РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2019»,

26–30 августа 2019 года

Новосибирск, 2019

УДК 514: 515.1: 517.518: 517.54: 517.938: 517.958

ББК 22.15

Д 548

ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2019: Тезисы Международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2019. — 47 с.

ISBN 978-5-86134-230-X

Настоящее издание содержит тезисы докладов Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске–2019», 26–30 августа 2019 г. Конференцию проводит Лаборатория топологии и динамики Новосибирского национального исследовательского государственного университета и Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН совместно с Международной лабораторией зеркальной симметрии и автоморфных форм Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Основная тематика докладов относится к следующим актуальным направлениям современной математики: дифференциальной геометрии, геометрии и топологии трехмерных многообразий, теории интегрируемых систем, квазиконформному анализу и функциональным пространствам, приложениям геометрии и топологии.

Сборник представляет интерес для научных работников и аспирантов, интересующихся современными проблемами геометрии, топологии и анализа.

Конференция и издание сборника поддержаны грантом Правительства РФ (Договор №14.Y26.31.0025 от 01.02.2018).

Редакторы: И. А. Тайманов, А. Ю. Веснин, А. Е. Миронов, Н. В. Абросимов

GEOMETRY DAYS IN NOVOSIBIRSK–2019: Abstracts of the International Conference. Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2019. — 47 p.

Editors: I. A. Taimanov, A. Yu. Vesnin, A. E. Mironov, N. V. Abrosimov

$Д \dfrac{1602050000 - 4}{Я82(03) - 2019}$

ISBN 978-5-86134-230-X

Содержание

СЛОВО О Ю. Г. РЕШЕТНЯКЕ ПО СЛУЧАЮ ЕГО 90–ЛЕТИЯ

СЕМЁН КУТАТЕЛАДЗЕ

26 сентября 2019 г. — день девяностолетия Юрия Григорьевича Решетняка. Серьёзная юбилейная дата располагает к подведению некоторых итогов пережитого и сделанного.

Решетняк — профессиональный математик, представитель самой универсальной и гуманной технологии человечества. Математика — наука и искусство доказательных исчислений, раскрывающая бесконечные возможности конечного человека.

Решетняк внес значительный вклад в математику, став одним из основоположников геометрического анализа, находящегося на стыке анализа, геометрии и теории функций. Многие его достижения вошли в математическую сокровищницу. Теорема Решетняка об изотермических координатах на двумерных многообразиях ограниченной кривизны, введенных А. Д. Александровым, соединила анализ с идеями геометрии в целом. Мировую известность приобрело окончательное решение проблемы М. А. Лаврентьева об устойчивости конформных отображений. Вошли в арсенал теории функций и оптимального управления теоремы Решетняка о слабой сходимости якобианов, о полунепрерывности снизу функционалов вариационного исчисления и о дифференцируемости почти всюду функций с обобщенными производными в смысле С. Л. Соболева.

Школа Решетняка и ее достижения обшепризнаны и знакомы специалистам. Нет необходимости излагать технические детали широкой аудитории. Достаточно заметить, что математика Решетняка отвечает высоким принципам совершенства, сформулированным С. Маклейном: "Excellent mathematics should be inevitable, illuminating, deep, relevant, responsive, and timely."

Математиком быть не стыдно, но стыдно быть только математиком. Решетняк всегда был и остается ученым по убеждениям, то есть человеком, для которого принципы науки императивны. Ученый по убеждениям и ученик и учитель одновременно. Решетняк — ученик А. Д. Александрова и учитель тысяч математиков, выпускников НГУ, которых он знакомил с началами математического анализа. Его курс остается базовым уже более полувека. Ученый по убеждениям всегда стремится привести своих учеников к границам непознанного. Курс Решетняка знаменует переход от классики преподавания дифференциального и интегрального исчисления в стиле Г. М. Фихтенгольца к современному анализу на основе теории множеств, метрических и банаховых пространств, внешних форм и теории меры.

Ученый по убеждениям шире узких рамок специализации, противник любых нарушений академических принципов свободы и непредвзятости, непримиримый враг лженауки, борец с околоучеными. Решетняк всегда защищает своих учеников и сотрудников от преследований, дает отпор клеветникам на предшественников невзирая ни на какие внешние обстоятельства. Качества совсем нечастые в научной среде.

Все, кто знаком с Юрием Григорьевичем, желают ему и его близким счастья и радости.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга 4, 630090 Новосибирск, Россия

Email address: sskut@math.nsc.ru

ON POLYNOMIAL FIRST INTEGRALS OF MAGNETIC GEODESIC FLOWS ON THE 2-TORUS

SERGEI AGAPOV

Searching for Riemannian metrics on 2-surfaces with integrable geodesic flows is a classical problem which has been studied for a long time. We will discuss some questions related to polynomial integrability of such flows on the 2-torus in presence of a magnetic field.

This talk is based on joint results with M. Bialy, A. E. Mironov, A. A. Valyuzhenich.

References

[1] S. V. Agapov, M. Bialy, A. E. Mironov, *Integrable magnetic geodesic flows on 2-torus: New examples via quasi-linear system of PDEs* // Comm. Math. Phys., **351**:3 (2017), 993–1007.

[2] S. Agapov, A. Valyuzhenich, *Polynomial integrals of magnetic geodesic flows on the 2-torus on several energy levels* // accepted to Disc. Cont. Dyn. Syst. - A, **39**:11 (2019). arXiv:1812.01290

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: agapov.sergey.v@gmail.com, agapov@math.nsc.ru

A SUFFICIENT CONDITION FOR A POLYHEDRON TO BE RIGID

VICTOR ALEXANDROV

We study oriented connected closed polyhedral surfaces with non-degenerate triangular faces in three-dimensional Euclidean space, calling them polyhedra for short. A polyhedron is called flexible if its spatial shape can be changed continuously by changing its dihedral angles only.

We prove that for every flexible polyhedron some integer combination of its dihedral angles remains constant during the flex. The proof is based on a recent result of A. A. Gaifullin and L. S. Ignashchenko [1].

The talk is based on the author's paper [2].

References

[1] A. A. Gaifullin, L. S. Ignashchenko, *Dehn invariant and scissors congruence of flexible polyhedra* // Proc. Steklov Inst. Math., **302** (2018), 130–145.

[2] V. Alexandrov, *A sufficient condition for a polyhedron to be rigid* // Journal of Geometry, **110**:38 (2019), 11 p.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: alex@math.nsc.ru

ON MULTIVALUED QUSIMÖBIUS MAPPINGS

VLADISLAV V. ASEEV

Using the Ptolemaic characteristic for a tetrad we introduce the concept of general angle in Ptolemaic Möbius spaces $(X, \mathcal{M}_1)$, $(Y, \mathcal{M}_2)$ and study the class BAD of multivalued mappings $F : X \to 2^Y$ with controlled distortion of general angles. Since a single-valued mapping with this property is quasimöbius, we may consider the BAD property as a direct generalization of quasimöbius property to multivalued mappings in Ptolemaic Möbius spaces. In our paper [1] we show that single-valued branches of multivalued mappings with BAD property are also quasimöbius. We study the upper semicontinuous property of such mappings and obtain the upper bounds for possible leaks.

