *On quasi-metric spaces* // Am. J. Math., **53**:3 (1931), 675–684.

[3] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, *Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points* // Dokl. Math., **94**:1 (2016), 434–437.

[4] A.V. Greshnov, *(q_1, q_2)-Quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to 1-quasimetrics* // Siberian Advances in Mathematics, **27**:4 (2017), 253–262.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: greshnov@math.nsc.ru

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 17–01–00801).

ARCHIMEDEAN AND DIRECTIONALLY CLOSED CONES

ALEXANDER GUTMAN

In what follows, X is a vector space over $\mathbb{R}$. A nonempty subset $W \subseteq X$ is called a *wedge* whenever $\alpha W \subseteq W$ for all $\alpha \geqslant 0$. A wedge W is a *cone* if $W \cap (-W) = \{0\}$. As is known, in every (pre)ordered vector space $(X, \leqslant)$ the set $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ is a cone (wedge). Conversely, if W is a cone (wedge) in X then the relation $\leqslant_W$ defined by the rule $x \leqslant_W y \Leftrightarrow y - x \in W$ makes X into a (pre)ordered vector space with $X^+ = W$.

A (pre)ordered vector space $(X, \leqslant)$ is said to satisfy the *axiom of Archimedes* whenever for all $x \in X$ and $y \in X^+$ the condition $(\forall\, n \in \mathbb{N})(x \leqslant \frac{1}{n}y)$ implies $x \leqslant 0$. A cone (wedge) W in a vector space X is called *Archimedean* if the corresponding (pre)ordered vector space $(X, \leqslant_W)$ satisfies the axiom of Archimedes.

See [1] for the basic information on Archimedean cones. The relation between Archimedean and closed cones is studied in [2].

Say that a set $C \subseteq X$ is *closed along the direction of* $y \in X$ if for every family $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ and every $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$, the conditions $\inf_{i\in I} \alpha_i = \alpha$ and $(\forall\, i \in I)(x + \alpha_i y \in C)$ imply $x + \alpha y \in C$. A convex set $C \subseteq X$ is closed along the direction of $y \in X$ if and only if for all $x \in X$ the condition $\inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : x + \alpha y \in C\} = 0$ implies $x \in C$.

Theorem 1. *The following properties of a convex subset $C \subseteq X$ are equivalent:*
(1) *C is Archimedean;*
(2) *C is closed along all directions;*
(3) *the intersection of C with every straight line is closed;*
(4) *the intersection of C with every finite-dimensional subspace of X is closed;*
(5) *$X\backslash C$ is algebraically closed (i.e., coincides with its algebraic interior).*

Theorem 2. *Let $W \subseteq X$ be a wedge and let f be a linear functional on X such that $f \geqslant 0$ on W and $f(y) > 0$ for some $y \in W$. The wedge W is Archimedean if and only if W is closed along the direction of y and the set $\{x \in W : f(x) = 1\}$ is Archimedean.*

We will now present criteria for existence of f and y satisfying the hypotheses of Theorem 2.

Theorem 3. *Let $\overline{W}$ be the closure of a wedge $W \subseteq X$ in the weak topology induced by the space $X^\#$ of all linear functionals on X. The following are equivalent:*
(1) *there exist $f \in X^\#$ and $y \in W$ such that $f \geqslant 0$ on W and $f(y) > 0$;*
(2) *there exists $y \in W$ such that $-y \notin \overline{W}$;*
(3) $\operatorname{lin} W \not\subseteq \overline{W}$, *where $\operatorname{lin} W$ is the linear span of W.*

Every locally convex space of uncountable dimension includes a nonclosed Archimedean cone (see [2]). It remain unknown which locally convex spaces of countable dimension include nonclosed Archimedean cones.

References

[1] C. D. Aliprantis, R. Tourky, *Cones and Duality* // Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.
[2] A. E. Gutman, E. Yu. Emelyanov, A. V. Matyukhin, *Nonclosed Archimedean cones in locally convex spaces* // Vladikavk. Math. J., **17**:3 (2015), 36–43. [in Russian]

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia

Email address: gutman@math.nsc.ru

The work was supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS № I.1.2., project № 0314-2016-0005.

GENERAL POSITION THEOREM FOR SELF-SIMILAR FRACTALS AND IT'S APPLICATIONS

KIRILL KAMALUTDINOV

Let $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ be a system of contraction similarities in $\mathbb{R}^n$. A nonempty compact set $K = K(\mathcal{S})$ such that $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(K)$, is called an *attractor* of the system $\mathcal{S}$, or a *self-similar set.* A set $C(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=1, j\neq i}^{m} S_i(K) \cap S_j(K)$ is called a *critical set* of the system $\mathcal{S}$. The system $\mathcal{S}$ is said to satisfy the *open set condition* (OSC), iff there exists an open set O such that $S_i(O) \subset O$ and $S_i(O) \cap S_j(O) = \varnothing$ for all distinct $i, j \in I = \{1, \ldots, m\}$. Denote by $F = \{S_{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in I^\infty\}$ the semigroup, generated by $\mathcal{S}$; then $\mathcal{F} = F^{-1} \circ F$, or a set of all compositions $S_{\mathbf{j}}^{-1} S_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$, is the *associated family of similarities.* The system $\mathcal{S}$ has the *weak separation property* (WSP) iff $\mathrm{Id} \notin \overline{\mathcal{F} \setminus \mathrm{Id}}$. If the system doesn't have WSP, then it doesn't satisfy OSC, but the opposite is not true.

We use the following General Position Theorem [1] to construct special examples of parametrized families of self-similar sets, that for almost all generating parameters they do not have WSP (so as OSC), but have exact overlap condition for double fixed point (Theorem 2), or even unique one point intersection in critical set (Theorem 3):

Theorem 1. *Let the Cartesian products of metric spaces (D, ρ), $(L_1.\sigma_1)$, (L_2, σ_2) be supplied with canonical metrization. Let continuous maps $\varphi_1 : D \times L_1 \to \mathcal{M}$, $\varphi_2 : D \times L_2 \to \mathcal{M}$ to the normed linear space $(\mathcal{M}, \|.\|)$ and the function $\Phi(\xi, x_1, x_2) := \varphi_1(\xi, x_1) - \varphi_2(\xi, x_2)$ be such that for some constants $C, M, \alpha, \beta > 0$ and for all $\xi, \xi' \in D$, $x, y \in L_i (i = 1, 2), x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$:*

$$\|\varphi_i(\xi, x) - \varphi_i(\xi, y)\| \leq C[\sigma_i(x, y)]^\alpha, \qquad \|\Phi(\xi', x_1, x_2) - \Phi(\xi, x_1, x_2)\| \geq M[\rho(\xi', \xi)]^\beta.$$

Then the set $\Delta := \{\xi \in D : \varphi_1(\xi, L_1) \cap \varphi_2(\xi, L_2) \neq \varnothing\}$ is closed in D and

$$\dim_H \Delta \leq \min\{(\beta/\alpha) \dim_H(L_1 \times L_2), \dim_H D\}.$$

Theorem 2. *For Lebesgue-almost all $(p, q) \in (0, 1/16)^2$ the system $\mathcal{S} = \{S_1(x) = px, S_2(x) = qx, S_3(x) = 1 - p + px, S_4(x) = 1 - q + qx\}$ with the attractor K has the following properties:*
(1) $S_1^m(K) \cap S_2^n(K) = S_1^m S_2^n(K)$ (it has exact overlaps for double fixed point);
(2) $\mathcal{S}$ does not satisfy WSP.

Theorem 3. *Fix $r \in (0, 1/16)$ and put $h = \frac{r+rq}{r+q}$. For Lebesgue-almost all $(p, q) \in (0, r) \times \left(\frac{r^2}{1-2r}, r\right)$ the system $\mathcal{S} = \{S_1(x) = px, S_2(x) = h - qx, S_3(x) = h - r + rx, S_4(x) = 1 - r + rx\}$ with the attractor K has the following properties:*
(1) $C(S) = S_2(K) \cap S_3(K) = \{h\}$ (it has unique one point intersection);
(2) $\mathcal{S}$ does not satisfy WSP.

References

[1] K. Kamalutdinov, A. Tetenov, *Twofold Cantor sets in* $\mathbb{R}$ // arXiv:1802.03872 (2018).

Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyug ave., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: k.kamalutdinov@g.nsu.ru

The work has been supported by Russian Foundation of Basic Research grants 16-01-00414, 18-501-51021.

MINIMAL GRAPH SURFACES ON TWO-STEP CARNOT GROUPS

MARIA KARMANOVA

We consider graph mappings φ_Γ defined by mappings $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ of classes of two-step Carnot groups. In particular, we discover specific properties of this case (e. g., necessary condition for correct formulation of the minimal area problem for their images $\varphi_\Gamma(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{G}$) and describe some characteristics of minimal surfaces. Here we assume that $\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{U}$, where $\mathbb{U}$ is a two-step nilpotent graded group of tolopogical dimension $N + \widetilde{n} + 1$, where N is a topological dimension of $\mathbb{G}$, $\widetilde{n} + 1$ is a topological dimension of $\widetilde{\mathbb{G}}$, $\widetilde{n} = \dim H_x\widetilde{\mathbb{G}}$ for all $x \in \widetilde{\mathbb{G}}$, and $\mathbb{G} \cap \widetilde{\mathbb{G}} = \mathbf{0}$.

Definition. A *graph mapping* $\varphi_\Gamma : \Omega \to \mathbb{U}$ assigns to each x the element

$$\mathbb{U} \ni \varphi_\Gamma(x) = \exp\Bigl(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}} \varphi_j(x)\widetilde{X}_j\Bigr)(x),$$

where $\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{\widetilde{N}} \varphi_j(x)\widetilde{X}_j\Bigr)(\widetilde{\mathbf{0}}) = \varphi(x) \in \widetilde{\mathbb{G}}$.

In addition to questions similar to those in [1, 2] for $\varphi : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{H}^1$ on correct definition of a variation for a nonholonomic-valued mapping, we also have to deduce some restrictions on a horizontal subbundle $H\mathbb{G}$ in the preimage. As shown in [1, 2], variation of φ (as an argument of the functional calculating area of a graph surface) is defined by changing coordinate functions corresponding to horizontal subspace by values ξ_k, $k = 1, \dots, \widetilde{n}$. The following new specific result is valid.

Theorem. *For unlimited choice of ξ_k, $k = 1, \dots, \widetilde{n}$, it is necessary for commutators of horizontal vector fields to be linearly independent with other ones or to be equal to zero. In other words, each vector field of the degree two on $\mathbb{G}$ must be represented uniquely via commutators of horizontal fields.*

Obviously, this condition holds for mappings $\varphi : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{H}^1$ of Heisenberg groups of topological dimension 3. Let us describe the area functional and its increment.

Definition. The *increment of the area functional* on the element $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{\widetilde{n}})$ equals $S(\widehat{D}\psi_\varepsilon) - S(\varphi)$, where $S(\widehat{D}\psi_\varepsilon)$ is defined as

$$\int\limits_\Omega \sqrt{\det\bigl(E_n + (\widehat{D}_H\varphi(x) + \varepsilon D_H\xi(x))^*(\widehat{D}_H\varphi(x) + \varepsilon D_H\xi(x))\bigr)} \cdot \sqrt{1 + \Delta^2(x)}\, d\mathcal{H}^\nu(x),$$

$\Delta^2(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{N} \bigl(\phi_k(x) + \varepsilon P_1^k(\widehat{D}_H\varphi(x), \widehat{D}_H\xi(x)) + \varepsilon^2 P_2^k(\widehat{D}_H\xi(x))\bigr)^2$, and $S(\varphi) = S(\widehat{D}\psi_0)$.

The next result describes minimal surfaces equations.

Theorem. *For the area functional $S(\varphi)$ defined by C^2-mapping φ and horizontal part of its sub-Riemannian differential $\widehat{D}\varphi$ to be minimal among mappings corresponding to horizontal homomorphisms $\widehat{D}\psi_\varepsilon$ and ξ_k, $k = 1, \dots, \widetilde{n}$, it is necessary for horizontal mean curvature*

The work was supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS I.1.2., project 0314-2016-0006.

$H^{SR}(x) = (H_1^{SR}(x), \dots, H_{\widetilde{n}}^{SR}(x))$ *to be equal zero, where*

$$
\begin{aligned}
H_m^{SR}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i\bigl\langle X_j\varphi_m(x)\bigl(E+\widehat{D}_H\varphi(x)^*\widehat{D}_H\varphi(x)\bigr)_{ij}\mathcal{F}(\varphi)\bigr\rangle \\
+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i\bigl\langle X_j\varphi_m(x)\bigl(E+\widehat{D}_H\varphi(x)^*\widehat{D}_H\varphi(x)\bigr)_{ji}\mathcal{F}(\varphi)\bigr\rangle \\
+2\sum_{k=n+1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^k \sum_{1\le l<m} c_{lm\widetilde{n}+1} X_j\Bigl\langle X_i\varphi_l(x)(\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{n}+1,k}\mathcal{F}(\varphi)^{-1}\Bigr\rangle \\
-2\sum_{k=n+1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^k \sum_{1\le l<m} c_{lm\widetilde{n}+1} X_i\Bigl\langle X_j\varphi_l(x)(\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{n}+1,k}\mathcal{F}(\varphi)^{-1}\Bigr\rangle \\
+2\sum_{k=n+1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^k \sum_{m<l\le\widetilde{n}} c_{ml\widetilde{n}+1} X_i\Bigl\langle X_j\varphi_l(x)(\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{n}+1,k}\mathcal{F}(\varphi)^{-1}\Bigr\rangle \\
-2\sum_{k=n+1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^k \sum_{m<l\le\widetilde{n}} c_{ml\widetilde{n}+1} X_j\Bigl\langle X_i\varphi_l(x)(\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{n}+1,k}\mathcal{F}(\varphi)^{-1}\Bigr\rangle,
\end{aligned}
$$

$m = 1, \dots, \widetilde{n}$.

References

[1] M.B. Karmanova, *Variations of Nonholonomic-Valued Mappings and Their Applications to Maximal Surfaces Theory* // Dokl. Math., **93**:3 (2016), 276–279.

[2] M.B. Karmanova, *Maximal Graph Surfaces on Five-Dimensional Group Structures* // Sib. Math. J., **59**:3 (2018), to appear.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyug ave., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

VORTEX RECONNECTION AND CONCORDANCE OF KNOTS

LOUIS H. KAUFFMAN

Knotted vortices in water have been produced experimentally. Knotted superfluid vortices can be studied via computer simulation using the Gross-Piatevksi equations. Knotted vortices tend to become unknotted and unlinked via reconnection where two intervals of vortex interact and recombine to form a new vortex. Vortex reconnection can be described in the knot theoretic context as a cobordism of the knot in four dimensional space of the type of a Morse saddle point. This leads to a topological model of reconnection that can be analyzed in terms of properties of knot concordance and knot cobordism. We prove that the the absolute value of the signature of a knot is a lower bound on the number of reconnections needed to transform the knot to a collection of unknotted circles. Example from topology and from simulations will be given.

University of Illinois at Chicago, 1200 W Harrison St., Chicago, IL 60607, USA
Email address: `kauffman@uic.edu`

This work was supported by the Laboratory of Topology and Dynamics, Novosibirsk State University (contract no. 14.Y26.31.0025 with the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

ON UNIQUE DETERMINATION OF CONFORMAL TYPE FOR DOMAINS IN EUCLIDEAN SPACES

ANATOLII KOPYLOV

We discuss the problems of unique determination of conformal type for domains in Euclidean spaces. It consists of three parts. In the first part, we consider results on the problem of unique determination for (generally speaking) nonconvex domains in $\mathbb{R}^n$, where $n \geq 4$. The second part is devoted to the study of the problems of the unique determination of convex polyhedral domains in the three-dimensional Euclidean space by the relative conformal moduli of boundary condensers. Finally, in the third part, we are concerned with problems of the unique determination of 3-connected plane domains by the relative conformal moduli of pairs of boundary components.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090 Russia
Email address: apkopylov1940@gmail.com

The author was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 17-01-00875-a (2017–2019)).

THE RAO–REITER CRITERION FOR THE AMENABILITY OF HOMOGENEOUS SPACES

YAROSLAV KOPYLOV

We prove that a homogeneous space G/H, where G is a locally compact group and H is a closed subgroup, is amenable in the sense of Eymard–Greenleaf if and only if the "quasiregular" action π_Φ of G on the unit sphere of an Orlicz space $L^\Phi(G/H)$ for some N-function $\Phi \in \Delta_2$ satisfies the Rao–Reiter condition (P_Φ).

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia

LAPLACIANS ON SMOOTH DISTRIBUTIONS

YURI KORDYUKOV

We will discuss the Laplacians associated with an arbitrary generalized smooth distribution on a smooth manifold M. Roughly, smooth distributions are smooth assignments of vector subspaces D_x of T_xM for every $x \in M$. These subspaces are not required to have constant rank. It is more convenient to view such a distribution in terms of its dynamics, focusing on the module $\mathcal{D}$ of smooth vector fields on M tangent to it. More precisely, we define a (generalized) smooth distribution on M as a locally finitely generated $C^\infty(M)$-submodule $\mathcal{D}$ of the $C^\infty(M)$-module $\mathcal{X}_c(M)$ of smooth compactly supported vector fields on M. If the distribution has constant rank, D is a subbundle of the tangent bundle TM and the associated $C^\infty(M)$-module $\mathcal{D}$ is the space of smooth sections of this bundle: $\mathcal{D} = C^\infty(M, D)$. In this case $\mathcal{D}$ is projective.

The fiber of the distribution $\mathcal{D}$ at $x \in M$ is the finite dimensional vector space $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}/I_x\mathcal{D}$, where $I_x = \{f \in C^\infty(M) : f(x) = 0\}$. We define a Riemannian metric on $\mathcal{D}$ as a family of inner products $\langle\ ,\ \rangle_x$ on $\mathcal{D}_x$, depending smoothly on $x \in M$ in some sense. We prove that such a Riemannian metric exists for an arbitrary distribution $\mathcal{D}$.

Given a smooth distribution $\mathcal{D}$ on a smooth manifold M, a Riemannian metric on $\mathcal{D}$ and a positive density μ on M, we construct the associated horizontal Laplacian as follows. First, we define the horizontal differential to be the operator $d_{\mathcal{D}} : C^\infty_c(M) \to C^\infty_c(M, \mathcal{D}^*)$ given by $d_{\mathcal{D}} = ev^* \circ d$, where $d : C^\infty_c(M) \to \Omega^1_c(M)$ is the de Rham differential and $ev^* : \Omega^1_c(M) \to C^\infty_c(M, \mathcal{D}^*)$ is induced by the evaluation maps $ev_x : \mathcal{D}_x \to T_xM$, $x \in M$. The horizontal Laplacian of $\mathcal{D}$ is the second order differential operator $\Delta_{\mathcal{D}} = d^*_{\mathcal{D}} \circ d_{\mathcal{D}} : C^\infty_c(M) \to C^\infty_c(M)$, where $d^*_{\mathcal{D}} : C^\infty_c(M, \mathcal{D}^*) \to C^\infty_c(M)$ is the adjoint of $d_{\mathcal{D}}$ with respect to natural inner products on $C^\infty_c(M)$ and $C^\infty_c(M, \mathcal{D}^*)$ defined by the Riemannian metric on $\mathcal{D}$ and the density μ. We show that, if M is compact, the horizontal Laplacian $\Delta_{\mathcal{D}}$ as an unbounded operator on the Hilbert space $L^2(M, \mu)$ with domain $C^\infty(M)$ is essentially self-adjoint.

A distribution $\mathcal{D}$ is called involutive, if it is closed under Lie brackets: $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subseteq \mathcal{D}$. An involutive smooth distribution is called a singular foliation. In [1], I. Androulidakis and G. Skandalis constructed a longitudinal pseudodifferential calculus and the corresponding scale of longitudinal Sobolev spaces for an arbitrary singular foliation on a compact manifold.

For a smooth distribution $\mathcal{D}$ on a compact manifold M, consider the smallest involutive $C^\infty(M)$-submodule $\mathcal{F}$ of $\mathcal{X}(M)$, which contains $\mathcal{D}$. It is generated by the elements of $\mathcal{D}$ and their iterated Lie brackets $[X_1, \dots, [X_{k-1}, X_k]]$ such that $X_i \in \mathcal{D}$, $i = 1, \dots, k$, for every $k \in \mathbb{N}$. Assume that $\mathcal{F}$ is a singular foliation (that is, it is finitely generated). We prove that the horizontal Laplacian $\Delta_{\mathcal{D}}$ is longitudinally hypoelliptic in the scale of longitudinal Sobolev spaces associated with $\mathcal{F}$.

In the case when the distribution has constant rank, similar results were obtained in [2].

This is joint work with I. Androulidakis.

References

[1] I. Androulidakis, G. Skandalis. *Pseudodifferential calculus on a singular foliation*// J. Noncommut. Geom., **5**:1 (2011), 125–152.

[2] Y.A. Kordyukov. *Laplacians on smooth distributions*// Mat. Sb., **208**:10 (2017), 91–112.

Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, 112 Chernyshevsky st., Ufa, 450008, Russia

Email address: `yurikor@matem.anrb.ru`

Supported by the Russian Foundation of Basic Research, grant no. 16-01-00312.

QUANDLES OF CYCLIC TYPE WITH SEVERAL FIXED POINTS

PEDRO LOPES

A quandle is an algebraic structure whose binary operation is idempotent, left-invertible and self-distributive. As such it is equivalent to a list of permutations (one permutation per element of the quandle) satisfying a particular condition per pair of elements of the quandle. In this talk we adopt this perspective and use it to classify the so-called quandles of cyclic type with several fixed points, for the high orders. Each of these quandles, say of order n and f fixed points, is such that each of the associated permutations splits into f cycles of length one and one cycle of length $n - f$. This is joint work with A. Lages.

Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais 1, Lisbon, 1049-001, Portugal;
University of Lisbon, Alameda da Universidade, Lisbon, 1649-004, Portugal
Email address: pelopes@math.tecnico.ulisboa.pt

HYPERBOLIC LINKS ARE NOT GENERIC

ANDREI MALYUTIN

A well-known conjecture in knot theory says that the percentage of hyperbolic knots amongst all of the prime knots of n or fewer crossings approaches 100 as n approaches infinity (see, e. g., [1]). Several years ago it was found (see [6]) that this conjecture contradicts several other plausible conjectures, including the 120-year-old conjecture on additivity of the crossing number of knots under connected sum and the conjecture that the crossing number of a satellite knot is not less than that of its companion. We show that the analogue of the hyperbolicity conjecture is not true for the case of links:

Theorem. *The percentage of hyperbolic links amongst all of the prime non-split links of* n *or fewer crossings does not tend to* 100 *as* n *tends to infinity.*

Moreover, the following theorem holds true.

Theorem. *If* K *is a non-trivial knot then the percentage of links that are satellites of* K *amongst all of the prime non-split links of* n *or fewer crossings does not tend to* 0 *as* n *tends to infinity.*

References

[1] C. C. Adams, *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots* // New York, W. H. Freeman and Company, 1994.

[2] J. Hoste, M. Thistlethwaite, and J. Weeks, *The first 1,701,936 knots* // Math. Intelligencer, **20**:4 (1998), 33–48.

[3] K. Ichihara and J. Ma, *A random link via bridge position is hyperbolic* // Topology Appl., **230** (2017), 131–138.

[4] T. Ito, *On a structure of random open books and closed braids* // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **91**:10 (2015), 160–162.

[5] J. Ma, *The closure of a random braid is a hyperbolic link* // Proc. Amer. Math. Soc., **142**:2 (2014), 695–701.

[6] A. V. Malyutin, *On the question of genericity of hyperbolic knots* // preprint (2016), arXiv:1612.03368.

[7] J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds* // Grad. Texts in Math. 149, Springer, New York, 2nd edition, 2006.

St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics, 27 Fontanka, St. Petersburg, 191023, Russia

Email address: malyutin@pdmi.ras.ru

Supported by RFBR grant 16-01-00609.

POSITIVELY GRADED NARROW LIE SUPERALGEBRAS

DMITRY V. MILLIONSHCHIKOV

In the 1990s, Shalev and Zelmanov, comparing the methods developed in the theory of pro-p groups with the theory of pro-nilpotent Lie algebras over a field of characteristic zero, initiated the study of the so-called narrow Lie algebras. That is, positively graded Lie algebras $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ with one-dimensional or at most two-dimensional, homogeneous components $\mathfrak{g}_i$ [1].

We consider positively graded Lie superalgebras

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_0^i \oplus \oplus_{j=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_1^j, \quad [\mathfrak{g}_\alpha^i, \mathfrak{g}_\beta^j] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta \; mod\; 2}^{i+j}, \ \alpha, \beta \in \{0,1\}.$$

A Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ is called naturally graded if it is isomorphic to its associated graded Lie superalgebra $\mathrm{gr}_C\mathfrak{g}$ with respect to the filtration by the ideals $C^i\mathfrak{g}$ of the lower central series.

We classify narrow naturally graded Lie superalgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_0^i \oplus \oplus_{j=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_1^j$ such that

$$1 \le \dim \mathfrak{g}_0^1 \le 2, \dim \mathfrak{g}_0^i = 1, i \ge 2, \dim \mathfrak{g}_1^j = 1, j \ge 1.$$

This classification generalizes the classical result by Vergne [2] on naturally graded filiform Lie algebras.

The research was made under the support of the RSF grant 14-11-00414.

References

[1] A. Shalev, E.I. Zelmanov *Narrow algebras and groups* // J. of Math. Sciences., **93**:6 (1999), 951–963.

[2] M. Vergne *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes* // Bull. Soc. Math. France, **98** (1970), 81–116.

Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia;
Steklov Mathematical Institute, 8 Gubkina st., Moscow, 119991, Russia
Email address: `mitia_m@hotmail.com`

MOUTARD TRANSFORMATIONS FOR GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

ROMAN G. NOVIKOV

The transformations of the Darboux-Moutard type go back to the publication [1]. Recently, we have constructed and studied Moutard type transformations for generalized analytic functions (that is for the Carleman system or Bers-Vekua system). This talk is based, in particular, on works [2] and [3].

References

[1] T.F. Moutard, J. Ecole Polytechnique, **45** (1878), 1–11.
[2] P.G. Grinevich, R.G. Novikov, *Moutard transform for the generalized analytic functions* // J. Geometric Analysis, **26**, (2016), 2984–2995.
[3] R.G. Novikov, I.A. Taimanov, *Moutard type transformation for matrix generalized analytic functions and gauge transformations* // Russian Math. Surveys, **71**, (2016), 970–972.

The National Center for Scientific Research, 3 Rue Michel Ange, Paris, 75016, France; Ecole Polytechnique, Route de Saclay, Palaiseau, 91128, France
Email address: novikov@cmap.polytechnique.fr

COHOMOLOGICAL OBSTRUCTIONS FOR THE DEFORMATION QUANTIZATION OF COMMUTATIVE FAMILIES

GEORGY SHARYGIN

Let M, π be a Poisson manifold; according to Kontsevich's theorem, one can always find a deformed noncommutative product on the space of formal power series in $\hbar$ with coefficients in $C^\infty(M)$, such that for any two $f, g \in C^\infty(M)$, their commutator with respect to the new product will coincide with the Poisson bracket up to $\hbar^2$ terms. This algebra is usually called *deformation quantization* of M.

In my talk I shall address the question, whether one can extend a given commutative (with respect to the Poisson bracket) family of functions on M to a commutative family of elements in its deformation quantization and its straightforward generalization to the case of a Lie algebra action on this manifold. Due to Darboux theorem this question can always be solved locally, when the manifold M is symplectic and the commutative functions are independent, thus the question is closely related to the global properties of the singular sets of the commutative system. In my I shall describe various cohomological obstructions for this procedure and discuss possible relations between them.

Moscow State (Lomonosov) University, 1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia
Email address: `sharygin@itep.ru`

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 16-01-00378-a) and the program Leading Scientific Schools (grant no. NSh-6399.2018.1).

INTERPRETATION OF CLASSICAL AFFINE CONNECTION BY MEANS LAPTEV AFFINE CONNECTION

YURY SHEVCHENKO[1], ELENA SKRYDLOVA[2]

Let Laptev structural equation [1] of the 2nd order coframes principal bundle $L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}(M_n)$ on an n-dimensional smooth manifold M_n have form

$$(1)\qquad \begin{gathered} d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \\ d\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl} \ (i, ... = \overline{1,n}). \end{gathered}$$

A typical fiber of bundle is 2nd order differential group $L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}$. The bundle have a quotient bundle of linear coframes $L_{n^2}(M_n)$ which is satisfying structural equation (1_{1-2}) and a typical fiber is linear group $L_{n^2} = GL(n)$.

Let us give Laptev affine connection [1] on the bundle $L_{n^2}(M_n)$ by Laptev-Lumiste method

$$(2)\qquad \widetilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k, \quad \Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l, \quad \Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l$$

thus components of connection object Γ^i_{jk} are functions on the bundle $L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}(M_n)$. Let us substitute the connection forms $\widetilde{\omega}^i_j$ into structural equation (1_1) and write their exterior differentials:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \ S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]};$$

$$d\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \ R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{|m|l]}.$$

We obtain the structural equation of Laptev affine connection space $L_{n^2,n}$ with the torsion tensor S^i_{jk} and the curvature tensor R^i_{jkl}. We define a cross-section on the bundle $L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}(M_n)$ by equations: $\omega^i_j = \mu^i_{jk}\omega^k$, $\omega^i_{jk} = \nu^i_{jkl}\omega^l$. Now we substitute this expression into differential equation (2_2):

$$d\Gamma^i_{jk} = (\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^m_{jk}\mu^i_{ml} + \Gamma^i_{mk}\mu^m_{jl} + \Gamma^i_{jm}\mu^m_{kl} - \nu^i_{jkl})\omega^l.$$

Therefore, components Γ^i_{jk} are functions on the manifold M_n that are object of classical affine connection (see [2]). The smooth manifold M_n, which has functions Γ^i_{jk} with certain transformation low, is called an affine connection space $A_{n,n}$.

Theorem. *If we have a cross-section of the 2nd order coframe $s : M_n \to L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}(M_n)$, and a quotient bundle of linear coframe $L_{n^2}(M_n)$ is Laptev affine connection space, then image $s(M_n)$ of the cross-section is classical affine connection space $A_{n,n}$.*

References

[1] G. F. Laptev, *Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold* // Tr. Geom. Sem., 1, VINITI, Moscow (1966), 139–189 (in Russian)

[2] I. P. Egorov, *Geometry: special course* // Moscow, 1979. (in Russian)

[1]Immanuel Kant Baltic Federal University, 14 A. Nevskogo street, Kaliningrad, 236040, Russia

[2]Immanuel Kant Baltic Federal University, 14 A. Nevskogo street, Kaliningrad, 236040, Russia

Email address: ESkrydlova@kantiana.ru

TOPOLOGICAL SELF-SIMILAR DENDRITES GENERATED BY M-SPROUTS

ANDREI TETENOV

Definition. *Let $I = \{1, ..., m\}$ be the index set and $\Gamma = (V, E)$ be a tree such that*
1) *V is divided into 2 parts: $V = B \sqcup W$, $E \subset B \times W$; $\#B \geq m$ and the set of endpoints $B_F \subset B$;*
2) *there is injective map $\nu : I \to B$, and edge coloring $\varphi : E \to I$, injective on each $E(w)$ for any $w \in W$.*
Then the tree $\Gamma = \Gamma(B, W, E, \nu, \varphi)$, is called a m-sprout.

Such settings allow to define a composition operation $\Gamma_1 * \Gamma_2$ on the set $Sp(m)$ of all m-sprouts.

There are several objects associated with a m-sprout Γ:
a) connected finite acyclic non-Hausdorff space $X(\Gamma) = (V, \tau)$, where τ is a topology generated by neighbourhoods of "black" points $\{N(b), b \in B\}$ in Γ;
b) a digraph $\mathcal{G}(\Gamma)$ with the vertex set I, called *index diagram of* Γ;
c) two semigroups G_ψ and G_ϕ of maps $\psi_w : I \cup \{0\} \to I \cup \{0\}$(resp. $\phi_w : I \to I$) relating indexed points in $\nu(I)$ to edge indices in $E(w)$.

For $u \in G_\psi$ or $u \in G_\phi$, we define $Inv(u) = \max\{I' \subset I : u(I') = I'\}$.

If $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$, then for each $w \in W_1$ we have an isomorphic embedding $f_w : \Gamma_2 \to \Gamma$ such that $\Gamma = \bigcup\limits_{w \in W_1} f_w(\Gamma_2)$, which restricts to $f_w : X(\Gamma_2) \to X(\Gamma)$, giving the representation $X(\Gamma) = \bigcup\limits_{w \in W_1} f_w(X(\Gamma_2))$. There are also a natural embedding $J : B(\Gamma_1) \to B(\Gamma)$ and projection $\pi : X(\Gamma) \to X(\Gamma_1)$ such that $\pi \circ J = Id|_{B_1}$.

Let Γ_1 be a m-sprout, and put $\Gamma_n = \Gamma_1^n$, and denote by $X_n = X(\Gamma_n)$ the associated topological space. Consider the sequence of projections: $X_1 \xleftarrow{\pi_{1,1}} X_2 \xleftarrow{\pi_{2,1}} ... \xleftarrow{\pi_{n-1,1}} X_n \xleftarrow{\pi_{n,1}} ...$ and let its inverse limit be $X = \varprojlim X_n$. Under certain conditions on the semigroup G_ψ, X is Hausdorff. The space X satisfies the equation $X = \bigcup\limits_{w \in W_1} f_w(X)$, so X is self-similar with respect to the system $\mathcal{S} = \{f_{w_i}, w_i \in W_1\}$. Since all X_n are acyclic connected quasi-compact spaces, the same is true for X. We prove that X is a dendrite, find the conditions of finiteness of its ramification order and show that the arcs, connecting the points in $\nu(I) \subset B$, are the components of an attractor of a graph-directed system:

Theorem 1. *If for any $u \in G_\psi$, then $\#Inv(u) \leq 1$ X is a dendrite.*

Theorem 2. *If the index diagram of Γ does not contain cyclic vertices with outgoing ramification order ≥ 2, then the ramification order for the points of X is bounded.*

Theorem 3. *For any $b, b' \in \nu(I)$ there are unique s and s-tuples $j_1, ..., j_s$, $k_1, ..., k_s$ and $l_1, ..., l_s$ so that*

$$\gamma_{bb'} = \bigcup_{i=1}^{s} f_{w_{j_i}}(\gamma_{b_{k_i} b_{l_i}})$$

The work has been supported by RFBR Grants No. 16-01-00414, No. 18-501-51021.

References

[1] J. Charatonik, W. Charatonik, *Dendrites* // Aportaciones Mat. Comun., **22** (1998), 227–253.
[2] M. Samuel, A. Tetenov, D. Vaulin, *Self-Similar Dendrites Generated by Polygonal Systems in the Plane* // Sib. Electron. Math. Rep., **14** (2017), 737–751.

Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia;
Gorno-Altaysk State University, 1 Lenkina st., Gorno-Altaysk, 649000, Russia
Email address: atet@mail.ru

COMPLEX GOLDEN DIFFERENTIAL GEOMETRY

MUKUT MANI TRIPATHI

We introduce the concept of an almost complex Golden structure on a manifold as follows. A quadratic polynomial structure φ on a manifold M satisfying

$$\varphi^2 - \varphi + I = 0,$$

where φ is a $(1,1)$ tensor filed will be called an *almost complex Golden structure*. In this case, (M, φ) will be called an *almost complex Golden manifold*. Corresponding to an almost complex Golden structure on manifold, we have the number ϕ given by

$$\phi = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} = e^{i\pi/3}$$

and the number $\overline{\phi}$ given by

$$\overline{\phi} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3} = e^{-i\pi/3}.$$

The number ϕ will be called *complex Golden ratio*, while the number $\overline{\phi}$ will be called *conjugate complex Golden ratio*. These numbers are roots of quadratic equation $w^2 - w + 1 = 0$. Several properties of complex Golden ratio and almost complex Golden structure are presented. It is proved that there is a one to one correspondence between the set of all almost complex Golden structures on a manifold M and the set of all almost complex structures on M. Integrability of an almost complex Golden structure is discussed. G-Structures over almost complex Golden manifolds are discussed. Relation between a CR-structure and an almost complex Golden structure is given. Let (M, φ) be an almost complex Golden structure and let g be a Riemannian metric on M. The structure (φ, g) will be called an *almost complex Golden Riemannian structure* on M, if g satisfies

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y)$$

for all vector fields X, Y on M. In this case, (M, φ, g) will be called an *almost complex Golden Riemannian manifold*. Some properties of such Riemannian metrics are presented. The idea of complex Golden space form is presented. Complex Golden conjugate connections are introduced and studied. The talk ends with several interesting problems for further studies.

Banaras Hindu University, Varanasi, 221005, India
Email address: `mmtripathi66@yahoo.com`

ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ СИНГУЛЯРНОЙ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПАВЕЛ АНДРЕЕВ

Сингулярный подход к финслеровой геометрии представлен автором в [1], где приводятся её аксиоматика и некоторые обосновывающие примеры.

Пусть M^n — гладкое многообразие, TM^n — его касательное расслоение. Будем говорить, что непрерывная функция $\mathcal{F}: TM^n \to \mathbb{R}_+$ задаёт на M^n сингулярную финслерову структуру, если

(1) $\mathcal{F}(x,y) > 0$, если вектор $y \in T_xM^n$ — не нулевой;
(2) для любой точки $x \in M^n$ функция $F_x : T_xM^n \to \mathbb{R}_+$ вида $F_x(y) = \mathcal{F}(x,y)$ положительно однородна первой степени, то есть $F_x(\alpha y) = \alpha F_x(y)$ для любого $\alpha \geq 0$ и любого вектора $y \in T_xM^n$;
(3) для любой точки $x \in M^n$ и любых векторов $y, z \in T_xM^n$ выполнено неравенство
$$F_x(y+z) \leq F_x(y) + F_x(z),$$
причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы y и z сонаправлены.

Иначе говоря, $\mathcal{F}$ задаёт на M^n сингулярную финслерову структуру, когда при каждом $x \in M$ функция F_x задаёт на T_xM^n (возможно, несимметричную) строго выпуклую норму, которая непрерывно зависит от x.

Пусть на M^n задана сингулярная финслерова структура. Если $\gamma : [a,b] \to M^n$ — кусочно гладкая кривая, то для любого $t \in [a,b)$ определён вектор положительной скорости $\gamma'_+(t)$ равенством
$$\gamma'_+(\varphi) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{\varphi(\gamma(t+\Delta t)) - \varphi(\gamma(t))}{\Delta t},$$
которое должно выполняться при всех $\varphi \in C^\infty(M^n)$. Положительная длина γ (то есть её длина в положительном направлении) определяется как предел
$$L_+(\gamma) = \lim_{s \to b-0} \int\limits_a^s \mathcal{F}(\gamma(t), \gamma'_+(t))\, dt.$$
Таким образом, сингулярная финслерова структура $\mathcal{F}$ на M^n порождает на M^n (возможно, несимметричную) внутреннюю метрику d_+, в которой расстояние $d_+(u,v)$ для произвольной упорядоченной пары (u,v) при $u, v \in M^n$ равно точной нижней грани положительных длин кусочно гладких кривых из u в v. Если метрическое пространство (M^n, d_+) полно, то оно является геодезическим: любую упорядоченную пару точек (u,v), $u, v \in M^n$ можно соединить в M^n направленным отрезком $[uv\rangle$. Здесь под направленным отрезком понимается образ кусочно гладкой кривой $\gamma : [a,b] \to M^n$, положительная длина которой $L_+(\gamma)$ равна
$$L_+(\gamma) = d_+(\gamma(a), \gamma(b)).$$
Точка $u = \gamma(a)$ — это начало направленного отрезка $[uv\rangle$, точка $v = \gamma(b)$ — его конец. Направленный отрезок $[uv\rangle$ в общем случае определён не однозначно.

Подмножество $A \subset M^n$ называется выпуклым, если для любой упорядоченной пары (u,v) при $u, v \in A$ произвольный направленный отрезок $[uv\rangle$ содержится в A. Выпуклое подмножество $A \subset M^n$ называется строго выпуклым, если при этом все внутренние точки произвольного направленного отрезка $[uv\rangle$ с концами $u, v \in A$ содержатся в его внутренности $\mathrm{Int}(A)$.

Теорема. *Пусть функция $\mathcal{F}$ задаёт на многообразии M^n сингулярную финслерову структуру так, что порождённая ею внутренняя метрика d_+ является полной. Тогда для любой точки $p \in M^n$ существует число $\rho_p > 0$, что для любого радиуса $r < \rho_p$ шары*

$$B_+(p,r) = \{x \in M^n \mid d_+(p,x) \leq r\}$$

строго выпуклы.

Следовательно, полная внутренняя метрика, в которой шары сколь угодно малого радиуса с центром в фиксированной точке не являются строго выпуклыми, не может порождаться сингулярной финслеровой структурой. Примеры внутренних метрик на плоскости с невыпуклыми сколь угодно малыми шарами приведены, например, в [2].

Список литературы

[1] P. Andreev, *Foundations of singular Finsler geometry* // Eur. J. Math., **3**:4, 767–787 (2017).
[2] H. Busemann, B. Phadke, *Nonconvex spheres in G-spaces*// J. Indian Math. Soc., **44**, 39–50 (1980).