References

[1] V. V. Aseev, *Multivalued mappings with quasimöbius property* // Siberian Mathematical Journal, (2019), in print.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: btp@math.nsc.ru

The author was supported by Program of Basic Scientific Reseach of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Grant No. 1.1.2, Project 0314-2016-0007).

THE PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE, (CO)ADJOINT REPRESENTATION, AND NORMAL GEODESICS OF LEFT-INVARIANT (SUB-)FINSLER METRICS ON LIE GROUPS

VALERII BERESTOVSKII[1], IRINA ZUBAREVA[2]

Every left-invariant (sub-)Finsler metric $d = d_F$ on a connected Lie group G with Lie algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ is defined by a subspace $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$, generating $\mathfrak{g}$, and some norm F on $\mathfrak{p}$. A distance $d(g,h)$ for $g, h \in G$ is defined as the infimum of lengths $\int_0^T |\dot{g}(t)|dt$ of piecewise smooth paths $g = g(t)$, $0 \leq t \leq T$, such that $dl_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t) \in \mathfrak{p}$ and $g(0) = g$, $g(T) = h$; T is not fixed, $|\dot{g}(t)| = F(dl_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t))$. If $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ then d is a left-invariant Finsler metric on G; if $F(v) = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, $v \in \mathfrak{p}$, where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is some scalar product on $\mathfrak{p}$, then d is a left-invariant sub-Riemannian metric on G, and d is a left-invariant Riemannian metric, if additionally $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$.

Theorem 1.[1] *Every shortest arc $g = g(t)$, $0 \leq t \leq T = d(g_0, g_1)$, in (G, d) with $g(0) = g_0$, $g(T) = g_1$, is a solution of the time-optimal problem for the control system $\dot{g} = (dl_g)(u), \quad u \in \mathfrak{p}$, with compact control region $U = \{u \in \mathfrak{p} : F(u) \leq 1\}$ and indicated endpoints.*

On the ground of Theorem 1, using the Potryagin Maximum Principle for the corresponding time-optimal problem [2], we prove the following results below.

Theorem 2. *1. Any normal extremal $g = g(t) : \mathbb{R} \to G$ (parameterized by arc length and with origin $e \in G$), of left-invariant (sub-)Finsler metric d on a Lie group G, defined by a norm F on the subspace $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ with closed unit ball U, is a Lipschitz integral curve of the following vector field*

$$v(g) = dl_g(u(g)), \quad u(g) = \psi_0(Ad(g)(w(g)))w(g), \quad w(g) \in U,$$

$$\psi_0(Ad(g)(w(g))) = \max_{w\in U} \psi_0(Ad(g)(w)) = \max_{w\in U} Ad(g)^*(\psi_0)(w),$$

where $\psi_0 \in \mathfrak{g}^*$ is some fixed covector with $\max_{v\in U} \psi_0(v) = 1$.

2. (Conservation law) In addition, $\psi(t)(g(t)^{-1}g'(t)) \equiv 1$ for all $t \in \mathbb{R}$, where $\psi(t) := (Ad(g(t)))^*(\psi_0)$.

Remark 1. *Similar results are proved in book [3] by Velimir Jurdjevich.*

Remark 2. *Every extremal with origin g_0 is obtained by the left shift l_{g_0} from some extremal with origin e.*

Remark 3. *In (sub-)Riemannian case, the vector $u(g)$ is characterized by condition $\langle u(g), v\rangle = \psi_0(Ad(g)(v))$ for all $v \in \mathfrak{p}$. In Riemannian case, every extremal is a normal geodesic, and we can assume that ψ_0 is an unit vector in $(\mathfrak{p} = \mathfrak{g}, (\cdot,\cdot))$, setting $\psi_0(v) = (\psi_0, v)$, $v \in \mathfrak{g}$. Moreover, $\dot{g}(0) = \psi_0$.*

Corollary 1. *Every geodesic of a biinvariant Riemannian metric on a Lie group with the unit origin is its 1-parameter subgroup.*

Theorem 3. *If $v(g_0) \neq 0$, $g_0 \in G$, then an integral curve of the vector field $v(g), g \in G$, with origin g_0 is a normal extremal parametrized proportionally to arc length with the proportionality factor $|dl_{g_0^{-1}}(v(g_0))|$.*

Remark 4. *Theorem 2 holds for left-invariant Riemannian metrics on (connected) Lie groups. In this case, $v(g_0) \neq 0$ for all $g_0 \in G$.*

Let us choose a basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in $\mathfrak{g}$, assuming that $\{e_1, \ldots, e_r\}$ is an orthonormal basis for the scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on $\mathfrak{p}$ in case of left-invariant (sub)-Riemannian metric. Define a scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on $\mathfrak{g}$, considering $\{e_1, \ldots, e_n\}$ as its orthonormal basis. Then each covector $\psi \in \mathfrak{g}^*$ can be considered as a vector in $\mathfrak{g}$, setting $\psi(v) = \langle\psi, v\rangle$ for every $v \in \mathfrak{g}$. If $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i e_i$, $v = \sum_{k=1}^n v_k e_k$, then $\psi(v) = \psi \cdot v$, where ψ and v are corresponding vector-row and vector-column, $\cdot$ is the matrix multiplication.

If $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, is a normal geodesic of a left-invariant (sub-)Riemannian metric d on a Lie group G, then $u(g(t))$ is the orthogonal projection onto $\mathfrak{p}$ of the vector $(Ad(g(t)))^*(\psi_0)$ in the notation of Theorem 2 for the scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ introduced above on $\mathfrak{g}$. This fact implies

Theorem 4. *Every normal parameterized by arclength geodesic of left-invariant (sub-)Riemannian metric on a Lie group G issued from the unit is a solution of the following system of differential equations*

$$\dot{g}(t) = dl_{g(t)}u(t),\ u(t) = \sum_{i=1}^{r}\psi_i(t)e_i,\ |u(0)| = 1,\ \dot{\psi}_j(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}c_{ij}^k\psi_i(t)\psi_k(t), \psi(0) = \psi_0,$$

where $j = 1,\dots,n$, c_{ij}^k are structure constants of Lie algebra $\mathfrak{g}$ in its basis $\{e_1,...,e_n\}$.

Corollary 2. $|\dot{g}(t)| = |u(t)| \equiv 1, \quad t \in \mathbb{R}$.

The only Lie groups which do not admit left-invariant sub-Finsler metrics are commutative Lie groups and Lie groups G_n, $n \geq 2$, which can be described as connected Lie groups every whose left-invariant Riemannian metric has constant negative sectional curvature [4]. The group operations for $G_n = \mathbb{R}^n_+ = \{(y,x) \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$, $n \geq 2$, have a form

$$(y_1,x_1)\cdot(y_2,x_2) = x_1(y_2,x_2) + (y_1,0), \quad (y,x)^{-1} = x^{-1}(-y,1).$$

Then it is clear that $e = (0,1)$ is the unit in G_n and the group G_n is a simply transitive isometry group of the famous Poincare's model of the Lobachevsky space L^n in $\mathbb{R}^n_+$ with metric $ds^2 = (\sum_{k=1}^{n-1}dy_k^2 + dx^2)/x^2$ of constant sectional curvature -1 and corresponding coordinate orthonormal basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ in $\mathfrak{g}_n = (G_n)_e$. All nonzero structure constants in $\{e_1,\dots,e_n\}$ are equal to $c_{ni}^i = -c_{in}^i = 1, \quad i = 1,\dots,n-1$. Using independently Theorems 2 and 4, we obtain the same results: Every geodesic $g(t) = (y(t),x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, in (G_n,d), parameterized by arclength, with origin e are well-known semicircles passing through e and orthogonal to $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$x(t) = 1/(\cosh t - \varphi_n\sinh t), y_i(t) = \varphi_i\sinh t/(\cosh t - \varphi_n\sinh t), \psi_i(0) = \varphi_i,\ i = 1,\dots,n, \sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2 = 1.$$

The Lie group $SE(2)$ is isomorphic to the group of matrices of a form

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

The Lie group $SH(2)$ is obtained from $SE(2)$ by changing $\cos\varphi$ and $\sin\varphi$ respectively by $\cosh\varphi$ and $\sinh\varphi$. Using Theorem 4 for $SO(3)$ and Theorem 2 for Lie groups $SE(2)$ and $SH(2)$, we proved that for left-invariant sub-Riemannian metrics, arbitrary on $SO(3)$ and some natural on $SE(2)$ and $SH(2)$, every parameterized by arclength geodesic $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $g(0) = e$, has correspondingly the following form:

$\dot{g}(t) = g(t)u(t), u(t) = \cos(\omega(t)/2)e_1 + \sin(\omega(t)/2)e_2, \ddot{\omega}(t) = (a^2 - b^2)\sin\omega(t), a^2 \leq b^2;$

$\dot{\varphi}(t) = \cos(\omega(t)/2), \dot{x}(t) = \sin(\omega(t)/2)\cos\varphi(t), \dot{y}(t) = \sin(\omega(t)/2)\sin\varphi(t);$

$\dot{\varphi}(t) = \sin(\omega(t)/2), \dot{x}(t) = \cos(\omega(t)/2)\cosh\varphi(t), \dot{y}(t) = \cos(\omega(t)/2)\sinh\varphi(t); \ddot{\omega}(t) = -\sin\omega(t).$

References

[1] V. Berestovskii, *Homogeneous spaces with intrinsic metric* // Soviet Math. Dokl., **38**:1 (1989), 60–63.

[2] L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, E. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes* // N.Y.-London: John Wiley & Sons, 1962.

[3] V. Jurdjevich, *Geometric control theory* // Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[4] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups* // Adv. Math., **21** (1976), 293–329.

[1]Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia; Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: vberestov@inbox.ru

[2]Sobolev Institute of Mathematics (Omsk Branch), 13 Pevtsova st., Omsk, 644099, Russia
Email address: igribanova@mail.ru

ON FAMILIES OF SUBARCS IN NON-PCF DENDRITES

MARINA CHANCHIEVA[1], NIKOLAI ABROSIMOV[2], AND ANDREI TETENOV[3]

Post-critically finite (PCF) self-similar sets occupy significant position in the theory of self-similar sets. They have a very clear structure which allows to build productive models of analysis and differential equations. Such sets can also have very attractive geometric features: as it was proved by C. Bandt in [1], the set of dimensions of minimal subarcs of a PCF set is finite. This is also true for any postcritically finite self-similar dendrite K, and the set of cut points of such dendrite may be represented as a countable union of images of arcs $\gamma_k, k = 1, \ldots, n$ which are the components of attractor of some graph-directed IFS [2].

In this connection, much less is known about non-postcritically finite self-similar dendrites. Nevertheless, it turns out that in non-PCF dendrites which satisfy one-point intersection property the set of dimensions of subarcs may be also finite.

We construct a sufficiently wide family of non-postcritically finite systems of contraction similarities $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$, whose attractors K are dendrites, lying in a triangle $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ with the vertices $(0,0), (1,0), (1/2, \sqrt{3}/2)$ and for which the following properties hold:

(1) All subarcs $\gamma_{xy} \subset K, x \neq y$ and the set of cut points of the dendrite K have the same Hausdorff dimension s.

(2) The set of s-dimensional measures ℓ_{Ox} of paths connecting the point $O = \mathrm{Fix}(S_0)$ with the points $x \in K \cap [0,1]$ lying on the base of the triangle Δ is a self-similar Cantor discontinuum.

Since none of the arcs in the family can be represented as the attractor of a finite graph-directed IFS, the main difficulty is to show that these arcs have finite positive s-dimensional measure. We propose a method allowing to prove these positivity and finiteness properties for a wide class of infinitely generated self-similar arcs.

References

[1] C. Bandt, J. Stahnke, *Self-similar sets 6. Interior distance on deterministic fractals* // preprint, Greifswald, 1990.

[2] M. Samuel, A. V. Tetenov, D. A. Vaulin, *Self-similar dendrites generated by polygonal systems in the plane* // Sib. Electron. Math. Rep., **14** (2017), 737–751.

[1]Gorno-Altaisk State University, 1 Lenkin st., Gorno-Altaisk, 649000, Russia
Email address: marinachan93@gmail.com

[2]Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: abrosimov@math.nsc.ru

[3]Gorno-Altaisk State University, 1 Lenkin st., Gorno-Altaisk, 649000, Russia
Email address: atet@mail.ru

The work is supported by RFBR projects 18-01-00420 and 18-501-51021.

CR SUBMANIFOLDS

MIRJANA DJORIĆ

Let $\overline{M}$ be a complex manifold, J its natural almost complex structure and $\overline{g}$ its Hermitian metric. Following the Erlangen program of Klein: geometry is the investigation of properties which remain invariant under the action of a group, it is a natural question to investigate submanifolds which have a special behavior with respect to the almost complex structure. For that reason, the first classes of submanifolds investigated were the almost complex submanifolds (in which case J maps the tangent space into the tangent space) and totally real submanifolds (in which case J maps the tangent space in the normal space).

A natural generalization of the above classes of submanifolds are the so-called CR-submanifolds. A submanifold M of $\overline{M}$ is called a CR submanifold if there exist distributions $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}^\perp$ of constant dimension such that

- $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp = TM$,
- $J\mathcal{H} = \mathcal{H}$,
- $J\mathcal{H}^\perp \subset T^\perp M$.

Note that totally real submanifolds ($\mathcal{H} = \{0\}$) and almost complex submanifolds ($\mathcal{H} = TM$) are trivial examples of CR-submanifolds.

In [1] we introduced the reader to the study of CR submanifolds of complex manifolds, especially of CR submanifolds of maximal CR dimension of complex projective space and we presented the original results on this topic by the authors. On this occasion, we present some new results.

We have also studied CR submanifolds of the nearly Kähler six sphere, see for example [2], and now we show some of our acchievements.