Северный (Арктический) федеральный университет, наб. Северной Двины, 17, Архангельск, 163002, Россия
Email address: pdandreevl@mail.ru

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ С ТИПОВЫМИ ЧИСЛАМИ 0 И 1 ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ МАЛЫХ КЛАССОВ ГРЕЯ–ХЕРВЕЛЛЫ

МИХАИЛ БАНАРУ

Кроме класса келеровых многообразий к так называемым малым классам Грея–Хервеллы почти эрмитовых многообразий относят классы приближенно келеровых (nearly Kählerian, NK-), почти келеровых (almost Kählerian, AK-), специальных эрмитовых (special Hermitian, SH-) и W_4-многообразий. Последний класс содержит локально конформные келеровы (locally conformal Kählerian, LCK-) многообразия, а совпадает с классом LCK-многообразий лишь для размерности не ниже шести [1].

Известно [2], что на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. В [3] было установлено, что в келеровом многообразии почти контактная метрическая структура на гиперповерхности с типовым числом 1 (или 1-гиперповерхности) является косимплектической. То есть такой же, как и на вполне геодезической гиперповерхности (или 0-гиперповерхности) в келеровом многообразии. Для приближенно келерова многообразия получены похожие результаты. Именно, доказано, что и на вполне геодезической гиперповерхности, и на гиперповерхности с типовым числом 1 возможна реализация только слабо косимплектической структуры (структуры Эндо) [4]. Далее эти результаты получили развитие для почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий остальных малых классов Грея–Хервеллы: доказано, что в W_4-многообразии [5] (в специальном эрмитовом многообразии [6], в почти келеровом многообразии [7]) почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числами 0 и на гиперповерхности с типовым числом 1 являются идентичными.

Теорема. *В почти эрмитовых многообразиях всех малых классов Грея–Хервеллы почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числами 0 и на гиперповерхности с типовым числом 1 являются идентичными.*

Обратим внимание на то, что если вид почти контактной метрической структуры на 0- и 1-гиперповерхностях келеровых и приближенно келеровых многообразий вполне определен (см. выше), то для многообразий остальных трех классов — нет. Полученные структурные уравнения почти контактной метрической структуры, индуцированной на 0- и 1-гиперповерхностях таких многообразий, не соответствуют ни косимплектической структуре, ни слабо косимплектической структуре, ни структурам Кенмоцу или Сасаки, ни другим видам более или менее известных почти контактных метрических структур [2].

Список литературы

[1] В.Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Одесса: Печатный дом (2013).

[2] В.Ф. Кириченко, М.Б. Банару, *Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры, **127**, 5–40 (2014).

[3] М.Б. Банару, *О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий* // Сибирский математический журнал, **55**:4, 719–723 (2014).

[4] М.Б. Банару, *Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях* // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика, **3**, 60–62 (2014).

[5] М.Б. Банару, *О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4-многообразиях* // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика, **1**, 67–70 (2018).
[6] M.B. Banaru, *A note on geometry of special Hermitian manifolds* // Lobachevskii Journal of Mathematics, **39**:1, 20–24 (2018).
[7] М.Б. Банару, *О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в AK- многообразиях* // Международная научная конференция «Современная геометрия и ее приложения»: сборник трудов. Казань: Изд-во Казанского университета, 27–30 (2017).

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000, Россия
Email address: mihail.banaru@yahoo.com

О ШЕСТИМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

МИХАИЛ БАНАРУ[1], ГАЛИНА БАНАРУ[2]

Систематические исследования в области 6-мерных почти эрмитовых (almost Hermitian, AH-) многообразий проводятся с 60-ых годов прошлого века (А. Грей, Е. Калаби). Позже глубоким работами по этой тематике отметились такие известные геометры как В.Ф. Кириченко и К. Секигава. Данное направление успешно развивается и в наши дни — ежегодно в хороших математических журналах публикуются десятки статей о различных аспектах геометрии 6-мерных почти эрмитовых многообразий. Например, 6-мерным многообразиям только одного из классов Грея–Хервеллы AH-многообразий — класса приближенно келеровых многообразий — посвящено сразу два обзора [1], [2] в одном из последних томов издания «Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры», а также специальный выпуск ведущего журнала в области дифференциальной геометрии [3].

В докладе предполагается провести краткий обзор новых результатов о геометрии приближенно келеровых 6-мерных многообразий (сферы S^6 и произведения сфер $S^3 \times S$). Причем помимо фактов из упомянутых выше источников [1], [2] и [3], будут представлены и другие результаты — как недавно опубликованные [4], [5], так и совсем новые. В основном эти новые результаты связаны с геометрией почти контактных метрических гиперповерхностей 6-мерных приближенно келеровых многообразий. Будет показана связь новых результатов с некоторыми известными фактами в области геометрии 6-мерных AH-многообразий, которые были получены математиками за последние 30 лет [6].

Список литературы

[1] М.Б. Банару, *О шестимерной сфере с приближенно кэлеровой структурой* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры, **146**, 3–16 (2018).

[2] Н.А. Даурцева, Н.К. Смоленцев, *О почти комплексных структурах на шестимерных произведениях сфер* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры, **146**, 17–47 (2018).

[3] *(Non)-existence of complex structures on* S^6 (Edited by Th. Friedrich) // Differential Geometry and its Applications, **57**, 1–146 (2018).

[4] M.B. Banaru, G.A. Banaru, *A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere* // Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series III. Mathematics, Informatics, Physics, **8(57)**:2, 21–28 (2015).

[5] A. Abu-Saleem, M.B. Banaru, G.A. Banaru, *A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere* // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика, **85**:3, 107–114 (2017).

[6] М.Б. Банару, *Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав* // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры, **126**, 10–61 (2014).

[1]Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000, Россия

Email address: mihail.banaru@yahoo.com

[2]Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000, Россия

ОБ АНАЛОГЕ СВЯЗНОСТИ НЕЙФЕЛЬДА В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ С ОДНОИНДЕКСНЫМИ БАЗИСНО-СЛОЕВЫМИ ФОРМАМИ

ОЛЬГА БЕЛОВА

В проективном пространстве P_n рассмотрим пространство Π центрированных m-мерных плоскостей. Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершины A и A_a на центрированную m-плоскость, причем A — в ее центр. Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения: $a, \ldots = \overline{0, m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1, n}$.

Базисные формы ω^α, ω^a, ω^α_a пространства Π удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega^\alpha = \omega^\alpha_a \wedge \Omega^a + \omega^\beta \wedge \Omega^\alpha_\beta,$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \Omega^a_b + \omega^\alpha \wedge \Omega^a_\alpha,$$

$$D\omega^\alpha_a = \omega^\beta_b \wedge \Omega^{\alpha b}_{a\beta} + \omega^\alpha \wedge \Omega_a,$$

где

$$\Omega^a = -\omega^a,\ \Omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta,\ \Omega^a_b = \omega^a_b,\ \Omega^a_\alpha = \omega^a_\alpha,\ \Omega_a = -\omega_a,\ \Omega^{\alpha b}_{\beta a} = \delta^b_a \Omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \Omega^b_a.$$

Замечание. *В данном случае формы ω^a являются базисно-слоевыми.*

Над пространством центрированных плоскостей возникает главное расслоение касательных линейных реперов $L(\Pi)$. Типовым слоем данного расслоения является линейная группа L, $dim L = (n-m)m + m(m+2)$, действующая в касательном пространстве к Π.

В главном расслоении $L(\Pi)$ с многомерным приклеиванием зададим связность Нейфельда способом Лаптева — Лумисте, путем введения новых форм

$$\tilde{\Omega}^a = \Omega^a - \bar{\Gamma}^a_\alpha \omega^\alpha - \bar{\Gamma}^a_b \omega^b - \bar{L}^{ab}_\alpha \omega^\alpha_b,$$

$$\tilde{\Omega}^\alpha_\beta = \Omega^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\gamma - \Gamma^\alpha_{\beta a} \omega^a - L^{\alpha a}_{\beta\gamma} \omega^\gamma_a,$$

$$\tilde{\Omega}^a_b = \Omega^a_b - \Gamma^a_{b\alpha} \omega^\alpha - \Gamma^a_{bc} \omega^c - L^{ac}_{b\alpha} \omega^\alpha_c,$$

$$\tilde{\Omega}^a_\alpha = \Omega^a_\alpha - \Gamma^a_{\alpha\beta} \omega^\beta - \Gamma^a_{\alpha b} \omega^b - L^{ab}_{\alpha\beta} \omega^\beta_b,$$

$$\tilde{\Omega}_a = \Omega_a - L_{a\alpha} \omega^\alpha - L_{ab} \omega^b - \Pi^b_{a\alpha} \omega^\alpha_b.$$

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена данного многообразия полями следующих геометрических образов: $(n-m-1)$-плоскостью P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с центрированной плоскостью, и $(m-1)$-плоскостью P_{m-1}, принадлежащей центрированной плоскости и не проходящей через ее центр.

Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$, а плоскость P_{m-1} — точками $B_a = A_a + \lambda_a A$.

Аналог сильной нормализации Нордена, задаваемой полем квазитензора $\lambda = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_a\}$ на многообразии Π, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Аналог сильной нормализации пространства центрированных плоскостей Π индуцирует аналог связности Нейфельда в ассоциированном расслоении $L(\Pi)$.*

Балтийский федеральный университет имени И. Канта, ул. А. Невского, 14, Калининград, 236041, Россия

Email address: olgaobelova@mail.ru

О R-ДЕРЕВЕ УРЫСОНА

В.Н. БЕРЕСТОВСКИЙ

Заметка П.С. Урысона [1] относится к 1924 г. и перед публикацией отредактирована П.С.Александровым уже после смерти Урысона [2]. Целью этой заметки, как следует уже из ее названия, было построение метрического пространства R, не локально сепарабельного всюду. Мне не известно ни одной ссылки в литературе на заметку [1] ([2]), где утверждалось бы, что R — $\mathbb{R}$-дерево, т.е. геодезическое пространство, не содержащее топологических окружностей. На эту заметку обратил мое внимание К.В. Сторожук.

Можно дать следующее описание пространства R: $R = \cup_{n\in\{0\}\cup\mathbb{N}} R_n$, где $R_0 = \{0\}$, а R_{n+1} получается из R_n прикреплением к каждой точке $x_n \in R_n$ пространства C_{x_n}, являющегося объединением континуального семейства замкнутых полупрямых $\mathbb{R}_+$, попарно пересекающихся только по нулю. При этом $C_{x_n} \cap R_n = \{x_n\}$; $C_{x_n} \cap C_{y_n} = \emptyset$, если $x_n \neq y_n \in R_n$. Отсюда следует, что *любые две точки* $x, y \in R$ *можно соединить в* R *единственным топологическим отрезком* $[x, y]$ некоторой *длины* $d(x, y)$.

В анонсе автора [3] строится группа Ω с левоинвариантной метрикой σ. Элементами Ω являются конечные последовательности $\xi = (z_1, \dots, z_n)$ ненулевых комплексных чисел с добавлением нуля (0) и правилом сокращения $(z_k, z_{k+1}) = (1 + t)z_k$, если $z_{k+1} = tz_k$, $t \in \mathbb{R}$. Умножение в Ω задается правилом $\xi\xi' = (z_1, \dots, z_n, z'_1, \dots, z'_m)$ для $\xi' = (z'_1, \dots, z'_m)$ с последующим сокращением и единицей (0) . Формулы

$$\sigma(\xi, \xi') = l(\xi^{-1}\xi'), \quad l(\xi) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|,$$

в предположении, что ξ не допускает сокращений, определяют левоинвариантную метрику σ на Ω. Помимо других утверждений, в Предложении 1 из [1] анонсируется, что (Ω, σ) есть $\mathbb{R}$-дерево. Элементы пространства Ω — не что иное как ломаные на комплексной (евклидовой) плоскости с началом в нуле.

Теорема 1. *Построенное в анонсе автора [3]* $\mathbb{R}$*-дерево* (Ω, σ) *и* $\mathbb{R}$*-дерево* (S, d_S) *из работы Полтеровича и А.И. Шнирельмана [4] изометричны* $\mathbb{R}$*-дереву Урысона* (R, d).

Следствие. $\mathbb{R}$*-дерево Урысона* (R, d) *однородно.*

Предложение. $\mathbb{R}$*-дерево Урысона* (R, d) *самоподобно с любым коэффициентом* $\lambda > 0$, *т.е. для любого* $\lambda > 0$ *существует биекция* $f_\lambda : R \to R$ *такая, что* $d(f_\lambda(x), f_\lambda(y)) = \lambda d(x, y)$ *для всех* $x, y \in R$.

Теорема 2. $\mathbb{R}$*-дерево* (R, d) *метрически неполно. Хаусдорфово пополнение* $\overline{R}$ *метрического пространства* (R, d) — $\mathbb{R}$*-дерево. При этом* $\overline{R} \setminus R$ *всюду плотно в* $\overline{R}$. *Кроме того, точка* $y \in \overline{R}$ *содержится в* $\overline{R} \setminus R$ *тогда и только тогда, когда* y *имеет валентность 1, т.е. множество* $\overline{R} \setminus \{y\}$ *имеет одну компоненту связности. Все точки* (R, d) *имеют валентность континуум.*

Можно считать, что $\overline{R} = R_\omega$, где ω — первое бесконечное порядковое число, являющееся предельным числом для порядковых чисел n, $n \in \mathbb{N}$. Напомним, что $R = \cup_n R_n$. Аналогично доказывается следующая теорема.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства Образования и Науки Российской Федерации (Проект № 1.3087.2017/4.6).

Теорема 3. *Применение транфинитной индукции, конструкции Урысона для порядковых чисел, имеющих предшественника, и хаусдорфова пополнения объединения для счетных предельных порядковых чисел дает полное $\mathbb{R}$-дерево $(R_{\mathfrak{c}},\tau)$ валентности континуум, являющееся объединением $\mathbb{R}$-деревьев R_ξ для всех счетных порядковых чисел ξ;* $\dim(R_{\mathfrak{c}},\tau)=1$.

(*Слабая*) *субметрия* — отображение $f:X\to Y$ метрических пространств, отображающее каждый замкнутый (соответственно, открытый) шар в X с центром x на замкнутый (соответственно, открытый) шар в Y того же радиуса с центром $f(x)$. Отображение f называется *легким*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y\in Y$ вполне несвязен. Сюръективное отображение $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ называется *метрическим фактор-отображением*, если

$$d_Y(y_1,y_2)=\inf\{d_X(x_1,x_2):x_i\in f^{-1}(y_i), i=1,2\}$$

для всех $y_1,y_2\in Y$. Группа называется *локально свободной*, если каждая ее конечно порожденная группа свободна.

Теорема 4. [5] *Если (X,d) — полное риманово многообразие размерности ≥ 2, губка Менгера, ковер или салфетка Серпинского, снабженные естественной внутренней метрикой, то (X,d) есть метрическое фактор-пространство $\mathbb{R}$-дерева $\widetilde{X}:=(R_{\mathfrak{c}},\tau)$, пространство орбит относительно свободного действия некоторой локально свободной подгруппы $\Gamma(X)$ группы изометрий $Isom(\widetilde{X})$ пространства $\widetilde{X}$. Соответствующее фактор-отображение, проекция $p:\widetilde{X}\to X$, — субметрия, являющаяся открытым и легким отображением.*

Теорема 5. [6] *$\mathbb{R}$-дерево $R_{\mathfrak{c}}$ самоподобно с любым коэффициентом $\lambda>0$ и однородно. Кроме того, каждая сфера в $R_{\mathfrak{c}}$ однородна и любая ее изометрия на себя продолжается до изометрии всего $\mathbb{R}$-дерева $R_{\mathfrak{c}}$. Для любых $x\in R_{\mathfrak{c}}$ и $r>0$ сфера $S(x,r)\subset R_{\mathfrak{c}}$ является полным ультраметрическим пространством. При этом замкнутый шар $B(x,r)\subset R_{\mathfrak{c}}$ является минимальным $\mathbb{R}$-деревом с границей $S(x,r)$. Сфера $S(x,r)$, $r>0$, в $(R_{\mathfrak{c}},\tau)$ не имеет изолированных точек и для каждого числа s, где $0<s<r$, существует сюръекция $h:S(x,r)\to S(x,r)$ такая, что для всех $y,z\in S(x,r)$,*

$$\tau(h(y),h(z))=\frac{r}{s}\max\{0,\tau(y,z)-2(r-s)\}.$$

Список литературы

[1] P.S. Urysohn, *Beispiel eines nirgends separablen metrischen Raumes* // Fund. math., **9**, 119–121 (1927).

[2] П.С. Урысон, *Пример метрического пространства, нигде не удовлетворяющего второй аксиоме счетности* // П.С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики. Т. II. ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 778–780 (1951).

[3] В.Н. Берестовский, *Квазиконусы пространств Лобачевского в бесконечности* // Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И.Мальцева (1909-1967) (Новосибирск, 21-26 августа 1989 г.) Алгебраическая геометрия, Алгебраические методы в геометрии, анализе, теоретической физике. Прикладная и компьютерная алгебра. Тезисы докладов. Новосибирск, С. 9 (1989).

[4] И.В. Полтерович, А.И. Шнирельман,*Асимптотический подконус плоскости Лобачевского как пространство функций* // УМН, **52(316)**:4, 209–210 (1997).

[5] V.N. Berestovskii, C.P. Plaut, *Covering* $\mathbb{R}$*-trees,* $\mathbb{R}$*-free groups, and dendrites* // Adv. Math., **224**:5, 1765–1783 (2010).

[6] В.Н. Берестовский, *Ultrametric spaces* // Труды по анализу и геометрии (Новосибирск, Академгородок, 1999), Изд.-во Росс. Акад. Наук, Сиб. отд., Инст. Мат., Новосибирск, 47–72 (2000).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т акад. Коптюга, 4, 630090, Россия;
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия

Email address: vberestov@inbox.ru

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПО РАНГУ (n + 1, 2) ВЛОЖЕНИЕ ДВУМЕТРИЧЕСКИХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ ДВУХ МНОЖЕСТВ

РАДА БОГДАНОВА[1], ГЕННАДИЙ МИХАЙЛИЧЕНКО[2]

Двумерная феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n+1,2)$ задается на двумерном и $2n$-мерном многообразиях M и N метрической (двухточечной) функцией $f : M \times N \to R^2$, сопоставляющей паре точек из *разных* множеств два действительных числа. Если x, y и $\xi, \eta, \mu, \nu, ...$ – локальные координаты в многообразиях M и N, то для двухкомпонентной метрической функции $f = (f^1, f^2)$ можно записать ее локальное координатное представление

$$f = f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu, ...) \tag{1}$$

Предполагается выполнение следующих трех естественных аксиом:

Аксиома 1. *Область определения функции f открыта и плотна в $M \times N$.*

Аксиома 2. *В области своего определения функция f достаточно гладкая.*

Аксиома 3. *Координатное представление* (1) *функции f невырождено относительно двух координат x, y и относительно $2n$ – координат $\xi, \eta, \mu, \nu, ...$.*

Невырожденность метрической функции в ее координатном представлении (1) выражается необращением в нуль некоторых якобиянов. Например, невырожденность относительно координат x, y записывается условием $\partial(f^1, f^2)/\partial(x, y) \neq 0$.

Основной аксиомой, определяющей ДФС ГДМ ранга $(n+1,2)$, является четвертая:

Аксиома 4. *Для плотного и открытого в $M^{n+1} \times N^2$ множества кортежей длины $n+3$ все $4(n+1)$ значений метрической функции связаны уравнением*

$$\Phi = 0, \tag{2}$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ – двухкомпонентная функция $4(n+1)$ переменных с $rank\Phi = 2$.

В работе [1] и в §7 монографии [2] проведена полная классификация ДФС ГДМ ранга $(n+1,2)$ с точностью до замены координат в многообразиях и преобразованиях $\chi(f) \to f$:

для $n = 1$:

$$f^1 = x + \xi, \quad f^2 = y + \eta; \tag{3}$$

$$f^1 = (x + \xi)y, \quad f^2 = (x + \xi)\eta; \tag{4}$$

для $n = 2$:

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + \nu, \quad \varepsilon = 0, \pm 1; \tag{5}$$

$$f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi^c + \nu, \quad c \neq 1; \tag{6}$$

$$f^1 = x\xi + \mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 ln\xi + \nu; \tag{7}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu, \quad f^2 = x\eta + y\nu; \tag{8}$$

для $n = 3$:

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(x+\rho) - \varepsilon(x\eta + y\xi + \nu)(y+\tau)}{(x+\rho)^2 - \varepsilon(y+\tau)^2}, \\ f^2 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(y+\tau) - (x\eta + y\xi + \nu)(x+\rho)}{(x+\rho)^2 - \varepsilon(y+\tau)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$;

$$f^1 = \frac{x\xi + \mu}{x + \rho}, \quad f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x + \rho}; \tag{10}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu + \rho, \quad f^2 = x\eta + y\nu + \tau; \tag{11}$$

для $n = 4$

$$f^1 = \frac{x\xi + y\mu + \rho}{x\varphi + y + \omega}, \quad f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x\varphi + y + \omega}; \tag{12}$$

для $n = 5$ двухкомпонентная метрическая функция $f = (f^1, f^2)$ не существует.