Furthermore, the odd-dimensional analogue of CR-submanifolds in (almost) Kählerian manifolds is the concept of contact CR-submanifolds in Sasakian manifolds. Namely, a submanifold M in the Sasakian manifold $(\widetilde{M}, \varphi, \xi, \eta, \tilde{g})$ carrying a φ-invariant distribution $\mathcal{D}$, such that the orthogonal complement of $\mathcal{D}$ in TM is φ-anti-invariant, is called a *contact CR-submanifold*. Here we reveal our study of four and five dimensional contact CR-submanifolds in $\mathbb{S}^7(1)$, see [3].

References

[1] M. Djorić, M. Okumura, *CR submanifolds of complex projective space* // Developments in Mathematics, **19**, Springer, Berlin, 2009.

[2] M. Djorić, L. Vrancken, *Three dimensional minimal CR submanifolds in S^6 satisfying Chen's equality* // J. Geom. Phys., **56**:11 (2006), 2279–2288.

[3] M. Djorić, M. I. Munteanu, L. Vrancken, *Four-dimensional contact CR-submanifolds in $S^7(1)$* // Math. Nachr., **290**:16 (2017), 2585–2596.

University of Belgrade, 16 Studentski trg, Belgrade, 11000, Serbia
Email address: `mdjoric@matf.bg.ac.rs`

R-MATRIX, LAX PAIR AND MULTIPARAMETER DECOMPOSITIONS OF LIE ALGEBRAS

ALINA DOBROGOWSKA

We construct R operators on the Lie algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ or more generally Hilbert–Schmidt operators $\mathcal{L}^2$ in Hilbert space. These operators are related to a multiparameter deformation given by a sequence of parameters $\alpha = \{a_1, a_2, \dots\}$. We determine for which choices of parameters R operators are R-matrices. We also construct the Lax pair for the corresponding Hamilton equations.

Institute of Mathematics, University of Bialystok, 2 Akademicka st., Bialystok, 15-267, Poland

Email address: alina.dobrogowska@uwb.edu.pl

ON GAUGED LINEAR SIGMA MODEL

HUIJUN FAN

Gauged linear sigma model was a physical model proposed by E. Witten in the early of 90's, which was used by him to explain the mirror symmetry phenomenon. Only up to recent years has this model been seriously considered by mathematicians with the development of Gromov-Witten theory and quantum singularity theory (FJRW theory). In this talk, I will report our progress on this topic.

Peking University, No. 5 Yiheyuan Road Haidian District, Beijing, 100871, China
Email address: fanhj@math.pku.edu.cn

EXISTENCE OF QUEER POISSON BRACKETS ON BANACH SPACES

TOMASZ GOLINSKI

There are many pitfalls in the differential geometry of infinite dimensional manifolds. Even in the most regular Banach (or even Hilbert) case many results from finite dimensions do not hold. For example not every symplectic form defines an isomorphism between tangent and cotangent bundle and it leads to difficulties in definition of Poisson structures. Another problem comes from the fact that twice dual of a Banach space is not in general canonically isomorphic to the original space. In this talk I will discuss two other kinds of problems – one originating from the lack of bump functions and the other from inequivalence of various method of defining a tangent vector. It will lead to the existence of Poisson brackets which do not come from Poisson tensors.

Institute of Mathematics, University of Bialystok, 2 Akademicka st., Bialystok, 15-267, Poland

Email address: tomaszg@math.uwb.edu.pl

A LINK IN PHASE PORTRAIT OF ONE PIECEWISE LINEAR DYNAMICAL SYSTEM

VLADIMIR GOLUBYATNIKOV

We study geometry of phase portrait of dynamical system constructed in [1]:

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1(x_4) - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = \Gamma_2(x_1) - x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = \Gamma_3(x_2) - x_3; \quad \frac{dx_4}{dt} = \Gamma_4(x_3) - x_4. \tag{1}$$

Here, Γ_i are increasing step-functions: $\Gamma_i(x_{i-1}) = A_i > 1$ for $x_{i-1} > 1$; $\Gamma_i(x_{i-1}) = 0$ for $0 \le x_{i-1} \le 1$, $i = 2, 3, 4$, and step-function L_1 is decreasing: $L_1(x_4) = A_1 > 1$ for $0 \le x_4 \le 1$, $L_1(x_4) = 0$ for $x_4 > 1$. All variables are assumed to be non-negative.

Denote by Q the parallelepiped $[0, A_1] \times [0, A_2] \times [0, A_3] \times [0, A_4] \subset \mathbb{R}^4_+$. It follows from [1] that trajectories of all points of Q remain there as $t \to +\infty$, i.e., Q is a positively invariant domain of the system (1).

The hyperplanes $x_i = 1$ subdivide Q to 16 blocks which we enumerate by binary multi-indices $\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\}$, where $\varepsilon_i = 0$, if $x_i \le 1$, and $\varepsilon_i = 1$, if $x_i > 1$. We do not consider trajectories of points of intersections of different hyperplanes $x_i = 1$. Let $E = (1, 1, 1, 1)$ be their common point. Here $i = 1, 2, 3, 4$.

It was shown in [1] that the system (1) has a stable cycle C_1 which passes through the blocks $\{1111\}$, $\{0111\}$, $\{0011\}$, $\{0001\}$, $\{0000\}$, $\{1000\}$, $\{1100\}$, $\{1110\}$, one after another, and then returns to $\{1111\}$. Let W_1 be the interior of the union of the blocks listed there. This is also positively invariant domain of the system (1).

Following approach described in [2, 3], we construct in the interior of $Q \setminus W_1$ an invariant 2-dimensional piecewise linear surface S with one vertex E, eight edges on the hyperplanes $x_i = 1$ (two edges on each hyperplane), and eight faces S_j, $j = 1, \dots, 8$, contained in corresponding eight blocks which were not listed above.

In contrast with W_1, the union of these remaining eight blocks is not an invariant domain of the system (1). Trajectories of some of their points can pass to the positively invariant domain W_1.

Proposition 1. *Trajectories of all points of $S \setminus E$ intersect each face S_j infinitely many times and tend to E in a spiral way as $t \to \infty$.*

Proposition 2. *Trajectories of all points of $Q \setminus S$ are attracted by the cycle C_1.*

Proposition 3. *The cycle $C_1 \subset W_1$ has a nontrivial link in Q with the surface S. Actually, it is reduced to the Hopf link.*

Phase portraits of higher-dimensional analogues of the system (1) can contain several cycles.

References

[1] L. Glass, J. S. Pasternack, *Stable oscillations in mathematical models of biological control systems* // Journal of Mathematical Biology, **6** (1978), 207–223.

[2] N. B. Ayupova, V. P. Golubyatnikov, *On two classes of nonlinear dynamical systems: The four-dimensional case* // Siberian Mathematical Journal, **56**:2 (2015), 231–236.

[3] N. B. Ayupova, V. P. Golubyatnikov, *On the uniqueness of a cycle in an asymmetric three-dimensional model of molecular repressilator* // Journal of Applied and Industrial Mathematics, **8**:2 (2014), 1–6.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: `Vladimir.Golubyatnikov1@fulbrightmail.org`

Supported by SB RAS, project 0314-2018-0011.

LAME'S STRESS POTENTIAL METHOD FOR PLANE NON-EUCLIDEAN PROBLEM

MIKHAIL A. GUZEV

The method of Lame's stress potential for solving analytically a certain class of problems of classical elasticity is extended to plane non-Euclidean elasticity (incompatible elasticity). Non-Euclidean elasticity demands one constant (internal length) in addition to the two classical elastic moduli. According to Lame's stress potential, the stresses are expressed as second-order derivatives of the stress potential. Lame's stress potential satisfies inhomogeneous biharmonic equation instead of the homogeneous one for the classical case. It means that incompatibility condition is took into consideration. It follows that general solutions are formed from the field of stresses generated by incompatible term and the elastic-stress field that compensates for the surface nonequilibrity of incompatibility. The joint action of these stresses enables the solid to hold the given shape, and their variation leads automatically to a change in the shape of the sample. Example of the proposed method in polar coordinates is presented to illustrate that the inhomogeneous stress field hasnt singularities in the center of a cylindrical sample.

Institute for Applied Mathematics, 7 Radio st., Vladivostok, 690041, Russia;
Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky pr., Perm, 614990, Russia
Email address: guzev@iam.dvo.ru

The investigation was carried out at the expense of the grant Agreement No.19-19-00408 of the Russian Science Foundation (project No.19-19-00408).

SELF-INTERSECTIONS OF SELF-SIMILAR SETS UNDER TRANSLATIONS AND EXTENSIONS OF COPIES

KIRILL KAMALUTDINOV

The talk is based on the work [1].

Let $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ be a system of contraction similarities in $\mathbb{R}^n$. A nonempty compact set $K = K(\mathcal{S})$ such that $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(K)$, is called an *attractor* of the system $\mathcal{S}$, or a *self-similar set*, generated by the system $\mathcal{S}$; sets $S_i(K)$ are called *copies* of the self-similar set K. The system $\mathcal{S}$ is said to satisfy the *strong separation condition* (SSC), iff $S_i(K) \cap S_j(K) = \varnothing$ for all distinct $i, j \in I = \{1, \dots, m\}$. It is well-known that if SSC is satisfied, Hausdorff dimension $d = \dim_H K$ of self-similar set K is a solution of the following equation:

$$\sum_{i=1}^{m} (\mathrm{Lip}\ S_i)^d = 1. \tag{1}$$

Suppose the system $\mathcal{S}_t = \{S_1^t, \dots, S_m^t\}$ of contraction similarities in $\mathbb{R}^n$ depends on parameter $t \in D$. Let K_t be an attractor of the system $\mathcal{S}_t$. Fix some $j \in I = \{1, \dots, m\}$. Suppose $S_i^t = S_i$ do not depend on t for all $i \neq j$. We study the problem of intersection between copies $S_i(K_t)$ and $S_j^t(K_t)$, $i \neq j$ of the set K_t for two cases:

1) $S_j^t(x) = G(x) + t$, $t \in D = \mathbb{R}^n$;
2) $S_j^t(x) = tG(x) + h$, $t \in D = [a, b] \subset (0, 1)$, G is isometry.

Under some constraints on Lip S_i^t, $i \in I$ we prove, using our General Position Theorem [2], that if the solution d of the equation (1) for the system $\mathcal{S}_t$ does not exceed some s for all $t \in D$, then in both the above cases we have:

$$\dim_H\{t \in D : \ S_i(K_t) \cap S_j^t(K_t) \neq \varnothing\} \leq 2s, \ i \in I, \ i \neq j.$$

In particular, this means that if $s < \dim_H D/2$ then the copies $S_i(K_t)$ and $S_j^t(K_t)$, $i \neq j$ have empty intersection for Lebesgue-almost all $t \in D$.

We apply those results to obtain conditions under which system $\mathcal{S}_{(t_1, \dots, t_m)} = \{S_1^{t_1}, \dots, S_m^{t_m}\}$ of contraction similarities in $\mathbb{R}^n$, where $t_1, \dots, t_m \in D$ are either translation vectors or similarity coefficients of the corresponding mappings, satisfy SSC and therefore its attractor's K Hausdorff dimension $d = \dim_H K$ satisfy the equation (1).

References

[1] K. G. Kamalutdinov, *Self-intersections in parametrized self-similar sets under translations and extensions of copies* // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, **25**:2 (2019), 116–124.

[2] K. Kamalutdinov, A. Tetenov, *Twofold Cantor sets in* $\mathbb{R}$ // Sib. Elektron. Mat. Izv., **15** (2018), 801–814.

Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia

Email address: kirdan15@mail.ru

The work is supported by RFBR (projects 19-01-00569, 18-501-51021).

ON THE L_{qp}-COHOMOLOGY OF TWISTED CYLINDERS

YAROSLAV KOPYLOV

We establish a vanishing result for the $L_{q,p}$-cohomology ($q \geq p$) of a twisted cylinder, which is a generalization of a warped cylinder. The result is new even for warped cylinders. We use the methods for proving the (p, q) Sobolev–Poincaré inequality developed by L. Shartser. This is a joint work with Prof. V. Gol′dshtein.

Sobolev Institute of Mathematics, 4 Koptyuga ave., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: yakop@math.nsc.ru

GENERALIZED BERGMAN KERNELS ON SYMPLECTIC MANIFOLDS OF BOUNDED GEOMETRY

YURI A. KORDYUKOV

We will discuss generalized Bergman kernels associated with the renormalized Bochner-Laplacian on high tensor powers of a uniformly positive line bundle on a symplectic manifold of bounded geometry.

Let (X, ω) be a smooth symplectic manifold and (L, h^L) be a Hermitian line bundle on X with a Hermitian connection $\nabla^L : C^\infty(X, L) \to C^\infty(X, T^*X \otimes L)$. We assume that L satisfies the prequantization condition:

$$\frac{i}{2\pi} R^L = \omega,$$

where $R^L = (\nabla^L)^2$ is the curvature of the connection ∇^L. Let (E, h^E) be a Hermitian vector bundle on X with Hermitian connection ∇^E and its curvature R^E.

Let g^{TX} be a Riemannian metric on X. Consider a skew-adjoint operator $J_0 : TX \to TX$, satisfying

$$\omega(u, v) = g^{TX}(J_0 u, v), \quad u, v \in TX,$$

and define the operator $J : TX \to TX$ by

$$J = J_0(-J_0^2)^{-1/2}.$$

The operator J is an almost complex structure on X compatible with ω and g^{TX}.