Пусть метрическая функция $g = (g^1, g^2)$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, а метрическая функция $f = (f^1, f^2)$ задает ДФС ГДМ следующего ранга $(n + 2, 2)$, где $n = 1, 2, 3$. Будем говорить, что первая из этих геометрий вложена во вторую, если в пределах точности классификации (3) - (12) имеет место функциональное соотношение

$$f = \chi(g, ...), \tag{13}$$

где справа тремя точками обозначены те дополнительные две координаты, которые появляются при переходе от функции g к функции f.

Теорема. *Каждая из ДФС ГДМ ранга* $(n + 2, 2)$*, где* $n = 1, 2, 3$*, включает в себя, по крайней мере, одну из ДФС ГДМ предыдущего ранга* $(n + 1, 2)$.

Доказательство теоремы, очевидно, состоит в предъявлении явной записи соотношения (13), выражающего факт соответствующего вложения.

Предположим сначала, что $n = 1$. Форма записи соотношения (13) в этом случае станет более определенной, приобретая следующий вид:

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = \chi[g(x, y, \xi, \eta), \mu, \nu], \tag{14}$$

где $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi, \eta, \mu, \nu)$, причем метрическая функция g в правой части берется из списка (3) - (4), а метрическая функция f в левой части из списка (5) - (8).

Соотношение (14) является функциональным уравнением относительно шести функций $\bar{x}, \bar{y}$ и $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$, которые определяют замену координат в многообразиях M и N, удовлетворяя естественным условиям ее обратимости:

$$\partial(\bar{x}, \bar{y})/\partial(x, y) \neq 0, \quad \partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu})/\partial(\xi, \eta, \mu, \nu) \neq 0. \tag{15}$$

Ниже для рассматриваемого случая $n = 1$ и $g = (g^1, g^2) = (x + \xi, y + \eta)$ запишем четыре пары функционального уравнения (14) и их частные решения, удовлетворяющие условиям (15):

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}\bar{\xi} + \varepsilon\bar{y}\bar{\eta} + \bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi} + \bar{\nu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \end{array}\right\}$$

$\bar{\xi} = x,\ \bar{y} = y,\ \bar{\xi} = \mu,\ \bar{\eta} = \nu,\ \bar{\mu} = \xi\mu + \varepsilon\eta\nu,\ \bar{\nu} = \xi\nu + \eta\mu;$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}^c + \bar{\nu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \end{array}\right\}$$

$\bar{\xi} = x,\ \bar{y} = y,\ \bar{\xi} = \mu,\ \bar{\eta} = \nu,\ \bar{\mu} = \xi\mu,\ \bar{\nu} = \varepsilon\mu + \eta\mu^c;$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}^2 + \bar{x}^2\bar{\xi}^2 ln\bar{\xi} + \bar{\nu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \end{array}\right\}$$

$\bar{\xi} = x,\ \bar{y} = y,\ \bar{\xi} = \mu,\ \bar{\eta} = 2\mu^2\xi ln\mu,\ \bar{\mu} = \xi\mu,\ \bar{\nu} = \xi\nu + \eta\mu^2 + \xi^2\mu^2 ln\mu;$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}\bar{\xi} + \bar{y}\bar{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \\ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\nu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu), \end{array}\right\}$$

$\bar{x} = \exp x,\ \bar{y} = \exp y,\ \bar{\xi} = \mu \exp \xi,\ \bar{\eta} = \mu^2 \exp \xi,\ \bar{\mu} = \nu \exp \eta,\ \bar{\nu} = \nu^2 \exp \eta.$

Таким образом, ДФС ГДМ ранга (2,2), задаваемая аддитивной метрической функцией (3), вложима во все ДФС ГДМ ранга (3,2), задаваемые метрическими функциями (5) - (8).

Перейдем далее к случаю $n = 2$. Соотношение (13) записывается тогда в следующем виде:

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\tau}) = \chi[g(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu), \rho, \tau], \tag{16}$$

представляя собой функциональное уравнение относительно восьми функций $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau)$, удовлетворяющих условиям:

$$\partial(\bar{x}, \bar{y})/\partial(x, y) \neq 0, \quad \partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\tau})/\partial(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau) \neq 0. \tag{17}$$

В левой части уравнения (16) представлена одна из функций (9), (10), (11), задающих ДФС ГДМ ранга (4,2), а в правой – одна из метрических функций (5), (6), (7), (8), задающих ДФС ГДМ ранга (3,2). Для доказательства теоремы, очевидно, нет необходимости рассматривать все двенадцать вариантов функционального уравнения (16). Достаточно рассмотреть только те из них, которые в своей левой части включают функции (9), (10), (11), причем явную запись функциональных уравнений, выражающих факт вложения, в последующем изложении опустим.

Для вложения метрической функции (5) в метрическую функцию (9):

$\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{\xi} = \rho$, $\bar{\eta} = \tau$, $\bar{\mu} = [(1 + \mu\rho + \varepsilon\nu\tau)\xi - \varepsilon(\mu\tau + \nu\rho)\eta)]/(\xi^2 - \varepsilon\eta^2)$, $\bar{\nu} = [-(1+\mu\rho+\varepsilon\nu\tau)\eta+(\mu\tau+\nu\rho)\xi)]/(\xi^2-\varepsilon\eta^2)$, $\bar{\rho} = (\mu\xi-\varepsilon\nu\eta)/(\xi^2-\varepsilon\eta^2)$, $\bar{\tau} = (-\mu\eta+\nu\xi)/(\xi^2-\varepsilon\eta^2)$.

Для вложения метрической функции (8) в метрическую функцию (11):

$\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{\xi} = \xi$, $\bar{\eta} = \eta$, $\bar{\mu} = \mu$, $\bar{\nu} = \nu$, $\bar{\rho} = \rho$, $\bar{\tau} = \tau$.

Для вложения метрической функции (8) в метрическую функцию (10):

$\bar{x} = x/y$, $\bar{y} = 1/y$, $\bar{\xi} = \xi/\eta$, $\bar{\eta} = (\xi\rho+\eta\tau)/\eta$, $\bar{\mu} = \mu/\eta$, $\bar{\nu} = 1/\eta$, $\bar{\rho} = \nu/\eta$, $\bar{\tau} = (\mu\rho+\nu\tau)/\eta$.

Завершая доказательство теоремы перейдем к случаю $n = 3$ для установления вложения одной из трех ДФС ГДМ ранга (4,2) в единственную ДФС ГДМ ранга (5,2). Соответствующее функциональное уравнение, вытекающее из соотношения (13), будет следующим:

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\tau}, \bar{\varphi}, \bar{\omega}) = \chi[g(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau), \varphi, \omega], \tag{18}$$

где в левой части представлена метрическая функция (12), а в правой – какая-то из метрических функций (9), (10), (11). Независимыми в уравнении (18) являются десять функций: $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega)$, удовлетворяющих условиям:

$$\partial(\bar{x}, \bar{y})/\partial(x, y) \neq 0, \quad \partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\tau}, \bar{\varphi}, \bar{\omega})/\partial(\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega) \neq 0. \tag{19}$$

Для вложения метрической функции (11) в метрическую функцию (12):

$\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{\xi} = \xi/\nu$, $\bar{\eta} = (\xi\varphi + \eta\omega)/\nu$, $\bar{\mu} = \mu/\nu$, $\bar{\nu} = (\mu\varphi + \nu\omega)/\nu$, $\bar{\rho} = \rho/\nu$, $\bar{\tau} = (\rho\varphi + \tau\omega + 1)/\nu$, $\bar{\varphi} = \eta/\nu$, $\bar{\omega} = \tau/\nu$.

В приведенном доказательстве теоремы были использованы частные решения восьми пар функциональных уравнений из 23 возможных. Рассмотрение же всех этих уравнений позволило бы установить какие ДФС ГДМ и куда могут быть вложены, а какие нет, по наличию или отсутствию их решений. Например, для случая $n = 1$, было установлено, что ДФС ГДМ ранга (2,2), задаваемая неаддитивной метрической функцией (4), тоже вложима во все ДФС ГДМ ранга (3,2) [3].

Заметим, что аналогичная задача для одномерических феноменологически симметричных ГДМ была решена В.А. Кыровым в работе [4].

Список литературы

[1] Г.Г. Михайличенко, *Двуметрические физические структуры ранга (n+1,2)* // Сиб. матем. журн., 1993, Т.34, № 3, С. 132–143; Siberian Math. J., **34**:3, 513–522 (1993).

[2] Г.Г. Михайличенко, *Групповая симметрия физических структур: монография* // Барнаул, БГПУ, 2003.

[3] В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко, *К вопросу о вложении ДФС ГДМ ранга (2,2) в ДФС ГДМ ранга (3,2)* // Материалы международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае (14 – 17 ноября) Барнаул, 299–304 (2017).

[4] В.А. Кыров, *Вложение феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга (N,2) в феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (N+1,2)* // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, **26**:3, 312–323 (2016).

[1]Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

Email address: bog-rada@yandex.ru

[2]Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

Email address: mikhailichenko@gasu.ru

КОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ БИ-МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ С ПРОДОЛЖЕННОЙ МЕТРИКОЙ

АЛИЯ БУКУШЕВА

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем почти контактной Би-метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Кораспределение D^* многообразия M, состоящее из допустимых 1-форм: $\lambda \in D^* \leftrightarrow \lambda(\vec{\xi}) = 0$ является нечетномерным аналогом кокасательного расслоения T^*M. Геометрия кокасательного расслоения T^*M Би-метрического многообразия хорошо изучена (см., например, [1]). В статье [2] было положено начало изучению геометрических структур, определяемых на кораспределении D^* почти контактного метрического многообразия. В настоящей работе вводятся основные понятия геометрии кораспределения почти контактного Би-метрического многообразия с продолженной метрикой.

Введем на кораспределении D^* структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ [2] многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, p_a)$ многообразия D^*, где p_a — координаты допустимого ковектора в кобазисе $(dx^a, \eta = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$, сопряженном базису $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n, \partial_n)$.

Используя внутреннюю связность ∇ [3-5], поставим каждому допустимому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(D)$, $\vec{x} = x^a \vec{e}_a$, и каждому допустимому ковекторному полю $\lambda \in \Gamma(D^*)$, $\lambda = \lambda_a dx^a$, векторные поля $\vec{x}^h = x^a \vec{\varepsilon}_a$, $\lambda^v = \lambda_a \partial^a$ соответственно, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n + p_b \Gamma^b_{ac} \partial^c$, $\partial^a = \frac{\partial}{\partial p_a}$.

На тотальном пространстве D^* векторного расслоения (D^*, π, M), где $\pi : D^* \to M$ — естественная проекция, таким образом, возникает гладкое распределение $\tilde{D} = H \oplus V$, где $H = Span(\vec{\varepsilon}_a)$, $V = Span(\partial^a)$.

Определим на многообразии D^* метрический тензор G и допустимую почти комплексную структуру J, полагая

$$G(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = g(\vec{x}, \vec{y}),\ G(\vec{x}^h, \lambda^v) = G(\lambda^v, \vec{x}^h) = \lambda(\vec{x}),\ G(\vec{u}, \cdot) = G(\cdot, \vec{u}) = \mu(\cdot),$$

$$J(\vec{x}^h) = (\varphi \vec{x})^h,\ J(\lambda^v) = (\omega \cdot \varphi)^v,\ J(\vec{u}) = 0.$$

Используя структурные уравнения

$$[\vec{\varepsilon}_a,\ \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + p_c R^c_{abe} \partial^e,$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial^b] = -\Gamma^b_{ac} \partial^c,$$

$$[\vec{\varepsilon}_a,\ \partial_n] = -p_b \partial_n \Gamma^b_{ac} \partial^c,$$

где R^c_{abe} — компоненты тензора Схоутена [2], после некоторых вычислений убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Предложение 1. *Система $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ является почти контактной Би-метрической структурой.*

Предложение 2. *Система $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ принадлежит классу F_0 [6] тогда и только тогда, когда исходная Би-метрическая структура принадлежит тому же классу и ее тензор кривизны Схоутена обращается в нуль.*

Список литературы

[1] A. Gezer, L. Bilen, A. Cakmak Properties of modified Riemannian extensions // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., **11**:2, 159–173 (2015).

[2] С. Галаев, *Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **17**:2, 138–147 (2017).

[3] А. Букушева, С. Галаев, *Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **12**:3, 17–22 (2012).

[4] А. Букушева, *Слоения на распределениях с финслеровой метрикой* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **14**:3, 247–251 (2014).

[5] A. Bukusheva, S. Galaev, *Almost contact metric structures defined by connection over distribution* // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics, **4(53)**:2, 13–22 (2011).

[6] G. Ganchev, V. Mihova, K. Gribachev, *Almost contact manifolds with B-metric* // Math. Balkanica (N.S.), **7**:3-4, 261–276 (1993).

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

Email address: bukusheva@list.ru

ОБОБЩЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА

АНАТОЛИЙ ВОРОНИН

Обобщенная краевая задачи Римана (известная также под названием задачи Маркушевича или задачи $\mathbb{R}$ - линейного сопряжения) на контуре $\Gamma \subset R^2$ состоит в определении функций $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$, аналитических внутри и вне Γ, соответственно, по граничному условию на Γ

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t), \qquad (*)$$

где a, b, c — заданные функции ($a \in C(\Gamma),\ a(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$).

Обобщенная краевая задачи Римана (*) привлекает внимание исследователей с первой половины прошлого века. С одной стороны, задача является фундаментальной проблемой в теории краевых задач для аналитических функций. С другой стороны, задача тесно связана с рядом нерешенных проблем в механике сплошной среды, анализе, геометрии поверхностей и математической физике. При этом, сама задача имеет простую формулировку.

Краевой задаче (*) и ее непосредственным обобщениям при различных предположениях о классах коэффициентов и граничных контуров посвящено много работ. Их обзор можно найти в [1]. Первые результаты изучения задачи (*) получены в работах Н.И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа и А.К. Рукхадзе, Г.М. Голузина, А.И. Маркушевича, Н.П. Векуа, Б.В. Боярского, Л.Г. Михайлова, И.Х. Сабитова, Г.С. Литвинчука и И.М. Спитковского. На настоящий момент нет общей теории задачи (*), известны лишь отдельные результаты, которые, в своей основе, получены еще в прошлом веке на начальном пути исследования задачи.

Хорошо известно, что различные краевые задачи для аналитических функций (в частности, задача (*)) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма и к сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши (см. исторические сведения в [2]). На этом пути были получены классические результаты по корректности краевых задач для аналитических функций [1],[2]. Однако, в общем случае, эти интегральные уравнения оказались не менее сложными для дальнейшего исследования чем исходные краевые задачи.

В данном докладе предлагается исследовать обобщенную краевую задачу Римана с помощью усеченного уравнения Винера-Хопфа (интегрального уравнения в свертках второго рода на конечном интервале). Здесь задача (*) будет сведена к усеченному уравнению Винера-Хопфа. Класс уравнений в свертках второго рода на конечном интервале является одним из наиболее изученных в более общем классе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Поэтому, можно ожидать, что идея такого сведения приведет к новым результатам в исследовании искомой краевой задачи (*).

В качестве контура Γ будем рассматривать замкнутую жорданову кривую. Не уменьшая общности считаем, что контур Γ совпадает с расширенной вещественной прямой $\mathbb{R}$ в комплексной плоскости $x + iy$.

Прежде чем перейти непосредственно к точной формулировке изучаемой задачи введем необходимые обозначения.

Положим $\mathcal{F}f$ — образ Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt,\ x \in \mathbb{R};$$

W_0 — алгебра Винера непрерывных функций вида $\mathcal{F}f$; W_{0+} (W_{0-}) — подалгебра в W_0, состоящая из функций вида $\mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$); $W := \{C + \mathcal{F}f : C = const\}$.

Рассмотрим обобщенную краевую задачу Римана о нахождении функций $\varphi^{\pm} \in W_{0\pm}$ по краевому условию на $\mathbb{R}$:

$$\varphi^+(x) = a(x)\varphi^-(x) + b(x)\overline{\varphi^-(x)} + c(x), \ x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где

$$a, b \in W, \quad a(x) \neq 0, \ x \in \mathbb{R}, \ c \in W_0. \tag{2}$$

Рассмотрим также усеченное уравнение Винера-Хопфа на конечном интервале $(0, \tau)$:

$$u(t) - \int_0^\tau k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0, \tau), \tag{3}$$

где

$$k \in L_1(-\tau, \tau), \quad f \in L_1(0, \tau), \ \tau > 0. \tag{4}$$

Считаем, что ядро k обладает следующими свойствами:

$$k(t) = k_-(t) + \overline{k_-(-t)}, \ t \in (-\tau, \tau), \tag{5}$$

где $k_-(t) = \theta(-t)k(t)$, θ – функция Хевисайда,

$$\Lambda^-(x) := 1 - \mathcal{F}k_-(x) \neq 0, \ x \in R, \ \operatorname{Ind}\Lambda^-(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\Delta_{\mathbb{R}} \arg \Lambda^-(x) = 0, \tag{6}$$

где $k_-(t) := 0, \ t \overline{\in} (-\tau, 0)$.

Решение $u(t)$ уравнения (3) при условиях (4)-(6) будем искать в $L_1(0, \tau)$.

Имеет место

Теорема. *Пусть выполнены условия (4)-(6) и* $\operatorname{Ind} a(x) = 0$. *Если коэффициент b задачи Маркушевича (обобщенной задачи Римана) (1)-(2) имеет следующий общий вид:*

$$b(x) = e^{-ix\tau}\frac{\overline{\mathcal{F}k_-(x)}}{1 - \overline{\mathcal{F}k_-(x)}} + F^+(x),$$

где $F^+ \in W_+$,

то задача Маркушевича (1)-(2) корректно разрешима для любого $c \in W_0$ (решение существует, единственно и устойчиво по отношению к коэффициентам задачи a, b, c в норме алгебры Винера) тогда и только тогда, когда однородное (f=0) усеченное уравнение Винера-Хопфа (3) имеет только тривиальное решение.

Отметим, что расширенный вариант данного доклада изложен в [3].

Список литературы

[1] Vladimir V. Mityushev, $\mathbb{R}$-linear and Riemann–Hilbert Problems for Multiply Connected Domains // Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics, 147—176 (2012).

[2] F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems* // Dover Publication Inc., New-York, 1990.

[3] A. F. Voronin, On the connection between the generalized Riemann boundary value problem and the truncated Wiener-Hopf equation // Siberian Electronic Mathematical Reports, **15**, 412 – 421 (2018).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т акад. Коптюга, 4, 630090, Россия
Email address: voronin@math.nsc.ru

О ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА РАССЛОЕНИЯ ДОПУСТИМЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ РЕПЕРОВ

СЕРГЕЙ ГАЛАЕВ

Пусть M — ориентированное двумерное риманово многообразие. Пространство расслоения $(P(M,D,G),p,M)$ ортонормированных реперов этого многообразия рассматривалось в работах [1, 2] как неголономное многообразие коразмерности 1. В настоящей заметке изучается главное расслоение $(P(M,D,G),p,M)$ допустимых [3-5] ортонормированных реперов над трехмерным контактным метрическим многообразием M. Тотальное пространство $P(M,D,G)$ расслоения допустимых ортонормированных реперов $(P(M,D,G),p,M)$ такого многообразия является гладким многообразием размерности четыре. Задание внутренней связности ∇ [3] на многообразии M определяет на пространстве $P(M,D,G)$ структуру метрического неголономного многообразия (субриманова многообразия) (P,g) с распределением H коразмерности 2. Переход от внутренней связности ∇ к соответствующей ассоциированной связности $\tilde{\nabla}$ [3] позволяет рассматривать пространство $P(M,D,G)$ как метрическое неголономное многообразие $(\tilde{P},\tilde{g})$ с распределением $\tilde{H}$ коразмерности 1. К каждому из метрических неголономных многообразий (P,g), $(\tilde{P},\tilde{g})$ может быть применена конструкция В.В. Вагнера [2], превращающая эти многообразия в римановы многообразия. Останавливаясь на случае многообразия $(\tilde{P},\tilde{g})$, мы находим связь между свойствами геометрии многообразия $(\tilde{P},\tilde{g})$ и тензором кривизны Схоутена исходного многообразия M. На многообразии $(\tilde{P},\tilde{g})$ определяется структура почти комплексного многообразия с помощью эндоморфизма J, определяемого посредством равенств:

$$J\vec{x}^h=(\varphi\vec{x})^h,\ J\vec{x}^v=(\varphi\vec{x})^v,\ J\vec{\xi}^h=\vec{c},\ J\vec{c}=-\vec{\xi}^h,$$

где $\vec{c}$ — фундаментальное векторное поле. Определим, далее, метрический тензор $\tilde{g}$ с помощью равенства $\tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^h)=g(\vec{x},\vec{y})$. При этом векторы $\vec{\xi}$, $\vec{c}$ полагаем равными по длине единице, ортогональными между собой и ортогональными горизонтальному распределению, порождаемому внутренней связностью.

Имеют место следующие утверждения.

Предложение. *Многообразие $(\tilde{P},\tilde{g})$ с заданным на нем эндоморфизмом J является почти эрмитовым многообразием.*

Теорема. *Пусть M — сасакиево многообразие. Тогда почти эрмитова структура $(\tilde{P},\tilde{g},J)$ кэлерова тогда и только тогда, когда тензор Схоутена многообразия M равен нулю.*

Список литературы

[1] С. Галаев, А. Гохман *Обобщенные гамильтоновы системы на многообразиях со связностью* // Математика. Механика, **2**, 16–19 (2000).

[2] J. Arteaga, M. Malakhaltsev, A. Serna, *Isometry group and geodesics of the Wagner lift of a Riemannian metric on two-dimensional manifold* // Lobachevskii J. Math., **33**:4, 293–311 (2012).

[3] С. Галаев, *Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой* // Вестник Башкирского университета, **21**:3, 551–555 (2016).

[4] А. Букушева, *Слоения на распределениях с финслеровой метрикой* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **14**:3, 247–251 (2014).

[5] A. Bukusheva, S. Galaev, *Almost contact metric structures defined by connection over distribution* // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics, **4(53)**:2, 13–22 (2011).

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия

Email address: sgalaev@mail.ru

ОБ ИНТЕГРИРОВАННОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ОКРУЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В. П. ИЛЬИН

Рассматриваются актуальные проблемы и концепция создания интегрированной инструментальной среды для автоматического построения высокопроизводительных алгоритмов вычислительной геометрии при решении широкого класса прямых и обратных многомерных задач суперкомпьютерного математического моделирования со сложной многомасштабной конфигурацией кусочно-гладких граничных поверхностей, контрастными свойствами материальных сред и жесткими динамическими характеристиками решений. Разрабатываемое программное обеспечение рассчитано на длительный жизненный цикл и поддерживает гибкое расширение состава реализуемых постановок, методов и технологий, адаптацию к эволюции компьютерных архитектур, согласованное участие в проекте различных групп исполнителей, а также возможности эффективного переиспользования внешних продуктов, в том числе систем автоматизации проектирования (САПР, CAD, CAE и т. д.), овеществляющих результаты многих сотен человеко-лет квалифицированного труда. Описываемые геометрические объекты макроуровня (расчетные области решаемых начально-краевых задач) и микроуровня (сетки с миллиардами конечных элементов) требуют реализации высокоинтеллектуальных теоретико-множественных, дифференциально-аналитических и топологических подходов, а также средств работы с большими данными и масштабируемого распараллеливания на гетерогенных многопроцессорных вычислительных системах. Создание рассматриваемого интегрируемого математического и программного обеспечения ориентировано на широкое внедрение в практику моделирования реальных процессов и явлений из всевозможных индустриальных, естественнонаучных и социально-экономических сфер, а также призвано качественно повысить производительность труда математиков-программистов и эффективность математических инноваций в различные научно-технические и производственные отрасли.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр. Академика Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск, Россия;

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия

Email address: ilin@sscc.ru

СУММЫ ФЕЙЕРА ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ФОН НЕЙМАНА

АЛЕКСАНДР КАЧУРОВСКИЙ

Суммы Фейера периодических мер и нормы отклонений от предела в эргодической теореме фон Неймана вычисляются фактически по одним и тем же формулам (интегрированием ядер Фейера) — так что сама эта эргодическая теорема фактически является утверждением об асимптотике роста сумм Фейера в точке 0 спектральной меры соответствующей динамической системы. Это дает возможность перерабатывать известные оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана в оценки сумм Фейера в точке для периодических мер — например, так удается получить естественные критерии степенного роста и степенного убывания этих сумм. И наоборот, имеющиеся в литературе многочисленные оценки уклонений сумм Фейера в точке позволяют получать новые оценки скоростей сходимости в этой эргодической теореме.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т акад. Коптюга, 4, 630090, Россия
Email address: agk@math.nsc.ru

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СОЛИТОНАХ РИЧЧИ НА 4-МЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ИЗОТРОПНЫМ ТЕНЗОРОМ ВЕЙЛЯ

ПАВЕЛ КЛЕПИКОВ[1], ЕВГЕНИЙ РОДИОНОВ[2]

Работы многих математиков посвящены изучению конформно плоских (псевдо)римановых многообразий, т.е. многообразий с тривиальным тензором Вейля. Кроме того, можно рассматривать многообразия, тензор Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам он не является нулевым. В этом случае такие многообразия называют многообразиями с изотропным тензором Вейля.

Классификация четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий была получена в работе [1]. В статье [2], с использованием данной классификации, получен список четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с изотроным тензором Вейля.

В последнее время активно изучаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, одними из которых являются солитоны Риччи. В случае локально однородных (псевдо)римановых многообразий удобным инструментом для изучения солитонов Риччи являются алгебраические солитоны Риччи [3].

Данная работа посвящена изучению алгебраических солитонов Риччи на четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразиях, получена их классификация, а также изучены некоторые их свойства.

Список литературы

[1] B.B. Komrakov, *Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces* // Lobachevskii J. Math., **8**, 33–165 (2001).

[2] С.В. Клепикова, О.П. Хромова, *Об изотропности тензоров Вейля и Схоутена-Вейля на четырехмерных однородных псевдоримановых многообразиях* // ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2017: Тезисы Международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, С. 39 (2017).

[3] J. Lauret, *Ricci soliton homogeneous nilmanifolds* // Math. Ann., **319**:4, 715–733 (2001).

[1]Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: klepikov.math@gmail.com

[2]Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: edr2002@mail.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

О ВЫЧИСЛЕНИИ ТЕНЗОРА ВЕЙЛЯ НА 4-МЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

СВЕТЛАНА КЛЕПИКОВА[1], ОЛЕСЯ ХРОМОВА[2]

В работе [1] была получена классификация четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий. С ее помощью возможно решать различные задачи об изучении свойств таких многообразий.

Одной из подобных задач является проблема классификации четырехмерных конформно плоских локально однородных (псевдо)римановых многообразий, которая была решена в работе [2]. Кроме того, в работе [3] были классифицированы четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Вейля.

Для решения подобных задач необходима математическая модель, позволяющая вычислять компоненты тензора Вейля локально однородного (псевдо)риманова многообразия. Данная работа посвящена построению данной математической модели и написанию соответствующего комплекса программ.

Список литературы

[1] B.B. Komrakov, *Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces* // Lobachevskii J. Math., **8**, 33–165 (2001).

[2] G. Calvaruso, A. Zaeim, *Conformally flat homogeneous pseudo–riemannian four–manifolds* // Tohoku Math. J., **66**, 31–54 (2014).

[3] С.В. Клепикова, О.П. Хромова, *Об изотропности тензоров Вейля и Схоутена-Вейля на четырехмерных однородных псевдоримановых многообразиях* // ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2017: Тезисы Международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, С. 39 (2017).

[1]Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: klepikova.svetlana.math@gmail.com

[2]Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: khromova.olesya@gmail.com

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

ОБОБЩЕННО ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ЗАДАЧА О ТЕНИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

АНДРЕЙ КОСТИН

Последние исследования Ю. Б. Зелинского были связаны с задачей о тени ([1]–[6]). В используемой в работах Ю. Б. Зелинского и его учеников формулировке задача о тени впервые была рассмотрена Г. Худайбергановым в статье [7], см. также [1]:

какое минимальное число попарно не пересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$-мерной сфере n-мерного евклидова пространства и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров.

В работе [1] сформулированы различные обобщения этой задачи.

Целью предлагаемой работы является получение гиперболических аналогов некоторых из них. Утверждение из леммы, приведённой в [1], в расширенной постановке задачи о тени (задачи о тени не только для центра 1-сферы) имеет формулировку, допускающую наиболее естественное обобщение на плоскости Лобачевского. В работе найдены условия, при которых любая прямая, проходящая через произвольную точку дополнения гиперболических кругов разного типа до их выпуклой оболочки, пересекается хотя бы с одним из этих кругов. Даётся решение задачи для шаров равного радиуса, центры которых расположены на окружности произвольного радиуса на плоскости Лобачевского. Задача о тени для центра сферы также допускает разные варианты обобщения в гиперболическом пространстве в зависимости от того, состоит сфера из собственных, бесконечно удалённых или идеальных точек. Найдены метрические характеристики, обеспечивающие принадлежность точки выпуклой 1-оболочке семейства шаров разного типа n-мерного гиперболического пространства.

Список литературы

[1] *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Даккил Х. К.* Задача о тени и смежные задачи // Proceedings of the International Geometry Center, **9**:3–4, 50–58 (2016).

[2] *Выговская И. Ю., Зелинский Ю. Б., Стефанчук М. В.* Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн, **67**:12, 1658–1666 (2015).

[3] *Zelinskii Y. B.* Generalized convex envelopes of sets and the problem of shadow // Journal of Mathematical Sciences, **211**:5, 710–717 (2015).

[4] *Zelinskii Y. B.* Problem of shadow (complex case) // Advances in Mathematics: Scientific Journal, **5**:1, 1–5 (2016).

[5] *Zelinskii Y. B.* The Problem of the shadows. Bulletin de la société des sci. et letters de Lódź, **66**, P. 37 (2016).

[6] *Зелинский Ю. Б.* Задача о тени для семейства множеств // Збірник праць Інституту математики НАН України, **12**, 197–204 (2015).

[7] *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ, **21**, 1772–85 (1982).

Казанский федеральный университет, Елабужский институт, ул. Казанская, 89, Елабуга, 423602, Россия

Email address: kostin_andrei@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОГРАННИКОВ В N-МЕРНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЕВГЕНИЯ КОСТИНА[1], НАТАЛЬЯ КОСТИНА[2]

В работе исследуется асимптотика метрических характеристик многогранников в n-мерном гиперболическом пространстве при изменении параметров многогранников, а также при стремлении размерности пространства к бесконечности. В частности, оценивается, какие значения может принимать радиус вписанной сферы многогранника и исследуется его асимптотика. В связи с этим оценивается минимальное число граней описанного многогранника в n-мерном гиперболическом пространстве в зависимости от радиуса вписанной сферы. В качестве примера приведём одно из доказанных утверждений.

Теорема. *Радиус сферы, вписанной в куб n-мерного гиперболического пространства кривизны K, может принимать значения от нуля до*

$$\frac{1}{\sqrt{-K}} arth \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Как следствие, при стремлении n к бесконечности радиус сферы, вписанной в куб, асимптотически равен нулю.

Некоторые метрические характеристики многогранников n-мерного евклидова пространства, используемые в работе, приведены в [1].

Список литературы

[1] Б.А. Розенфельд, *Многомерные пространства* // М.: Наука, 1966.

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991, Россия

Email address: evgeniia.kostina@gmail.com

[2]Казанский федеральный университет, Елабужский институт, ул. Казанская, 89, Елабуга, 423602, Россия

Email address: natnikost@mail.ru

ОБ ОБЪЕМЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО 4-СИМПЛЕКСА

ВЛАДИМИР КРАСНОВ

В 2013 году И.Х. Сабитовым [1] был предложен новый подход к вычислению объемов гиперболических многогранников произвольной размерности через координаты вершин, который позволяет найти объем многогранника через некоторый интеграл по его граничной поверхности, являющейся объединением многогранников меньшей размерности. Позднее в работе [2] была получена формула произвольного гиперболического тетраэдра (трехмерного симплекса) через координаты вершин.

В данном докладе мы, проделав подобные вычисления в размерности четыре, укажем явную формулу объема произвольного гиперболического 4-симплекса через координаты вершин, с помощью которой объем может быть выражен через одномерные интегралы по отрезкам вещественной прямой от вещественнозначных подынтегральных функций. Кроме того, мы увидим, что объем гиперболического пятимерного симплекса не выражается в виде двойного интеграла от элементарной функции от координат вершин (длин ребер).

Список литературы

[1] И.Х. Сабитов, *Об одном методе вычисления объемов тел* // Сибирские электронные математические известия, **10**, 615–626 (2013).

[2] И.Х. Сабитов, *Гиперболический тетраэдр: вычисление объема с применением к доказательству формулы Шлефли* // Модел. и анализ информ. систем, **20**:6, 149–161 (2013).

Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия

Email address: vladimir.krasnov3107@gmail.com

Данная работа выполнена при поддержке Программы РУДН ”5-100”.

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ ДЕЙСТВИИ ГРУППЫ $GL(n)$ НА ПРОСТРАНСТВЕ КЛАССОВ ПРОЕКТИВНЫХ РЕПЕРОВ

АРТУР ВЛАДИМИРОВИЧ КУЛЕШОВ

Пусть P_n — проективное пространство размерности $n \geq 2$, A — его точка, которую мы считаем фиксированной; $F(P_n)$ — многообразие всех проективных реперов вида $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$ таких, что $A_0 = A$; $V = T_A(P_n)$ — векторное касательное пространство к P_n как к гладкому многообразию в его точке A; $F(V)$ — многообразие всех линейных реперов (т. е. базисов) пространства V; $G = GP^*(n)$ — стабилизатор точки A в группе $GP(n)$ проективных преобразований пространства P_n; $GL(V)$ — группа невырожденных линейных операторов, действующих в пространстве V. Заметим, что $GL(V)$ изоморфна группе Ли $GL(n)$.

Пусть $\mathcal{R} \in F(P_n)$ и $\varepsilon \in F(V)$, причем $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$, $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Обозначим

$$f \cdot \mathcal{R} = \{f(A_0), f(A_1), \ldots, f(A_n), f(E)\}, \quad \psi \cdot \varepsilon = \{\psi(\vec{e}_1), \ldots, \psi(\vec{e}_n)\},$$

где $f \in G$, $\psi \in GL(V)$. Тем самым определены свободные и транзитивные действия групп G и $GL(V)$ на $F(P_n)$ и $F(V)$ соответственно.

Отображение $\beta\colon G \to GL(V)$, действующее по закону $\beta\colon f \mapsto d_A f$, является гомоморфизмом групп Ли. Тогда ядро $H = \ker f$ — нормальный делитель группы G, причем $\bar{\beta}\colon fH \mapsto d_A f$ — канонический изоморфизм групп Ли G/H и $GL(V)$. Это позволяет отождествить данные группы и обозначить их общим символом $\bar{G}$.

Определение 1. *Группу $\bar{G}$ будем называть линейной факторгруппой группы G.*

Определение 2. *Два репера $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ назовем эквивалентными, если они принадлежат одной и той же H-орбите.*

Класс эквивалентности репера $\mathcal{R}$ обозначим через $[\mathcal{R}]$. На многообразии $\Phi(P_n)$ всех таких классов корректно определено свободное транзитивное действие группы $\bar{G}$ по следующему правилу: $fH \cdot [\mathcal{R}] \colon = [f \cdot \mathcal{R}]$ для любого $f \in G$.

Утверждение 1. *$\Phi(P_n)$ и $F(V)$ изоморфны как пространства представления группы Ли $\bar{G}$.*

Пусть $\mathcal{R}, \mathcal{R}' \in F(P_n)$, причем $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$, $\mathcal{R}' = \{A'_0, A'_1, \ldots, A'_n, E'\}$, где $A_0 = A'_0 = A$. Следуя аксиоматике Вейля n-мерного проективного пространства, рассмотрим $(n+1)$-мерное векторное пространство V_{n+1}, ассоциированное с P_n, а через $\pi\colon V_{n+1} \backslash \{\vec{0}\} \to P_n$ обозначим каноническую сюръекцию. Введем в рассмотрение базисы $\vec{\mathcal{R}}$ и $\vec{\mathcal{R}}'$, порождающие реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ соответственно:

$$\vec{\mathcal{R}} = \{\vec{A}_0, \vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n\}, \quad \vec{\mathcal{R}}' = \{\vec{A}'_0, \vec{A}'_1, \ldots, \vec{A}'_n\}. \tag{1}$$

Тогда $\pi(\vec{A}_0) = A_0$, $\pi(\vec{A}_i) = A_i$, $\pi(\vec{A}'_0) = A'_0$, $\pi(\vec{A}'_i) = A'_i$, $\pi(\vec{E}) = E$, $\pi(\vec{E}') = E'$, $i = \overline{1, n}$, где

$$\vec{E} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 + \ldots + \vec{A}_n, \quad \vec{E}' = \vec{A}'_0 + \vec{A}'_1 + \ldots + \vec{A}'_n.$$

Определение 3. *Реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ назовем перспективными друг другу, если $A'_i \in A_i A_0$ ($i = \overline{1, n}$), $E' \in EA_0$.*

Утверждение 2. *Если реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ перспективны друг другу, то найдутся базисы (1), порождающие данные реперы, такие, что для некоторых чисел λ, $a_1, \ldots, a_n$, e ($\lambda \neq 0$) справедливы равенства*

$$\lambda \vec{A}'_0 = \vec{A}_0, \quad \lambda \vec{A}'_i = a_i \vec{A}_0 + \vec{A}_i, \quad \lambda \vec{E}' = e \vec{A}_0 + \vec{E}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Из утверждения 2 вытекает

Теорема 1. *1) Если реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ эквивалентны, то они перспективны друг другу. 2) Пусть реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ перспективны друг другу. Тогда для того, чтобы эти реперы были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы в обозначениях утверждения 2 выполнялось равенство $e = a_1 + \ldots + a_n$.*

Определение 4. *Реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ назовем строго перспективными друг другу, если они перспективны, и при этом $\vec{A}'_i \neq \vec{A}_i$ $(i = \overline{1,n})$ и $E' \neq E$.*

Для любых двух строго перспективных другу другу реперов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ определено минимальное (по включению) подпространство $\mathcal{L}_{(\mathcal{R},\mathcal{R}')} \subset P_n$, содержащее совокупность точек B_{ij}, B_i, где

$$B_{ij} = A_iA_j \cap A'_iA'_j, \quad B_i = A_iE \cap A'_iE', \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Теорема 2. *$\mathcal{L}_{(\mathcal{R},\mathcal{R}')} \subset P_n$ является гиперплоскостью для любых строго перспективных друг другу реперов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$.*

Доказательство теоремы 2 опирается на результаты работы [1]. Заметим, что она является одним из n-мерных обобщений классической теоремы Дезарга.

Теорема 3. *Пусть реперы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ строго перспективны. В этом случае они эквивалентны тогда и только тогда, когда гиперплоскость $\mathcal{L}_{(\mathcal{R},\mathcal{R}')} \subset P_n$ проходит через точку A.*

Доказательство теоремы 3 см. в [2].

Список литературы

[1] P.O. Bell, *Generalized theorems of Desargues for n-dimensional projective space* // Proc. Amer. Math. Soc., **6**, 675–681 (1955).

[2] А.В. Кулешов, *О линейной факторгруппе центропроективной группы* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур, **49** (в печати).

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, ул. А. Невского, 14, Калининград, 236016, Россия

Email address: arturkuleshov@yandex.ru

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ И АНАЛОГ НЕРАВЕНСТВА ЮНГА-ФЕНХЕЛЯ ДЛЯ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ МЕТРИК

МАРИЯ КУРКИНА[1], ЕВГЕНИЙ РОДИОНОВ[2], ВИКТОР СЛАВСКИЙ[3]

Рассматривается класс конформно-плоских метрик, определенных на единичной сфере $S^n \subset R^{n+1}$, вида: $ds = \frac{|dx|}{h^2(x)}$, где $h(x)$ строго положительная функция такая, что для любой тройки точек x_1, x, $x_2 \in S^n$ выполнено неравенство:

$$h(x) \leq h(x_1)\frac{\|x_2 - x\|}{\|x_2 - x_1\|} + h(x_2)\frac{\|x - x_1\|}{\|x_2 - x_1\|},$$

где $\|x - y\|$ – хордовое расстояние между точками сферы, т. е. $h(x)$ конформно-выпуклая в смысле работы [1].

Теорема 1. *Пусть функция $h^*(y)$ определена равенством:*

$$h^*(y) = \max_{x\in S^n} \frac{\|x - y\|}{\sqrt{2}h(x)},$$

тогда метрика $ds^* = \frac{|dy|}{h^{*2}(y)}$ будет двойственной (полярной в смысле работы [2]) к исходной метрике.

Теорема 2. *Функция $h^*(y)$ – конформно-выпуклая, и $h^{**} = h$ кроме того выполняется неравенство:*

$$\|x - y\| \leq \sqrt{2}h(x)h^*(y),$$

где $x, y \in S^n$ произвольные точки единичной сферы, $\|x - y\|$ – хордовое расстояние.

Замечание. Неравенство можно рассматривать, как аналог неравенства Юнга-Фенхеля в выпуклом анализе

Список литературы

[1] М. Куркина, Е. Родионов, В. Славский. *Конформно-выпуклые функции и конформно-плоские метрики неотрицательной кривизны* // Доклады Академии Наук, **462**:2, 141–144 (2015).

[2] Е. Родионов, В. Славский. *Полярное преобразование конформно-плоских метрик* // Математические труды, **20**:2, 1–19 (2017).