For any $p \in \mathbb{N}$, denote $L^p = L^{\otimes p}$, the pth tensor power of L. Denote by $\Delta^{L^p \otimes E}$ the induced Bochner-Laplacian acting on $C^\infty(X, L^p \otimes E)$ by

$$\Delta^{L^p \otimes E} = \left(\nabla^{L^p \otimes E}\right)^* \nabla^{L^p \otimes E},$$

where $\nabla^{L^p \otimes E} : C^\infty(X, L^p \otimes E) \to C^\infty(X, T^*X \otimes L^p \otimes E)$ is the connection on $L^p \otimes E$ induced by ∇^L and ∇^E and $\left(\nabla^{L^p \otimes E}\right)^* : C^\infty(X, T^*X \otimes L^p \otimes E) \to C^\infty(X, L^p \otimes E)$ is the formal adjoint of the operator $\nabla^{L^p \otimes E}$. The renormalized Bochner-Laplacian is a differential operator Δ_p acting on $C^\infty(X, L^p \otimes E)$ by

$$\Delta_p = \Delta^{L^p \otimes E} - p\tau,$$

where $\tau \in C^\infty(X)$ is given by

$$\tau(x) = -\pi \operatorname{Tr}[J_0(x) J(x)], \quad x \in X.$$

When (X, ω) is a Kähler manifold, the operator Δ_p is twice the corresponding Kodaira-Laplacian on functions $\square^{L^p} = \bar{\partial}^{L^p *} \bar{\partial}^{L^p}$.

We will suppose that the Riemannian manifold (X, g^{TX}) is complete and R^L, R^E, J, g^{TX} have bounded geometry (i.e., they and their derivatives of any order are uniformly bounded on X in the norm induced by g^{TX}, h^L and h^E, and the injectivity radius of (X, g^{TX}) is positive). We will also assume that

$$\mu_0 = \inf_{\substack{x \in X \\ u \in T_x X \setminus \{0\}}} \frac{i R^L_x(u, J(x) u)}{|u|^2_{g^{TX}}} > 0.$$

This is a condition of uniform positivity of R^L with respect to g^{TX}.

Since (X, g^{TX}) is complete, the Bochner-Laplacian and the renormalized Bochner-Laplacian Δ_p are essentially self-adjoint in $L^2(X, L^p \otimes E)$. First, we state the following spectral gap property for the operator Δ_p.

Supported by the Russian Science Foundation, project no. 17-11-01004.

Theorem 1. *There exists a constant $C_L > 0$ such that for any $p \in \mathbb{N}$ the spectrum $\sigma(\Delta_p)$ of the renormalized Bochner-Laplacian Δ_p in $L^2(X, L^p \otimes E)$ satisfies*

$$\sigma(\Delta_p) \subset \big[-C_L, C_L\big] \cup \big[2p\mu_0 - C_L, +\infty\big).$$

Define the operator $P_{\mathcal{H}_p}$ in $L^2(X, L^p \otimes E)$ to be the spectral projection of the operator Δ_p, corresponding to $[-C_L, C_L]$, given by Spectral Theorem. Its image $\mathcal{H}_p \subset L^2(X, L^p \otimes E)$ is the spectral subspace of Δ_p corresponding to $[-C_L, C_L]$. If X is compact, the spectrum of Δ_p is discrete and $\mathcal{H}_p$ is the subspace spanned by the eigensections of Δ_p corresponding to eigenvalues in $[-C_L, C_L]$. The Schwartz kernel of the operator $P_{\mathcal{H}_p}$ with respect to the Riemannian volume form dv_X is a smooth section $P_p(\cdot,\cdot) \in C^\infty(X \times X, \pi_1^*(L^p \otimes E) \otimes \pi_2^*(L^p \otimes E)^*)$, where π_1 and π_2 are the projections of $X \times X$ on the first and second factor. It is called the generalized Bergman kernel of Δ_p, since it generalizes the Bergman kernel on complex manifolds.

The main result is the following off-diagonal estimate for the generalized Bergman kernel.

Theorem 2. *There exists $c > 0$ such that for any $k \in \mathbb{N}$, there exists $c_k > 0$ such that for any $p \in \mathbb{N}$, $x, x' \in X$, we have*

$$\big|P_p(x, x')\big|_{C^k} \leq c_k p^{n+\frac{k}{2}} e^{-c\sqrt{p}\, d(x,x')},$$

where d denotes the geodesic distance on X.

As an application, we prove the relation between the generalized Bergman kernel on a Galois covering of a compact symplectic manifold and the generalized Bergman kernel on the base. We also describe an asymptotic expansion of the generalized Bergman kernel near the diagonal.

This is joint work with Xiaonan Ma and George Marinescu [1].

References

[1] Yu. A. Kordyukov, X. Ma and G. Marinescu, *Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds of bounded geometry* // Comm. Partial Differential Equations (to appear), preprint arXiv:1806.06401.

Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Sciences, 112 Chernyshevsky str., Ufa, 450008, Russia

Email address: yurikor@matem.anrb.ru

MORSE–SARD THEOREM AND LUZIN N-PROPERTY: A NEW SYNTHESIS RESULT FOR SMOOTH AND SOBOLEV MAPPINGS

MIKHAIL KOROBKOV

For regular mappings of Euclidean spaces we study the distortion of the Hausdorff dimension of the given set under restrictions on the rank of the gradient on this set.

For the classical cases of k-smooth and Holder mappings this problem was solved in the papers by Dubovitskii, Bates and Moreira. We solve the problem for Sobolev and fractional Sobolev classes as well. Note that we study the Sobolev case under minimal integrability assumptions, i.e., they guarantee in general only *the continuity* (not everywhere differentiability) of a mapping. In particular we found also some new facts for the classical smooth case as well.

The proofs of the most theorems are based on our previous joint papers with J. Bourgain and J. Kristensen (2013, 2015).

School of Mathematical Sciences, Fudan University, 220 Handan Road, Shanghai, 200433, China

Email address: `korob@math.nsc.ru`

HYPERBOLIC KNOTS ARE NOT GENERIC

ANDREI MALYUTIN

We show that if K is a nontrivial knot then the proportion of satellites of K among all of the prime knots of n or fewer crossings does not converge to 0 as n approaches infinity. This implies in particular that the proportion of hyperbolic knots among all of the prime knots of n or fewer crossings does not converge to 1 as n approaches infinity.

This is joint research with Yury Belousov.

St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics, 27 Fontanka, St. Petersburg, 191023, Russia

Email address: `malyutin@pdmi.ras.ru`

The research is supported by the Foundation for the Advancement of Theoretical Physics and Mathematics "BASIS"..

METRICS OF DIAGONAL CURVATURE

OLEG MOKHOV

We study metrics of diagonal curvature arising in the theory of integrable systems of hydrodynamic type. The semi-Hamiltonian systems were discovered by S.P.Tsarev. This special class of diagonalizable systems of hydrodynamic type possesses the richest infinite-dimensional set of conservation laws and symmetries (commuting flows) of hydrodynamic type among all systems of hydrodynamic type. The semi-Hamiltonian systems are integrable, they are integrated (linearized) by the generalized hodograph method. Many the most important systems of hydrodynamic type belong namely to this class of systems. The geometry of the semi-Hamiltonian systems is just exactly the geometry of metrics of diagonal curvature (or, in other words, semi-Hamiltonian metrics). A metric of diagonal curvature is connected to each such system and vice versa. The metrics of diagonal curvature are diagonalizable and, moreover, they possess orthogonal coordinates with some additional conditions on the components of the Riemann curvature tensor in the orthogonal coordinates (the conditions of diagonal curvature). Locally, the metrics of diagonal curvature are described by an integrable system of nonlinear equations (the Darboux equations).

An efficient necessary condition for metrics of diagonal curvature, namely, the vanishing of the Haantjes tensor for the Ricci affinor, is obtained and the theory of metrics of diagonal curvature is developed.

Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia
Email address: mokhov@mi-ras.ru

This research was supported by the Russian Science Foundation under grant 18-11-00316.

HOMOTHETY CURVATURE HOMOGENEITY

STANA NIKČEVIĆ

We examine the difference between several notions of curvature homogeneity and show that the notions introduced by Kowalski and Vanzurova are genuine generalizations of the ordinary notion of k-curvature homogeneity. The homothety group plays an essential role in the analysis. We give a complete classification of homothety homogeneous manifolds which are not homogeneous and which are not VSI (i.e., which have some scalar curvature invariant which is non-zero) and show that such manifolds are cohomogeneity one. We also give a complete description of the local geometry, if the homothety character defines a split extension.

This is a joint work with Eduardo Garcia-Rio and Peter Gilkey.

University of Belgrade, 16 Studentski trg, Belgrade, 11000, Serbia
Email address: stanan@turing.mi.sanu.ac.rs

RECIPROCITY LAWS ON ALGEBRAIC VARIETIES AND CONTOU-CARRÈRE SYMBOLS

DENIS OSIPOV

Reciprocity laws connect local and global invariants of algebraic varieties.

For example, consider one-dimensional algebraic varieties, i.e. algebraic curves. There is the well-known reciprocity law that the sum of residues of meromorphic differential form on a compact Riemann surface equals to zero. Another reciprocity law on a compact Riemann surface is the so-called Weil reciprocity law which is the multiplicative analog of the previous reciprocity law. This reciprocity law states that the product of tame symbols over all points equals to one.

Reciprocity laws can be generalized to algebraic varieties of arbitrary dimension and to any ground field (instead of the field $\mathbb{C}$). This was was done by A.N. Parshin and K. Kato. When the ground field is finite, these reciprocity laws are important in description of arithmetic properties of corresponding algebraic varieties.

The Contou-Carrère symbol generalizes both the residue and the tame symbol for the point on an algebraic curve. It is known the reciprocity law for the Contou-Carrère symbol (due to G. Anderson, F. Pablos Romo, A. Beilinson, S. Bloch, H. Esnault).

I will speak on the generalization of the Contou-Carrère symbol to higher dimensions.

The talk is based on joint papers with X. Zhu and S. Gorchinskiy.

Steklov Mathematical Institute, 8 Gubkina st., Moscow, 117966, Russia;

Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russia;

National University of Science and Technology "MISIS", 4 Leninsky pr., Moscow, 119049, Russia

Email address: `d_osipov@mi-ras.ru`

ON NEW COSMOLOGICAL SOLUTIONS IN NON-LOCAL MODIFIED GRAVITY

ZORAN RAKIĆ

Despite to all significant gravitational phenomena discovered and predicted by general theory of relativity, it is not a complete theory. One of actual approaches towards more complete theory of gravity is its non-local modification. We consider non-local modification of the Einstein theory of gravity in framework of the pseudo-Riemannian geometry, with the non-local term of the form $\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)$, where $\mathcal{H}$ and $\mathcal{G}$ are differentiable functions of the scalar curvature R, and $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$ where f_n are is an analytic function of the dAlambert operator $\Box$. Using calculus of variations of the action induced by the metric tensor $g_{\mu\nu}$, we derived the corresponding equations of motion. Firstly, we consider several models of the above mentioned type, as well as the case when the scalar curvature is constant. Specially, we are paid our attention to the case where $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = \sqrt{R - 2\,\Lambda}$, and find some new cosmological solutions and we test validity of obtained solutions with experimental data. Moreover, we consider space-time perturbations of the de Sitter space. It was shown that gravitational waves are described in the class of nonlocal models $\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)$, with respect to Minkowski metric by the same equations as in general relativity.

This is joint work with I. Dimitrijević, B. Dragović, A. Koshelev and Jelena Stanković.

University of Belgrade, 16 Studentski trg, Belgrade, 11000, Serbia
Email address: zrakic@matf.bg.ac.rs

The work was partially supported by the project ON174012 of MPNTR of Republic of Serbia.

LAGRANGIAN MANIFOLDS AND QUANTIZATION RULES, CORRESPONDING TO SEMI-CLASSICAL EIGENVALUES OF THE SCHROEDINGER EQUATION ON A SURFACE WITH CONIC SINGULARITY

ANDREI SHAFAREVICH

We study semi-classical spectrum for the Scroedinger equation on a 2D surface with conic singularity. We obtain Lagrangian surfaces and quantization rules, corresponding to such eigenvalues. We sjow that the quantization rules are not standard; however, they have natural geomatric interpretation.

Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia
Email address: shafarev@yahoo.com

TYPES OF GROWTH POINTS OF A DENDRITE

PRABHJOT SINGH

Let $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots S_m\}$ be a self-similar linear zipper [1] in $\mathbb{R}$, whose attractor K is $[0,1]$.

We consider the question: Can we add a similarity map S_* of the complex plane $\mathbb{C}$ to the system $\mathcal{S}$ in such a way, that the attractor K' of the resulting system $\mathcal{S}'$ would be a dendrite?

A point $c \in [0,1]$ is called a *dendrite growth point*, if there is such $h > 0$, that the attractor K' of a system $\mathcal{S}' = \{S_1, S_2, \dots S_m, S_*\}$, where $S_*(z) = ihz + c$, is a dendrite.

We prove that there are 3 types of dendrite growth points, depending on their address $i_1 i_2 \dots i_n \dots$ in K:

(1). The point c has a periodic address $c = \pi(\overline{i_1 i_2 \dots i_n})$.
Then c is a growth point if $c \neq 0, 1$ and $\mathcal{S}_{i_1 i_2 \dots i_n} = S_* S_A^k S_*^{-1}$ where S_A is some element of the semigroup generated by $\mathcal{S}$ which fixes the point 0. In this case K' is a p.c.f. dendrite [2].

(2). c has a preperiodic address $c = \pi(j_1 j_2 \dots j_k i_1 \overline{i_1 i_2 \dots i_n})$ then for sufficiently small h, depending on $j_1 j_2 \dots j_k$ only, K' is a p.c.f. dendrite.

(3). c has aperiodic address such that there is initial word $i_1 i_2 \dots i_n$ such that for any $k > 0$,

$$i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{k+n} \neq i_1 i_2 \dots i_n.$$

Then there is $h > 0$ depending on $i_1 i_2 \dots i_n$ only for which K' is a non-p.c.f. dendrite.

References

[1] V. V. Aseev, A. V. Tetenov, A. S. Kravchenko, *On Self-Similar Jordan Curves on the Plane* // Siberian Mathematical Journal, **44**:3 (2003), 379–386.

[2] P. Singh, A. Tetenov, *A Self-Similar Dendrite with One-Point Intersection and Infinite Post-Critical Set* // Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications, **2**:2 (2018), 81–84.