[1]Югорский государственный университет, ул. Чехова, 15, Ханты-Мансийск, 628011, Россия

Email address: m_kurkina@ugrasu.ru

[2]Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия

Email address: edr2002@mail.ru

[3]Югорский государственный университет, ул. Чехова, 15, Ханты-Мансийск, 628011, Россия

Email address: slavsky2004@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного Фонда ЮГУ № 13-01-20/10.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ЕВКЛИДОВЫХ МНОГОМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

ВЛАДИМИР КЫРОВ

Рассмотрим $(n+1)$-мерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению n-мерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L, $n \geq 2$. Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h : M \to N \times L$. Пусть $\pi_1 : N \times L \to N$ и $\pi_2 : N \times L \to L$ — проекции. Рассмотрим функции $g : N \times N \to R$, с открытой и плотной областью определения S_g в N^2, и $\chi : R \times L \times L \to R$. Построим функцию $f : M \times M \to R$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h), \pi_1(h)), \pi_2(h), \pi_2(h)),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2. Ниже она называется метрической, причем метрические аксиомы могут и не выполняться. На точках эта функция выглядит так:

$$f(i,j) = \chi(g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))), \pi_2(h(i)), \pi_2(h(j))), \tag{1}$$

где i, j — произвольные две точки из M, причем $\langle i, j\rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $i, j \in U$, $\langle i, j\rangle \in S_f$, существуют окрестности $U(i) \subset U$, $U(j) \subset U$ такие, что $\langle i', j'\rangle \in S_f$, $\forall i' \in U(i)$, $\forall j' \in U(j)$. Из выше сказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h : U \to V \times W$, где V, W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим $(x^1, \ldots, x^n)$, а координату в окрестности W — (w). Тогда в локальных координатах функция (1) принимает следующий вид:

$$f = f(i,j) = \chi(\theta, w_i, w_j), \tag{2}$$

где $g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))) = \theta = \theta(x_i^1, \ldots, x_i^n, x_j^1, \ldots, x_j^n)$ — метрическая функция псевдоевклидовой геометрий сигнатуры $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$:

$$\theta = \varepsilon_1 (x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n (x_i^n - x_j^n)^2,$$

причем для евклидовой геометрии $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n$, а для псевдоевклидовой геометрии знаки различные. $\pi_2(h(i)) = w_i$, $\pi_2(h(j)) = w_j$. Выполняются аксиомы.

Аксиома аналитичности. Функция $\chi : R \times L \times L \to R$ аналитическая во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для метрической функции (2) в произвольной точке окрестности $U(i) \times U(j) \subset M^2$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0,\ \frac{\partial \chi}{\partial w_i} \neq 0,\ \frac{\partial \chi}{\partial w_j} \neq 0.$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие)

$$\lambda : U \times G \to U',$$

где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства:

1). $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U$;

2). $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, для любых $a, b \in G$ и $i \in U$;

3). Для любого $i \in U$ $\lambda(i, a) = i$, только если $a = e$.

Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j\rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j)\rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают ([1], §1). Множество всех так определенных движений образует аналитическую группу Ли движений.

Аксиома максимальной подвижности. $\dim G = (n+1)(n+2)/2$.

Основная задача этой работы — поиск всех функций вида (2), являющихся двухточечными инвариантами $(n+1)(n+2)/2$-мерной группы движений.

Теорема. *Рассмотрим произвольную точку $k \in M$ и ее координатную окрестность $U(k)$. Возьмем так же две точки $i, j \in U(k)$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что*

$$U(i) \cup U(j) \subset U(k), \quad \textit{причем} \quad \langle i, j\rangle, \langle i', j'\rangle \in S_f \quad \forall i' \in U(i), \ \forall j' \in U(j).$$

Тогда метрическая функция $f(i, j)$, в аналитическом многообразии M задающая $(n+1)$-мерную геометрию локальной максимальной подвижности, в окрестности $U(i) \times U(j)$ в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании (аналитическая функция от метрической функции $\varphi(f) \to f$) имеет вид:

$$f(i, j) = \varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2 + \varepsilon(w_i - w_j)^2,$$

$$f(i, j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2w_i + 2w_j},$$

$$f(i, j) = [\varepsilon_1(x_i^1 - x_j^1)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_i^n - x_j^n)^2]e^{2w_i + 2w_j} + \varepsilon e^{2w_i - 2w_j} + \varepsilon e^{2w_j - 2w_i}.$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon = \pm 1$.

Поставленная задача при $n = 2$ решается в работе [2]. Аналогичная задача для симплектической геометрии рассматривается в статье [3].

Список литературы

[1] G.G. Mikhailichenko, *The mathematical basics and results of the theory of physical structures*, 2012. https://arxiv.org/pdf/1602.02795

[2] В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко, *Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий*, Тр. инст. матем. и мех. УрО АН, **23**:2, 167–181 (2017).

[3] В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко, *Аналитический метод вложения симплектической геометрии*, Сиб. электр. матем. изв., **14**, 657–672 (2017). DOI:https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.057

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

Email address: `kyrovVA@yandex.ru`

МИНИМАЛЬНАЯ $U(3)$-ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТЬ И ЗАРЯДЫ КВАРКОВ

АЛЕКСАНДР ЛЕВИЧЕВ[1], АНДРЕЙ ПАЛЬЯНОВ[2]

В многоуровневой модели кварк-глюонной среды (см. [1, 2]) кварки соответствуют $U(2)$-подгруппам в $U(3)$, в $U(4)$, и т.д.. Эти группы названы уровнями материи: $U(2)$ – нулевой (т.е., наш обычный), $U(3)$ - первый, $U(4)$ - второй и т.д. (уровни соответствуют поколениям кварков). Исходим из известных (электрических) зарядов u-кварка (2/3) и d-кварка (-1/3). Постулируем условие т.н. минимальной целочисленности (0, 1, 2, и т.д.) всех канонических $U(3)$-вложений (в $U(4)$, в $U(5)$ и т.д.). Доказано, что выполнение этого условия гарантирует ("правильные") заряды всех остальных известных кварков и (однозначно – в рамках многоуровневой модели) предсказывает заряды ТРЁХ (пока ещё не обнаруженных) кварков четвёртого поколения. Отметим, что в рамках Стандартной Модели (с бозоном Хиггса) ведётся поиск ДВУХ кварков (b' и t', см. [3, 4]) четвёртого поколения.

Список литературы

[1] A. Levichev, *Toward a matrix multi-level model of quark-gluon media* // Journal of Progressive Research in Mathematics, **10**:2, 1493–1496 (2016).
[2] A. Levichev, *On key properties of the intertwining operators ornament in the matrix multi-level model of the quark-gluon media* // В Материалах Всероссийской конференции с международным участием "Знания-Онтологии-Теории"(ЗОНТ-2017), 6-8 октября 2017, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики С.Л.Соболева, **2**, 41–47 (2017).
[3] http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-b-prime-quark.pdf
[4] http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-t-prime-quark.pdf

[1]Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т акад. Коптюга, 4, 630090, Россия
Email address: `alevichev@gmail.com`

[2]Институт Систем Информатики им. А.П. Ершова СО РАН, пр. Акад. Лаврентрева, 6, Новосибирск, 630090, Россия

К ПЕРЕЧИСЛЕНИЮ ГЛОБАЛЬНЫХ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ

ВЛАДИМИР МОРОЗОВ

Глобальным зацеплением называется пара (M, L), где M – трехмерное многообразие, L – конечный набор окружностей в M. Если окружность одна, то глобальное зацепление называется *глобальным узлом*.

Многообразие M предполагается компактным, связным, замкнутым и ориентируемым. Глобальное зацепление задается с помощью диаграммы оснащенного зацепления D обычного вида (то есть диаграммы зацепления, лежащего в S^3), у которого не все компоненты оснащены.

Перечисление глобальных узлов и зацеплений можно осуществлять перечислением таких диаграмм в порядке возрастания сложности диаграмм. Функцию сложности $c(D)$ можно задавать по разному. Например, ее можно определить как вектор-функцию или как скалярную функцию. Функция сложности может конструироваться из таких характеристик диаграммы D как число компонент, число оснащенных компонент, число неоснащенных компонент, оснащения компонент, числа точек самопересечения оснащенных компонент, числа точек самопересечения неоснащенных компонент и т.п.

В работе рассматриваются и сравниваются некоторые варианты определения функции сложности $c(D)$. Вводятся понятия связной суммы глобальных зацеплений и примарного глобального зацепления.

Список литературы

[1] K. Miyazaki, *Conjugation and the prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds* // Transactions of the American Mathematical Society, **313**:2, 785–804 (1994).

[2] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten* // S.-B. Heidelberger : Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., 57–104 (1949).

[3] B. Arnold, M. Au, C. Candy, K. Erdener, J. Fan, R. Flynn, J. Hoste, R.J. Muir, D. Wu, *Tabulating alternating knots through 14 crossings* // J. Knot Theory Ramifications **3**:4, 433–437 (1994).

[4] H. Doll, J. Hoste, *A tabulation of oriented links* // Math. Computat. **57**:196, 747–761 (1991).

[5] T.P. Kirkman, *The enumeration, description and construction of knots of fewer than ten crossings* // Trans. Roy. Soc. Edinburgh 32, 281–309 (1885).

[6] А.А. Акимова, С.В. Матвеев, *Классификация узлов малой сложности в утолщенном торе* // Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ., **12**:3, 10—21 (2012); J. Math. Sci., **202**:1, 1—12 (2014).

[7] Я.К. Ильина, *Классификация заузленных дуг в утолщенном проколотом торе* // Вестник ЧелГУ, **15**, 112–119 (2012).

[8] Л.Р. Набеева, *Классификация узлов в утолщенной бутылке Клейна* // Вестник ЧелГУ, **15**, 134–139 (2012).

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

Email address: morozov_vv_z@mail.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №17-01-00690.

ОБОБЩЕНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ УЗЛОВ МИЯДЗАКИ $\mathcal{R}$ И $\mathcal{U}$ И ИХ СВОЙСТВА

МИХАИЛ ОВЧИННИКОВ

Понятие глобального узла является обобщением понятия узла в трехмерной сфере путем замены трехмерной сферы на произвольное замкнутое компактное ориентируемое трехмерное многообразие. Глобальный узел тривиальный, если окружность узла ограничивает диск в многообразии. Глобальный узел (M, k) называется связной суммой глобальных узлов (M_1, k_1) и (M_2, k_2) (обозначается $(M_1, k_1)\#(M_2, k_2)$), если в M есть разбивающая сфера S, дополнение к которой гомеоморфно несвязному объединению проколотых пар (M_1, k_1) и (M_2, k_2) в точках p_1 и p_2 на узлах k_1 и k_2 соответственно. Глобальный узел примарный, если в любом его представлении в виде связной суммы двух глобальных узлов одно из слагаемых является тривиальным глобальным узлом. К.Миядзаки показал для некоторых примарных глобальных узлов специального вида $\mathcal{R}$ и $\mathcal{U}$ гомеоморфность связных сумм $\mathcal{R}\#\mathcal{R}\#\mathcal{R} = \mathcal{R}\#\mathcal{U}$, и тем самым существование глобальных узлов с неоднозначным разложением на примарные слагаемые ([1]).

В работе определяются глобальные узлы $\mathcal{K}(F)$, где F связная компактная двумерная поверхность, следующим образом. Обозначим F' поверхность F с удаленным диском. Ориентируемое произведение (косое, если F неориентируемая) поверхности F' на окружность заклеим полным тором с совмещением краев меридиональных дисков с окружностями произведения. Узлом в полученном многообразии является ось полного тора. Для глобальных узлов $\mathcal{K}(F)$ оказываются справедливы следующие свойства.

Теорема 1. $\mathcal{K}(F\#H) = \mathcal{K}(F)\#\mathcal{K}(H)$.

Теорема 2. $\mathcal{K}(\mathbb{R}P^2) = \mathcal{R}$, $\mathcal{K}(T^2) = \mathcal{U}$.

Как следствие, пример Миядзаки объясняется неоднозначностью разложения в связную сумму поверхности $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^2\#T^2$. Исследуются связи конструкции глобальных узлов $\mathcal{K}(F)$ с конструкцией «раскрытая книга» ([2]).

Список литературы

[1] K. Miyazaki, *Conjugation and the prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds* // Transactions of the American Mathematical Society, **313**:2, 785–804 (1994).

[2] R. Myers, *Open book decompositions of 3-manifolds* // Proc. Amer. Math. Soc., **72**, 397–402 (1978).

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

Email address: ovch_csu_ru@mail.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №17-01-00690.

ПОЛЯ КИЛЛИНГА И СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА K – СИММЕТРИЧЕСКИХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Д. Н. ОСКОРБИН[1], Е. Д. РОДИОНОВ[2], И. В. ЭРНСТ[3]

Поля Киллинга играют важную роль в исследовании солитонов Риччи, которые являются обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях. Уравнение солитона Риччи изучалось на различных классах многообразий многими математиками. Класс 2- и 3-симметрических лоренцевых многообразий был исследован Д.В. Алексеевским, А.С. Галаевым. К. Онда и В. Батат исследовали солитоны Риччи на четырёхмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях и доказали локальную разрешимость уравнения солитона Риччи на таких многообразиях. Позднее авторами была доказана разрешимость уравнения солитона Риччи на 2- и 3- симметрических лоренцевых многообразиях произвольной размерности. Для получения общего решения требовалось определить поля Киллинга на таких многообразиях. При помощи нормальных координат Бринкмана, существующих на pp-волнах – лоренцевых многообразиях более общего класса, было получено описание полей Киллинга, найдена размерность пространства киллинговых полей и построено общее решение уравнения солитона Риччи на 2- и 3- симметрических лоренцевых многообразиях.

Список литературы

[1] D. Alekseevsky, A. Galaev *Two-symmetric Lorentzian manifolds* // J. Geom. Phys., **61**:12, 2331–2340 (2011).

[2] W. Batat, K. Onda K. *Ricci and Yamabe solitons on second-order symmetric, and plane wave 4-dimensional Lorentzian manifolds* // Journal of Geometry, **105**:3, 561–575 (2014).

[1]Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: oskorbin@yandex.ru

[2]Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: edr2002@mail.ru

[3]Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия

КВАЗИМЕТРИКИ И МЕРА, ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

АЛЕКСАНДР РОМАНОВ

Функцию “расстояния” называют квазиметрикой, если некоторые стандартные свойства метрики (симметричность, неравенство треугольника) либо вообще не выполняются либо выполняются в несколько ослабленном виде.

В случае, когда неравенство треугольника имеет вид $\rho(x, y) \leq q_1\rho(x, z) + q_2\rho(z, y)$, пространство (X, ρ) называют (q_1, q_2) квазиметрическим [1]. При выполнении неравенства $\rho(y, x) \leq C\rho(x, y)$ метрику называют C-симметрической.

Предположим, что на X задана мера μ. Учитывая наличие в евклидовом случае различных (не использующих понятия дифференциала) описаний пространств Соболева, мы можем определить на квазиметрическом пространстве с мерой аналоги соболевских классов функций $S^1_p(X, \rho, \mu)$. Такие классы представляют интерес в первую очередь с точки зрения возможности получения некоторых довольно универсальных теорем вложения.

На (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах с C-симметрической квазиметрикой и мерой, удовлетворяющей условию удвоения относительно квазиметрики, удается показать, что теоремы вложения в пространства Лебега устроены таким же образом как и в достаточно хорошо изученном метрическом случае: $I : S^1_p(X, \rho, \mu) \to L_q(\mu)$ при $1 < p < s$, где $q = sp/(s - p)$, а показатель s, играющий роль “размерности” пространства, определяется из условия удвоения для меры [2].

На метрическом пространстве (X, d) с мерой μ, удовлетворяющей условию удвоения, можно ввести семейство довольно специфических квазиметрик, полагая

$$\rho_\alpha(x, y) = [\mu(B(x, d(x, y)))]^\alpha$$

и получить теоремы вложения для пространств $S^1_p(X, \rho_\alpha, \mu)$, отличающихся от традиционно рассматривавшихся ранее классов функций соболевского типа.

В первооснове доказательств теорем вложения на квазиметрических пространствах лежит выполнение аналога леммы Витали о покрытии, из которой следует ограниченность максимального оператора в пространствах Лебега L_p при $p > 1$. При доказательстве аналога леммы Витали не удается полностью отказаться от условия C-симметричности, не хватает и условия “слабой симметричности”, используемого в [3]. Однако для наших целей оказывается достаточным выполнение условия симметричности в “предельном случае”: из условия $\rho(x, y_k) \to 0$ следует $\rho(y_k, x) \to 0$ и $\limsup(\rho(y_k, x)/\rho(x, y_k)) \leq L < \infty$.

Список литературы

[1] A. Arutyunov, A. Greshnov, *Теория (q1, q2)-квазиметрических пространств и точки совпадения* // Доклады АН, **469**:5, 527–531 (2016).

[2] А. Романов, *Функциональные классы соболевского типа на квазиметрических пространствах* // Сиб. электр. мат. изв., **14**, 1447–1455 (2017).

[3] A. Arutyunov, A. Greshnov, L. Lokutsievskii, K. Storojuk, *Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics* // Top. Appl., **221**, 178–194 (2017).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т акад. Коптюга, 4, 630090, Россия
Email address: asrom@math.nsc.ru

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0007, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-01-00801.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

НИКОЛАЙ РОМАНОВСКИЙ

Пусть (X, ρ, μ) — пространство с метрикой ρ и борелевской мерой μ. $V \subset X$ — вполне ограниченное множество. Не ограничивая общности, будем считать $\operatorname{diam}(V) \le 1$, $\mu(V) \le 1$.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность разбиений $\Xi = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j, \dots\}$ множества V на непересекающиеся μ-измеримые множества E_i^j, $i = 1, \dots, n(j)$, удовлетворяет d-условию, если, во-первых, каждое последующее разбиение является измельчением предыдущего и, во-вторых, выполняются неравенства $\operatorname{diam}(E_i^j) \le C_1 10^{-j}$, $\mu(E_i^j) \ge C_2 10^{-jd}$. Будем предполагать, что разбиение σ_0 состоит из единственного множества, т. е. $\sigma_0 = \{V\}$.*

Определение 2. *Фиксируем семейство функций $\mathfrak{A}_i^k$, заданных на множестве E_i^k, таких, что для некоторой постоянной C_3 для любой функции $A \in \mathfrak{A}_i^k$ и множества $E_i^k \in \sigma_k$ выполняется неравенство $\sup_{x \in E_i^k} |A(x)| \le \frac{C_3}{\mu(E_i^k)} \int_{E_i^k} |A(x)|\, d\mu(x)$. Предположим также, что для любых i, k, множество $\mathfrak{A}_i^k$ замкнуто относительно линейных комбинаций и для $j \le k$ ограничение любой функции из $\mathfrak{A}_{i_1}^j$ на $E_{i_2}^k$ принадлежит $\mathfrak{A}_{i_2}^k$. Обозначим через G_{σ_k} множество, состоящее из всех функций совпадающих на каждом множестве E_i^k разбиения σ_k с некоторой функцией из семейства $A_i^k \in \mathfrak{A}_i^k$.*

Замечание 1. *Перечислим некоторые подходящие для определения 2 семейства функций $\mathfrak{A}_i^k$, сначала в том случае, когда $\mathfrak{A}_i^k$ одно и тоже для всех i, k.*

Семейство констант удовлетворяет условиям определения 2, при этом в качестве C_3 можно взять 1.

Семейство полиномов, степени не выше чем n также удовлетворяет условиям определения 2. При этом в качестве C_3 можно взять $n+1$. Также мы предполагаем, что множества E_i^k выпуклы.

Любое конечномерное линейное подпространство семейства полиномов удовлетворяет условиям определения 2, при этом в качестве C_3 можно взять наибольшую степень полинома, входящего в это семейство плюс один. Также мы предполаем, что множества E_i^k выпуклы.

Замечание 2. *В качестве примера подходящих для определения 2 семейств функций $\mathfrak{A}_i^k$ можно рассмотреть функции, гармонические на множестве $2E_i^k$.*

Определение 3. *Пусть открытое множество $V \subset X$, (X, d, μ) — метрическое пространство с борелевской мерой, $p \in [1, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, последовательность разбиений $\Xi = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots)$ удовлетворяет d-свойству, $u \in L_p(V)$. Обозначим множества из которых состоит разбиение σ_j через E_i^j, $i = 1, \dots, m(j)$. Пусть A_i^j — функция из $\mathfrak{A}_i^k$, наилучшим образом приближающая функцию u на множестве E_i^j по норме пространства $L_p(V)$. Предположим, что найдется функция $h^r \in L_p(V)$ такая, что для любого множества $E_l^k \in \sigma_k$, $E_l^k \subset E_i^j$, $k \ge j$, выполняется равенство*

$$10^{jrp} \int\limits_{E_l^k} |u(x) - A_i^j(x)|^p \, d\mu(x) \le \int\limits_{E_l^k} (h^r(x))^p \, d\mu(x). \tag{1}$$

Тогда будем писать, что $u \in W^{r,p}_{\Xi, \mathfrak{A}, d}(V)$. Любую функцию $h^r(x)$, удовлетворяющую неравенству (1), будем называть верхним градиентом порядка r функции u. Полунормой в

Работа выполнена поддержке гранта РФФИ 17-01-00801.

пространстве $W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A},d}(V)$ *будем называть минимум* $\|h^r\|_{L_p(U)}$ *среди всех функций* $h^r(x)$, *удовлетворяющих неравенству* (1), *т. е. среди всех верхних градиентов порядка* r *функции* u *и обозначать* $[u]_{W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A},d}(V)}$ *или для краткости* $[u]^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A},d}$. *Норма в пространстве* $W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A},d}(V)$ *определяется формулой* $\|u\|_{W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A},d}(V)} := \|u\|_{L_p(V)} + [u]_{W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A},d}(V)}$.

Обозначим через G_{σ_k} множество функций, совпадающих на множествах E^k_i с функциями из семейства $\mathfrak{A}^k_i$. Такую функцию можно отождествить с вектором, компоненты которого суть заданные на E^k_i функции из $\mathfrak{A}^k_i$.

Рассмотрим линейный оператор L_k, сопоставляющий функции g_k из G_{σ_k}, которой соответствует вектор v_k с компонентами из $\mathfrak{A}^k_i$, функцию $L_k g_k$ из G_{σ_k}, которой соответствует вектор $A_k v_k$, где A_k — матрица с постоянными компонентами.

Пространства Соболева мы определили через аппроксимации рассматриваемой функции u функциями g_k из G_{σ_k}.

Нетрудно видеть, что в евклидовом случае линейные дифференциальный оператор Lu можно аппроксимировать операторами $L_k g_k$. Это позволяет сводить решение некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений к решению последовательности линейных уравнений и изучению сходимости соответствующих функций по норме подходящего пространства Соболева.

Использованное нами описание пространств Соболева оказалось удобным, см. [1], для доказательства различных теорем вложения.

Описанный выше подход к решению краевых задач для дифференциальных уравнений удобен для исследования регулярности решений линейных эллиптических уравнений, включая случай негладких коэффициентов. Этот подход применим также к неевклидовому случаю, например к случаю групп Карно и может быть использован для изучения свойств решений субэллиптических уравнений. Также он применим к общему метрическому случаю при условии некого самоподобия последовательности разбиений σ_k.

Помимо эллиптических уравнений и их обобщений мы рассматриваем параболические уравнения и их общения. Для этого мы рассматривает вместо функций, заданных на произвольном метрическом пространстве с мерой X, функции заданные на произведении $\mathbb{R} \times X$, и проводим дискретизацию только по второй переменной (принадлежащей метрическому пространству X). В результате мы получаем вместо систем линейных алгебраических уравнений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Решая эти системы, учитывая начальные условия и переходя к пределу в подходящем пространстве Соболева мы получаем решение исследуемой задачи. Таким образом можно достаточно просто и единообразным способом изучать свойства решений ультрапараболических уравнений, включая уравнения, описывающие важные в приложениях модели, например уравнения Колмогорова.

Список литературы

[1] Н. Н. Романовский, *Теоремы вложения Соболева и некоторые их обобщения для функций, заданных на метрическом пространстве с мерой* // Сиб. матем. журн., **59**:1, 158–170 (2018).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т акад. Коптюга, 4, 630090, Россия
Email address: nnrom@math.nsc.ru

О КРАТНОСТИ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА ОБЪЕМА МНОГОГРАННИКА

И. Х. САБИТОВ

В работе [1] среди многих открытых проблем в задаче под номером 6 было высказано предположение, что верна следующая

Теорема. *Алгебраический объем нежесткого ориентируемого симплициального многогранника является кратным корнем его многочлена объема.*

Напомним, что многочленом объема симплициального ориентируемого многогранника с комбинаторным строением K и с известными длинами ребер называется многочлен вида

$$Q(V,l) = V^{2N} + \sum_{i=1}^{N} a_i(l) V^{2N-2i}, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_i(l)$ тоже некоторые многочлены от совокупности l квадратов длин ребер рассматриваемого многогранника, зависящие от K; точное определение см. в [1].

Так как любой изгибаемый многогранник является нежестким, то верно также такое

Следствие. *Объем любого изгибаемого многогранника является кратным корнем своего многочлена объема.*

Кратко изложим идею доказательства теоремы. Пусть в R^3 дан ориентированный нежесткий симплициальный многогранник P произвольного комбинаторного строения с n вершинами. Пусть точки $M_i(x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq n$, являются его вершинами. *Нежесткость* многогранника означает, что существуют векторы $\mathbf{Z}_i = \{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$, компоненты которых удовлетворяют системе линейных уравнений

$$(x_i - x_j)(\xi_i - \xi_j) + (y_i - y_j)(\eta_i - \eta_j) + (z_i - z_j)(\zeta_i - \zeta_j) = 0, \tag{2}$$

выписанных по всем ребрам $(i,j) \in E$ многогранника (где через E обозначено множество всех ребер, а индексы i и j соответствуют номерам концевых вершин ребер). Векторы $\mathbf{Z}_i$ составляют поле бесконечно малого изгибания (б.м.и.) многогранника, заданное этими векторами в соответствующих вершинах многогранника. Чтобы исключить тривиальные б.м.и. (т.е.порожденные начальными скоростями некоторого движения многогранника как твердого тела), добавлением тривиального б.м.и. можно добиться, чтобы в вершинах одной произвольно выбранной невырожденной грани поле б.м.и. было равно нулю. Тогда получаем систему (2) из $3n - 9 + 6g$ уравнений с $3n - 9$ неизвестными, где через $g \geq 0$ обозначен род многогранника.

Введем в рассмотрение новые многогранники P_ε с координатами вершин $(x_i + \varepsilon\xi_i, y_i + \varepsilon\eta_i, z_i + \varepsilon\zeta_i)$ с тем же комбинаторным строением, что и рассматриваемый многогранник $P = P_0$. Алгебраический объем многогранника определяется как сумма ориентированных объемов тетраэдров с произвольной общей вершиной и с основаниями на согласованно ориентированных гранях многогранника.Эту общую вершину можно взять в одной из вершин самого многогранника и объявить эту вершину началом координат O. Тогда объем тетраэдра с основанием на грани с вершинами M_i, M_j, M_k представляется как шестая часть смешанного произведения векторов OM_i, OM_j, OM_k. При переходе к многограннику P_ε объем каждого соответствующего тетраэдра имеет вид

$$V_{ijk}(\varepsilon) = \frac{1}{6} det \begin{pmatrix} x_i + \varepsilon\xi_i & y_i + \varepsilon\eta_i & z_i + \varepsilon\zeta_i \\ x_j + \varepsilon\xi_j & y_j + \varepsilon\eta_j & z_j + \varepsilon\zeta_j \\ x_k + \varepsilon\xi_k & y_k + \varepsilon\eta_k & z_k + \varepsilon\zeta_k \end{pmatrix}$$

Раскрыв этот определитель, для всего объема $V(P_\varepsilon)$ получаем представление

$$V(P_\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3, \tag{3}$$

где

$$V_1=\frac{1}{6}\sum_{i,j,k}[\det\begin{pmatrix} \xi_i & y_i & z_i \\ \xi_j & y_j & z_j \\ \xi_k & y_k & z_k \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} x_i & \eta_i & z_i \\ x_j & \eta_j & z_j \\ x_k & \eta_k & z_k \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} x_i & y_i & \zeta_i \\ x_j & y_j & \zeta_j \\ x_k & y_k & \zeta_k \end{pmatrix}] \tag{4}$$

$$V_3=\frac{1}{6}\sum_{i,j,k}det\begin{pmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_j & \eta_j & \zeta_j \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{pmatrix}. \tag{5}$$

с суммированием по всем согласованно ориентированным граням.

Квадраты длин ребер многогранника P_ε с учетом уравнений (2) равны $l^2_{ij}(\varepsilon) = l^2_{ij} + \varepsilon^2 L^2_{ij}$, где $L^2_{ij} = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2$, следовательно, многогранники P_ε и $P_{-\varepsilon}$ изометричны. Перенумеруем, для удобства записи, все ребра номерами $k, 1 \le k \le |E|$. Обозначим совокупность квадратов длин $l^2_{ij}(\varepsilon)$ как l_ε. Так как многогранники $P_{\pm\varepsilon}$ имеют то же комбинаторное строение, что и P, то для них многочлен объема имеет тот же вид:

$$Q(V,l,\varepsilon) = V^{2N}(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{N} a_i(l_\varepsilon)V^{2N-2i}(\varepsilon) = 0, \forall\varepsilon. \tag{6}$$

Этот многочлен при $\varepsilon = 0$ превращается в многочлен для объема $V_0 = V(0)$ исходного многогранника. Если в представлении (3) хотя бы один из коэффициентов V_1 или V_3 не равен нулю (например, так будет, если есть хотя бы одна вершина, звезда которой вся лежит на одной плоскости), тогда многочлен $Q(V,l,\varepsilon)$ в (6) будет иметь два разных корня, которые при $\varepsilon \to 0$ превратятся в двойной корень многочлена $Q(V,l)$, и тем самым в этом случае теорема доказана.

Остается рассмотреть случай, когда $V_1 = V_3 = 0$. План такой - будем искать в произвольно малой окрестности нежесткого многогранника P другие нежесткие многогранники, чтобы для них один из этих коэффициентов в формуле вида (3) был отличен от нуля; тогда их многочлен объема будет иметь кратный корень, и в пределе многочлен объема для P тоже будет с кратным корнем.

Используя аффиную инвариантность свойства нежесткости, можно показать, что в предположении равенства нулю первой вариации объема для всех аффино близких к P многогранников получаем, что рассматриваемое поле б.м.и. многогранника P должно удовлетворять равенствам

$$\sum_{i,j,k}\det\begin{pmatrix} x_i & y_i & \zeta_i \\ x_j & y_j & \zeta_j \\ x_k & y_k & \zeta_k \end{pmatrix}=0,\sum_{i,j,k}\det\begin{pmatrix} x_i & \eta_i & z_i \\ x_j & \eta_j & z_j \\ x_k & \eta_k & z_k \end{pmatrix}=0,\sum_{i,j,k}\det\begin{pmatrix} \xi_i & y_i & z_i \\ \xi_j & y_j & z_j \\ \xi_k & y_k & z_k \end{pmatrix}=0. \tag{7}$$

Требование выполнения таких же равенств для аффинно близких многогранников дает еще три условия на поле б.м.и. С добавлением этих шести уравнений к системе (2) получаем, что ранг системы увеличивается, что и позволяет получить необходимое утверждение.

Другой подход: если $Q'_V \ne 0$, тогда все малые диагонали имеют нулевую вариацию, что приводит к существованию вершин с плоской звездой, а значит, к верности теоремы.

Список литературы

[1] И.Х.Сабитов. *Алгебраические методы решения многогранников* // Успехи математических наук, **66**:3, 3–66 (2011).

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские Горы, 1, Москва, 119992, Россия

Email address: isabitov@mail.ru

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ КАТЕГОРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Е. Е. СКУРИХИН

Пусть K категория, $\mathbf{k} = \{\mathrm{k}_i \in Ob(\mathrm{K}) \mid i \in I\}$, $\mathbf{l} = \{\mathrm{l}_j \in Ob(\mathrm{K}) \mid j \in J\}$ семейства объектов категории K. Будем называть p-схемой вписывания $\mathbf{k}$ в $\mathbf{l}$ любую пару $(p, \mathbf{p})$, где $p : I \to J$ отображение множеств, $\mathbf{p} = \{p_i : \mathrm{k}_i \to \mathrm{l}_{p(i)} \mid i \in I\}$ – семейство морфизмов категории K.

Если $\mathbf{m} = \{\mathrm{m}_k \mid k \in K\}$, $(p', \mathbf{p}')$ – p'-схема вписывания $\mathbf{l}$ в $\mathbf{m}$, $p' : J \to K$, $\mathbf{p}' = \{p'_j : \mathrm{l}_j \to \mathrm{m}_{p'(j)} \mid j \in J\}$, то определим $p' \circ p$-схему вписывания $\mathbf{k}$ в $\mathbf{m}$, полагая $(p', \mathbf{p}') \circ (p, \mathbf{p})$=$(p' \circ p, \mathbf{p}' \circ \mathbf{p})$, где $\mathbf{p}' \circ \mathbf{p} = \{p'_{p(i)} \circ p_i : \mathrm{k}_i \to \mathrm{m}_{p'(p(i))} \mid i \in I\}$.

Будем называть $(p' \circ p, \mathbf{p}' \circ \mathbf{p})$ суперпозицией схем вписывания $(p', \mathbf{p}')$ и $(p, \mathbf{p})$.

Тождественную 1_I-схему вписывания $\{1_{\mathrm{k}_i} : \mathrm{k}_i \to \mathrm{k}_i \mid i \in I\}$ $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}$ будем обозначать $1_{\mathbf{k}}$.

Как правило, обозначение $(p, \mathbf{p})$ будем сокращать до $\mathbf{p}$ и p-схему вписывания называть схемой вписывания.

Таким образом, определена категория $S(\mathrm{K})$, объекты которой – это все семейства $\mathbf{k} = \{\mathrm{k}_i \in Ob(\mathrm{K}) \mid i \in I\}$ объектов категории K, $Hom_{\mathrm{S(K)}}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ множество всех схем вписывания $\mathbf{k}$ в $\mathbf{l}$, а суперпозицией является $\mathbf{p}' \circ \mathbf{p}$. При этом единицей, то есть тождественным морфизмом $\mathbf{k} \to \mathbf{k}$ является тождественная схема вписывания $1_{\mathbf{k}}$.

Пусть $D : \mathrm{K}^o \to Set$ предпучок множеств на категории K, то есть контравариантный функтор на K на категории множеств. Если $f : \mathrm{l} \to \mathrm{k}$ морфизм, $s \in D(\mathrm{k})$, то через sf будем обозначать $D(f)(s) \in D(\mathrm{l})$. Категория предпучков множеств с естественными преобразованиями в качестве морфизмов, которые мы будем называть гомоморфизмами предпучков, обозначается $\hat{\mathrm{K}}$. Таким образом, $Hom_{\hat{\mathrm{K}}}(D, E)$ – это множество всех гомоморфизмов предпучка D в предпучок E.

Пусть $\alpha = \{s_i \in D(\mathrm{k}_i) \mid i \in I\} \in \prod_{i \in I} D(\mathrm{k}_i)$. Через D_α обозначается минимальный предпучок, содержащий α. Если E предпучок множеств, то $H^0(\alpha, E) \subset \prod_{i \in I} E(\mathrm{k}_i)$ определяется так:

$\gamma = \{r_i \in E(\mathrm{k}_i) \mid i \in I\} \in H^0(\alpha, E) \Leftrightarrow \forall i, i' \in I, \forall \mathrm{k} \in Ob(\mathrm{K}), \forall g : \mathrm{k} \to \mathrm{k}_i, h : \mathrm{k} \to \mathrm{k}_{i'}$, из того, что $s_i g = s_{i'} h$ следует $r_i g = r_{i'} h$.

Если $u : D \to E$ гомоморфизм предпучков множеств, то $u(\alpha) = \{u(s_i) \equiv u(\mathrm{k}_i)(s_i) \in E(\mathrm{k}_i) \mid i \in I\} \in \prod_{i \in I} E(\mathrm{k}_i)$.

Пусть $\beta = \{t_j \in D(\mathrm{l}_j) \mid j \in J\} \in \prod_{j \in J} D(\mathrm{l}_j)$. Обозначим $\mathbf{p}^*(\beta) = \{t_{p(i)} p_i \equiv D(p_i)(t_{p(i)}) \in D(\mathrm{k}_i) \mid i \in I\} \in \prod_{i \in I} D(\mathrm{k}_i)$

Назовём стабилизатором β и будем обозначать $st_D \beta$ класс всех пар $(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2})$ схем вписывания, таких, что $\mathbf{p_1}^* \beta = \mathbf{p_2}^* \beta$.

Определим также отображение $\hat{\mathbf{p}}$ на множестве пар схем вписывания, задаваемое равенством $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}) = (\mathbf{p} \circ \mathbf{p_1}, \mathbf{p} \circ \mathbf{p_2})$.

Теорема. *Пусть* K *категория,* D, E, F *предпучки множеств на* K, $\alpha = \{s_i \in D(\mathrm{k}_i) \mid i \in I\}$, $\beta = \{t_j \in D(\mathrm{l}_j) \mid j \in J\}$, $\gamma = \{r_i \in E(\mathrm{k}_i) \mid i \in I\}$, $\delta = \{v_k \in E(\mathrm{m}_k) \mid k \in K\}$.

1). Пусть D *предпучок множеств на категории* K, $\mathbf{p} : \mathbf{k} \to \mathbf{l}$ *схема вписывания. Тогда* $st_D(\mathbf{p}^* \beta) = \hat{\mathbf{p}}^{-1}(st_D \beta)$.

2). Следующие условия эквивалентны:

(1) Существует гомоморфизм предпучков $u : D_\alpha \to E$, *такой, что* $u(\alpha) = \gamma$

(2) $\gamma \in H^0(\alpha, E)$

(3) $st_D(\alpha) \subset st_E(\gamma)$.

3). Пусть $\mathbf{q} : \mathbf{k} \to \mathbf{m}$ *схема вписывания. Обозначим через* $u_{\mathbf{q}} : D_\alpha \to E_\delta$ *такой (единственный) гомоморфизм, что* $u_{\mathbf{q}}(\alpha) = \mathbf{q}^*(\delta)$. *Через* $H(\alpha, \delta)$ *обозначим множество всех схем впивывания* $\mathbf{q} : \mathbf{k} \to \mathbf{m}$, *для которых существует* $u_{\mathbf{q}}$.

a). Следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathbf{q} \in H(\alpha, \delta)$.

(2) $\mathbf{q}^*(\delta) \in H^0(\alpha, E)$.

(3) $st_D(\alpha) \subset \hat{\mathbf{q}}^{-1}(st_E(\delta)$

(3') $\hat{\mathbf{q}}(st_D(\alpha) \subset st_E(\delta)$.

b). $\forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in H(\alpha, \delta)$, $u_{\mathbf{q}_1} = u_{\mathbf{q}_2} \Leftrightarrow (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in st_E(\delta)$.

c). Пусть $\mathbf{n} = \{\mathrm{n}_l \mid l \in L\}$, $\mathbf{h} : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ *схема вписывания,* $\varepsilon = \{v_l \in F(\mathrm{n}_l) \mid l \in L\}$. $(\mathbf{q} : \mathbf{k} \to \mathbf{m} \in \mathbf{H}(\alpha, \delta)$, $\mathbf{h} \in H(\delta, \varepsilon)$.

Тогда $(\mathbf{h} \circ \mathbf{q} : \mathbf{k} \to \mathbf{n}) \in H(\alpha, \varepsilon)$ *и* $u_{\mathbf{h} \circ \mathbf{q}} = u_{\mathbf{h}} \circ u_{\mathbf{q}}$.

4). Пусть $H = Hom_{S(\mathrm{K})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ *– полугруппа относительно суперпозиции схем вписывания,* $R = (H \times H) \cap st_D(\alpha)$. *Определим* $N(R) \subset H$, *полагая* $\mathbf{q} \in N(R) \Leftrightarrow \forall (\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) \in R, (\mathbf{q} \circ \mathbf{q_1}, \mathbf{q} \circ \mathbf{q_2}) \in R$.

Тогда:

a). $N(R) = H(\alpha, \alpha)$,

b). $Q = (N(R) \times N(R)) \cap R$ *является полугрупповой конгруэнцией на* $N(R)$ *и имеется изоморфизм полугрупп с единицей* $N(R)/Q \to Hom_{\hat{\mathrm{K}}}(D_\alpha, D_\alpha)$.

Отметим, что частными случаями данной теоремы являются теоретико-категорная лемма Ионеды, теорема об описании группы автоморфизмов топологического накрытия, а также описание полугруппы эндоморфизмов M-множества, то есть множества, на котором действует моноид M.

Переход от категории K к категории $S(\mathrm{K})$ позволяет изучать когомологии семейств, как когомологии одного объекта, о чём также предполагается рассказать в докладе.

Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, Владивосток, 690041, Россия;
Дальневосточный Федеральный Университет, б. Аякс, 10, Владивосток, 690920, Россия
Email address: eeskur@gmail.com

О ГРУППАХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕПРОЕКТИВНО-ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВ С ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

АДГАМ ЯХИЕВИЧ СУЛТАНОВ

В работе получена оценка сверху размерностей групп аффинных и проективных преобразований в пространствах с линейной связностью без кручения.

Приведём необходимые определения и факты. Пусть M – связное n-мерное вещественное многообразие класса C^∞, ∇ – линейная связность без кручения, заданная на M. Дифференцируемое отображение $f : M \to M$ называется аффинным преобразованием пространства (M, ∇), если $df(\nabla_Y Z) = \nabla_{dfY} dfZ$ для любых векторных полей Y, Z на M. Здесь df – дифференциал отображения f. Совокупность всех аффинных преобразований пространства (M, ∇) образует группу, которая обозначается $Aff(M)$. Известно, что эта группа является группой Ли преобразований относительно компактно открытой топологии в расслоении линейных реперов $P(M, G)$ со структурной группой $G = GL(n; R)$ [1]. Векторное поле X на M называется инфинитезимальным аффинным преобразованием в M, если для каждой точки $x \in M$ локальная 1-параметрическая группа локальных преобразований φ_t состоит из аффинных преобразований. Необходимым и достаточным условием того, что векторное поле X является инфинитезимальным аффинным преобразованием, является условие $L_X\nabla = 0$, где $L_X\nabla$ – тензорное поле типа (1, 1), называемое производной Ли линейной связности ∇ относительно векторного поля X.

Множество $g(M)$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований образует алгебру Ли относительно операции сложения, умножения на действительные числа и операции коммутирования векторных полей, причём $dim_{\mathbb{R}} g(M) = dim_{\mathbb{R}} Aff(M)$.

Уравнение $L_X\nabla = 0$ в локальных координатах (x^i) имеет вид:

$$\partial_j\partial_k X^i + \Gamma^i_{mk}\partial_j X^m + \Gamma^i_{jm}\partial_k X^m - \Gamma^m_{jk}\partial_m X^i + X^m\partial_m\Gamma^i_{jk} = 0. \tag{1}$$

Здесь X^i – координаты векторного поля X: $X = X^i\partial_i(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i})$, Γ^i_{jk} – коэффициенты линейной связности ∇: $\nabla_{\partial_j}\partial_k = \Gamma^i_{jk}\partial_i$. Введя новые функции $X^i_j = \partial_j X^i$, систему (1) можно представить в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка,

$$\partial_j X^i = X^i_j, \partial_j X^i_k = -\Gamma^i_{mk}\partial_j X^m - \Gamma^i_{jm}\partial_k X^m + \Gamma^m_{jk}\partial_m X^i - X^m\partial_m\Gamma^i_{jk}, \tag{2}$$

разрешенной относительно всех производных.

Первую серию условий интегрируемости системы (2) можно представить в виде

$$X^m\partial_m R^i_{jkl} + R({}^i_{jkl}|^s_m)X^m_s = 0, \tag{3}$$

где

$$R({}^i_{jkl}|^s_m) = \delta^s_j R^i_{mkl} + \delta^s_k R^i_{jml} + \delta^s_l R^i_{jkm} - \delta^i_m R^s_{jkl}.$$

Систему линейных однородных уравнений (3), содержащую n^2+n неизвестных X^m, X^m_s, будем использовать для оценки сверху размерностей алгебры Ли $g(M)$ в случае, когда тензорное поле R кривизны связности ∇ удовлетворяет следующим условиям:

(1) компоненты вида $R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$ равны нулю во всех координатных окрестностях каждой точки $p \in M$ для попарно различных индексов i_1, i_2, i_3;

(2) существует координатная окрестность точки $q \in M$, в которой $R^{i_1}_{i_2 i_3 i_4}(q) \neq 0$ для попарно различных индексов i_1, i_2, i_3, i_4;

(3) в тождестве Бианки равенство, содержащее эту компоненту, является неполным (только два отличных от нуля слагаемых). Имеет место

Теорема 1. *Максимальная размерность алгебр Ли $g(\nabla)$ пространств со связностью ∇ размерности n, удовлетворяющих перечисленным условиям (1), (2) и (3), равна точно $n^2 - 3n + 6 (n \geq 4)$.*

Точность этой оценки устанавливается на основании примера пространства $(\mathbb{R}, \nabla)$, где линейная связность ∇ задается компонентами $\Gamma^1_{23} = x^4$, другие $\Gamma^k_{ij} = 0$, предложенного Г. Вранчану. И.П. Егоров установил, что для этой связности $dim_{\mathbb{R}} g(\nabla) = n^2 - 3n + 6$. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Максимальная размерность групп $Aff(M)$ аффинных преобразований пространства (M, ∇) размерности n, где ∇ удовлетворяет условиям (1), (2) и (3), равна точно $n^2 - 3n + 6$.*

Эти результаты позволяют дать оценку сверху размерностей алгебр Ли инфинитезимальных проективных преобразований $\tilde{g}(\nabla)$ и групп проективных преобразований в (M, ∇).

Известно, что векторное поле X называется инфинитезимальным проективным преобразованием пространства (M, ∇), если $L_X \nabla(Y, Z) = \omega(Y)Z + \omega(Z)Y$ для некоторой 1-формы ω [2]. И.П. Егоровым доказано, что для непроективно-плоских пространств (M, ∇) для оценки размерности $\tilde{g}(\nabla)$ можно использовать систему, полученную из системы (3), заменив компоненты R^i_{jkl} на соответствующие компоненты тензорного поля Вейля W^i_{jkl}. Тогда в рассматриваемом случае имеют место

Теорема 3. *Максимальная размерность алгебр Ли $\tilde{g}(\nabla)$ инфинитезимальных проективных преобразований пространства (M, ∇) размерности n, где ∇ удовлетворяет условиям (1), (2) и (3), равна точно $n^2 - 3n + 6 (n \geq 4)$.*

Теорема 4. *Максимальная размерность группы проективных преобразований пространства (M, ∇) размерности n, где ∇ удовлетворяет условиям (1), (2) и (3), равна точно $n^2 - 3n + 6 (n \geq 4)$.*

Список литературы

[1] Ш. Кобаяси, Основы дифференциальной геометрии в 2 т. Т.1 // Ш.Кобаяси, К. Номидзу; перевод с англ. Л.В.Сабинина., М.: Наука, 1981.

[2] И.П. Егоров, Движения в пространствах аффинной связности // Казань: Изд-во Казанского гос.унив-та, 1965. – С. 5-179.

Пензенский государственный унивеситет, ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия
Email address: sultanovaya@rambler.ru

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ В ГРУППЕ ПОЛУАФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

МАКСИМ ТРЯМКИН

В римановой геометрии подробно разработаны способы описания кривизны многообразия (тензор кривизны, секционная кривизна и т. д.). Иначе обстоит дело в субримановой геометрии: сравнительно недавно появились работы, в которых предлагаются различные подходы к выяснению содержания понятия кривизны для субриманового многообразия. Как представляется, самые заметные из них — это вариационный подход ([1]) и метод римановых приближений. Последний основан на известном результате М. Громова ([2]) о том, что субриманово многообразие с метрикой Карно—Каратеодори является поточечным пределом в смысле Громова—Хаусдорфа некоторого семейства римановых пространств.

Техника римановых приближений оказалась плодотворной: на ее основе было введено понятие горизонтальной средней кривизны поверхности в группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ ([3],[4]), получены оценки фундаментального решения субриманова лапласиана ([5]), доказан аналог теоремы Гаусса—Бонне для группы $\mathbb{H}^1$ ([6]) и др. В статье [6], помимо прочего, определена субриманова кривизна евклидовой C^2-гладкой регулярной кривой, лежащей в $\mathbb{H}^1$.

Цель настоящего доклада — изложить результаты, касающиеся внутренней геометрии евклидовой C^2-гладкой регулярной поверхности, лежащей в группе $A^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ полуаффинных преобразований евклидовой плоскости. Эта группа входит в список трехмерных групп Ли, допускающих наделение нетривиальной левоинвариантной субримановой структурой. Ее элементы — это преобразования евклидовой плоскости, которые вдоль одной оси действуют как сдвиги, а вдоль другой — как аффинные отображения, сохраняющие ориентацию. Следуя работе [6], мы благодаря методу римановых приближений получаем субримановы аналоги для геодезической кривизны кривой и для гауссовой кривизны поверхности. Эти результаты применяются к получению версии теоремы Гаусса–Бонне на группе $A^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Список литературы

[1] A. Agrachev, D. Barilari, L. Rizzi, *Curvature: a variational approach* // https://arxiv.org/abs/1306.5318 (2015).

[2] M. Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within* // Birkhäuser Verlag, 1996.

[3] S. Pauls, *Minimal surfaces in the Heisenberg group* // Geom. Dedicata, **104**, 201–231 (2004).

[4] L. Capogna, D. Danielli, S. Pauls, J. Tyson, *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem* // Birkhäuser Verlag, 2007.

[5] G. Citti, M. Manfredini, *Uniform estimates of the fundamental solution for a family of hypoelliptic operators* // Potential Anal., **25**:2, 147–164 (2006).

[6] Z. Balogh, J. Tyson, E. Vecchi, *Intrinsic curvature of curves and surfaces and a Gauss—Bonnet theorem in the Heisenberg group* // Mathematische Zeitschrift, **287**:1–2, 1–38 (2017).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т акад. Коптюга, 4, 630090, Россия;
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

Email address: maxtryamkin@math.nsc.ru

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ УТВЕРЖДЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С СЕНСОРНЫМИ СЕТЯМИ

П. В. ЧЕРНИКОВ

В статье [1] при рассмотрении сенсорных сетей доказаны, в частности, следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть* $K_3 \subset \mathbb{R}^2$ *— правильный треугольник и точка* M *принадлежит* K_3*. Сумма расстояний* $L(M)$ *от точки* M *до всех вершин треугольника* K_3 *принимает (строго) минимальное значение, если точка* M *находится в центре треугольника* K_3*.*

Предложение 2. *Пусть* $K_3 \subset \mathbb{R}^2$ *— правильный треугольник и точка* M *принадлежит* K_3*. Сумма квадратов расстояний от точки* M *до всех вершин треугольника* K_3 *принимает (строго) минимальное значение, если точка* M *находится в центре треугольника* K_3*.*

Следующая теорема обобщает предложения 1, 2.

Теорема. *Пусть* $K_n \subset \mathbb{R}^2$ *— правильный* n*-угольник* $(n \geq 3)$ *и* $M \in \mathbb{R}^2$*. Пусть* $a_i(M)$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, — расстояния от точки* M *до вершин многоугольника* K_n*. Сумма* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^r(M)$*,* $r \in \{1, 2, \ldots\}$*, принимает (строго) минимальное значение, если точка* M *находится в центре многоугольника* K_n*.*

Список литературы

[1] С. Н. Астраков, А. И. Ерзин, В. В. Залюбовский *Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами* // Дискретн. анализ и исслед. опер., **16**:3, 3–19 (2009).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Россия

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА ТРЕТЬЕГО РОДА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНЕЧНОГО ТИПА

А. В. ЧУЕШЕВ[1], В. В. ЧУЕШЕВ[2]

В работе построены основные виды элементарных $q-$дифференциалов Прима. Найдены явные базисы, локально голоморфно зависящие от модулей $[\mu]$ римановых поверхностей $F' = F\backslash\{P_1, \dots, P_n\}$ типа (g, n), $n \geq 1$, $g \geq 2$, и от характеров, связь с первой голоморфной группой когомологий де Рама для характеров. Любая комплексно-аналитическая структура F'_μ может быть отождествлена с некоторым дифференциалом Бельтрами μ.

Найдем общий вид (ρ, q)-дифференциалов третьего рода с единственными простыми полюсами в различных точках Q_1, Q_2 на F'_μ, где $q \geq 1$.

Теорема 1. *Для любых различных точек Q_1, Q_2 на поверхности F'_μ типа $(g, n), g \geq 2, n \geq 1, q \geq 1$, и характера ρ на F'_μ существует элементарный $(\rho, q)-$дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}$ третьего рода класса $M_1(\rho)$, у которого общий вид дивизора $(\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q_1Q_2}\frac{1}{P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$, где верно равенство $\varphi(R_1 \dots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_1Q_2) - \varphi(R_{g+1} \dots R_N) + \varphi(P_1^{k_1}) + \dots + \varphi(P_n^{k_n}) + \psi(\rho)$, $k_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, в многообразии Якоби $J(F_\mu)$, и $N = (2g-2)q + 2 + k_1 + \dots + k_n$. При этом точки $R_{g+1}, \dots, R_N$ выбираются произвольно на $F'_\mu\backslash\{Q_1, Q_2\}$. Кроме того, эти дифференциалы локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.*

Обозначим через $\Omega_\rho(\frac{1}{Q_1\dots Q_s}; F'_\mu)$ пространство дифференциалов класса M_1 для ρ, кратных дивизору $\frac{1}{Q_1\dots Q_s}$ на F'_μ, а через $\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ — подпространство голоморфных мультипликативно точных дифференциалов для ρ на F'_μ.

Теорема 2. *Векторное расслоение*

$$\bigcup \Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $2g+n-2+s$ над базой $\mathbb{T}_{g,n} \times (L_g\backslash\{1\})$ при $g \geq 2$, $n \geq 2$, $s \geq 1$. Причем набор классов смежности дифференциалов

$$f_0\zeta_1, \dots, \widehat{f_0\zeta_k}, \dots, f_0\zeta_g, f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}, \dots, f_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)},$$

$$f_0\tau_{P_2P_1}, \dots, f_0\tau_{P_nP_1}, f_0\tau_{Q_1P_1}, \dots, f_0\tau_{Q_sP_1},$$

будет базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где $n_1, ..., n_g$ — мультипликативные пробелы Вейерштрасса в P_1 для ρ на F_μ, $\rho(a_k) \neq 1$, $Q_1, \dots, Q_s$ — различные точки на F'_μ, голоморфно зависящие от $[\mu]$.

Следствие 1. *Голоморфное векторное расслоение (со слоями состоящими из первых голоморфных групп когомологий де Рама для ρ на F'_μ)*

$$\bigcup_{[\mu],\rho\neq 1} H^1_{hol,\rho}(F'_\mu) = \bigcup \Omega_\rho(1; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$$

аналитически эквивалентно тривиальному векторному расслоению ранга $2g + n - 2$ над базой $\mathbb{T}_{g,n} \times (L_g\backslash\{1\})$ при $g \geq 2$, $n \geq 2$.

Зададим отображение периодов χ из $\Omega_\rho(1; F'_\mu)$ на $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, сопоставляя ω его класс периодов $[\omega]$, который определяется набором классических периодов

$$(\int_{a_1^\mu} \omega, ..., \int_{a_g^\mu} \omega, \int_{b_1^\mu} \omega, ..., \int_{b_g^\mu} \omega, \int_{\gamma_1^\mu} \omega, ..., \int_{\gamma_{n-1}^\mu} \omega).$$

Грант РФФИ № 18-01-00420 (Новосибирск, ИМ СО РАН) .

Выбираем представитель в $[\omega]$ определенный условием $\int\limits_{a_1^\mu} \omega = \omega(A_1^\mu) = 0$.

Отображение χ имеет ядро $Ker\chi = \Omega_{e,\rho}(1, F'_\mu)$. Это пространство будет бесконечномерным, так как полюса дифференциала на F'_μ можно выбирать в проколах произвольным образом. Учитывая следствие 1 получаем, что фактор пространство $\Omega_\rho(1; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ изоморфно конечномерному пространству $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$.

Следствие 2. *На любой поверхности F'_μ типа (g, n), $g \geq 2$, $n \geq 2$ для несущественного характера ρ имеет место изоморфизм*

$$\Omega_\rho(1; F'_\mu) \cong Ker\chi \oplus H^1_{hol,\rho}(F'_\mu),$$

где $Ker\chi = \Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ — бесконечномерное векторное пространство и $\dim_{\mathbb{C}} H^1_{hol,\rho}(F'_\mu) = 2g + n - 2$.

[1]Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650065, Россия

[2]Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650065, Россия
Email address: vvchueshev@ngs.ru

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

НАДЕЖДА ЧУЕШЕВА

В работах [1], [2] рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения третьего порядка

$$u_{xxx}u_y^3 - 3u_{xxy}u_y^2u_x + 3u_{xyy}u_yu_x^2 - u_{yyy}u_x^3 = 0, \qquad (1)$$

$$u_{xxx}u_y^3 - 3u_{xxy}u_y^2u_x + 3u_{xyy}u_yu_x^2 - u_{yyy}u_x^3 +$$
$$+3\beta\sqrt{\left(u_x^2+u_y^2\right)}\left(u_{xx}u_xu_y + u_{xy}\left(u_y^2-u_x^2\right) - u_{yy}u_xu_y\right) = 0. \qquad (2)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции

$$u(t) = u\left(ax^2+by^2+c\right), \quad u(t) = u\left(ax+by+c\right), \; u(t) \in C^3\left(\overline{D}\right),$$

будут решениями уравнения (1) при любых вещественных или комплексных постоянных a, b, c. Но для уравнения (2) должно выполняться ещё одно из трёх условий

$$b = a, \; b = ia, \; b = -ia, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

При этом: 1) $u = u\left(ax+by+c\right)$ – вещественная функция двух переменных x, y, если $b = a, \; a, b \in \mathbb{R}$;

2) $u = u\left(ax+by+c\right)$ – аналитическая функция переменной z, если $b = ia, \; a, b \in \mathbb{R}$;

3) $u = u\left(ax+by+c\right)$ – антианалитическая функция переменной $\overline{z}$, если $b = -ia, a, b \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Пусть дана область $D \subset \mathbb{R}^2$ с границей*

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; ax^2+by^2+c = 0\right\}, \; a > 0, b > 0, c < 0.$$

Пусть функция $u\left(ax^2+by^2+c\right) \in C^3\left(\overline{D}\right)$ и удовлетворяет условиям на границе:

$$u|_\Gamma = u_x|_\Gamma = u_y|_\Gamma = 0. \qquad (3)$$

Тогда такая функция будет неединственным решением краевой задачи (3) для уравнения (1). При условии $a = b$ эта функция будет неединственным решением краевой задачи (3) для уравнения (2).

Замечание 1. *Например, условия леммы выполняются для функции*

$$u\left(x^2+y^2-\rho^2\right) = e^{-\left(x^2+y^2-\rho^2\right)} + \sqrt{2}\,\sin\left(\left(x^2+y^2-\rho^2\right) - \frac{\pi}{4}\right),$$

краевых условий (3) и области D с границей $\Gamma = \left\{x^2+y^2 = \rho^2\right\}$.

Рассмотрим у уравнения

$$e^{-t} + \sqrt{2}\,\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad t = ax+by,$$

два решения 0 и $t_0 = c$, где $c \in \left(\pi + \frac{\pi}{4}, \; \pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Лемма 2. *Пусть дана область $D \subset \mathbb{R}^2$ с границами $\Gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax+by = 0, \; ax+by = c, \right\}$ и $\Gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax+by = 0, \; ax+by = \pi, \right\}$. Пусть функция $u\left(ax+by\right) \in C^3\left(\overline{D}\right)$,*

$$u|_{\Gamma_1} = u_x|_{\Gamma_1'} = u_y|_{\Gamma_1'} = 0, \quad \Gamma_1' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax+by = 0, \right\}. \qquad (4)$$

$$u|_{\Gamma_2} = u_{xx}|_{\Gamma_2} = u_{yy}|_{\Gamma_2} = 0. \qquad (5)$$

Тогда такая функция будет неединственным решением краевых задач (4) и (5) для уравнения (1). При условии $a = b$ эта функция будет неединственным решением краевых задач (4) и (5) для уравнения (2).

Замечание 2. *Например, 1) условиям задач (4), (1) и (4), (2) удовлетворяет функция*

$$u\,(x+y) = e^{-(x+y)} + \sqrt{2}\ \sin\left((x+y) - \frac{\pi}{4}\right).$$

2) условиям задач (5), (1) и (5), (2) удовлетворяет функция

$$u\,(x+y) = \sin(x+y).$$

В работе [3] рассматривалось уравнение Кортевега-де Фриза пятого порядка

$$u_t - u_{xxxxx} + c_1\ (u^3)_x + c_2\ \left((u_x)^2\right)_x + c_3\ (u\ u_{xx})_x = 0. \tag{6}$$

Задача. Пусть дан прямоугольник $\Pi = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,a),\ t \in (0,b)\}$, в котором задано уравнение (6), Γ – граница прямоугольника, $n = (n_x, n_t)$ – вектор внутренней нормали к гладким участкам границы Γ. Пусть решение уравнения (6) удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{x=0,x=a}\ =\ u_x|_{x=0,x=a}\ =\ u_{xx}|_{x=0}\ =\ u|_{t=0}\ =\ 0. \tag{7}$$

Теорема. *Пусть коэффициенты дифференциального уравнения (6) c_1, c_2, b будут комплексными или вещественными постоянными. Тогда решение граничной задачи (7) для уравнения (6) почти всюду в прямоугольнике Π будет равно нулю.*

Список литературы

[1] A. Mironov, M. Bialy, *Angular Billiard and Algebraic Birkhoff conjecture* // Adv.Math., **313**, 102–126 (2017).

[2] A. Mironov, M. Bialy, *Algebraic Birkhoff conjecture for billiards on Sphere and Hyperbolic plane* // J.Geom.Phys., **115**, 150–156 (2017).

[3] N. Chuesheva, *Some Equations with Partial Derivative of High Order* // Siberian J. of Pure and Appl. Mat., **16**:3, 103–117 (2016).

Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия

Email address: chuesheva@ngs.ru

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2018»,

19–22 сентября 2018 года

Подписано в печать 01.08.2018			Формат 60×84 1/8
Усл. печ. л. 9,26.	Уч.-изд. л. 5,9.	Тираж 120 экз.	Заказ 176

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Отпечатано в ООО «Дигит Про»
г. Новосибирск, ул. Журинская, 78, 2 этаж
Тел. +7 (383) 201-49-82