Novosibirsk State University, 1 Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: prabhjot198449@gmail.com

THE SAMPSON LAPLASIAN

SERGEY STEPANOV

In our report we consider the little-known Sampson operator that is strongly elliptic and self-adjoint second order differential operator acting on covariant symmetric tensors on Riemannian manifolds (see [1]). This operator was an analogue of the well known Hodge Laplacian which acts on exterior differential forms. First of all, we review the results on this operator. Then we consider the properties of the Sampson operator acting on one-forms and symmetric two-forms. Further we estimate operator's lowest eigenvalue. We study this operator using the analytical method, due Bochner, of proving vanishing theorems for the null space of a Laplace operator admitting a Weitzenbck decomposition and further of estimating its lowest eigenvalue. Theorems and corollaries of the present report complement our results from the papers [2] - [6]. Moreover, applications of Sampson Laplacian can be find in our paper [3].

References

[1] J.H. Sampson, *On a theorem of Chern* // Transactions of the American Mathematical Society, **177** (1973), 141–153.

[2] S. E. Stepanov, I. I. Tsyganok, J. Mikesh, *On the Sampson Laplacian* // Filomat, **33**:4 (2019), 342–358.

[3] S. E. Stepanov, J. Mikes, *The spectral theory of the Yano rough Laplacian with some of its applications* // Ann. Glob. Anal. Geom., **48** (2015), 37–46.

[4] S. E. Stepanov, *Vanishing theorems in affine, Riemannian and Lorentz geometries* // Journal of Mathematical Sciences, **141**:1 (2007), 929–964.

[5] S. E. Stepanov, I. I. Tsyganok, I. A. Aleksandrova, *A remark on the Laplacian operator which acts on symmetric tensors* // arXiv:1411.1928 (2014), 8 pp.

[6] S. E. Stepanov, I. I. Tsyganok, J. Mikesh, *On a Laplacian which acts on symmetric tensors* // arXiv:1406.2829 (2014), 14 pp.

Russian Institute for Scientific and Technical Information of the Russian Academy of Sciences, 20 Usievicha st., Moscow, 125190, Russia;

Finance University under the Government of Russian Federation, 49-55 Leningradsky pr., Moscow, 125468, Russia

Email address: s.e.stepanov@mail.ru

DEFORMATIONS OF POLYGASKETS IN THE PLANE

ANDREI TETENOV[1], DMITRY DROZDOV[2], AND MARY SAMUEL[3]

Let $P \subset \mathbb{R}^2$ be a finite polygon homeomorphic to a disk, $\mathcal{V}_P = \{A_1, \ldots, A_{n_P}\}$ be the set of its vertices. We consider a system of similarities $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ in $\mathbb{R}^2$ such that:
(D1) for any $i \in I$ set $P_i = S_i(P) \subset P$;
(D2) for any $i \neq j, i, j \in I$, $P_i \bigcap P_j = \mathcal{V}_{P_i} \bigcap \mathcal{V}_{P_j}$ and $\#(\mathcal{V}_{P_i} \bigcap \mathcal{V}_{P_j}) < 2$;
(**D3**) $\mathcal{V}_P \subset \bigcup\limits_{i \in I} S_i(\mathcal{V}_P)$;

Following R. Strichartz [1], the system $\mathcal{S}$ will be called a P-polygasket, if it satisfies the conditions (**D1** − **D3**), and a generalized P-polygasket, if it satisfies the conditions **(D2, D3)** only.

Let $\mathcal{S}$ be a generalized P-polygasket. The vertex $A \subset \mathcal{V}_P$ is called a cyclic vertex, if there is such multiindex $\mathbf{i} = i_1 i_2 \ldots i_k$, that $S_{\mathbf{i}}(A) = A$. Let A be a cyclic vertex and γ_{AB} be its invariant arc and $S_{\mathbf{i}}(A) = A$. Let $B' = S_{\mathbf{i}}(B)$. We denote by α the total change of argument of $z - A$ when z travels along γ_{AB} from B to B'. This gives unique representation $S_{\mathbf{i}}(z) = q_{\mathbf{i}} e^{i\alpha}(z - A) + A$. The number $\lambda_A = \dfrac{\alpha}{\ln r}$ is called the parameter of the cyclic vertex A. Generalized P-polygasket $\mathcal{S}$ satisfies the *parameter matching condition*, if for any $B \in \cup_{i=1}^m \mathcal{V}_{P_i}$ and for any cyclic vertices A, A' such that for some $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$, $S_{\mathbf{i}}(A) = S_{\mathbf{j}}(A') = B$, the equality $\lambda_A = \lambda_{A'}$ holds.

A generalized P'-polygasket $\mathcal{S}' = \{S'_1, ..., S'_m\}$ is called a δ-deformation of a P-polygasket $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$, if there is a bijection $f : \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P_k} \to \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P'_k}$, such that
a) $f|_{\mathcal{V}_P}$ extends to a homeomorphism $\tilde{f} : P \to P'$;
b) $|f(x) - x| < \delta$ for any $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathcal{V}_{P_k}$
c) $f(S_k(x)) = S'_k(f(x))$ for any $k \in I$ and $x \in \mathcal{V}_P$.
Our main result is the following

Theorem. *Let $\mathcal{S}$ be a P-polygasket. There is such $\delta > 0$ that for any δ-deformation $\mathcal{S}'$ of the system $\mathcal{S}$, satisfying parameter matching condition, the attractor $K(\mathcal{S}')$ is homeomorphic to $K(\mathcal{S})$.*

References

[1] R. S. Strichartz, *Isoperimetric estimates on Sierpinski gasket type fractals* // Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 1705-1752.

[1]Gorno-Altaisk State University, 1 Lenkin st., Gorno-Altaisk, 649000, Russia
Email address: atet@mail.ru

[2]Gorno-Altaisk State University, 1 Lenkin st., Gorno-Altaisk, 649000, Russia
Email address: dimalek97@yandex.ru

[3]IIIT Lucknow, IT City, Lucknow, 226002, India
Email address: marysamuel@iiitl.ac.in

[1]The author is supported by RFBR projects 18-01-00420 and 18-501-51021.

THE MODULI SPACE OF D- EXACT BOHR - SOMMERFELD LAGRANGIAN SUBMANIFOLDS

NIKOLAY A. TYURIN

The talk is based on the papers [1] and [2].

Each compact algebriac variety X over the field of complex numbers can be regarded as a real symplectic manifold. Indeed, X can be embedded to projective space $\mathbb{CP}^N$ of a suitable dimension by the very definition, and then the restriction of the stadard Kahler form of the Fubini - Study metric gives a symplectic form on X. By the construction this symplectic form is integer, so its cohomology class lies in the lattice $H^2(X, \mathbb{Z})$. This symplectic form is not unique - it depends on the choice of a class of ample divisors, therefore the choice of an appropriate class makes it possible to study lagrangian geometry of X. We consider the case of smooth simply connected algrebraic varieties.

The realization can be done as follows: for pair (X, D) take the corresponding line bundle $L \to X$ and fix an appropriate hermitian structure on it. Then for the corresponding holomorphic section α_D with zeroset D take real function $\phi_D = -\ln|\alpha_D|_h$; then this function is a Kahler potential on $X \backslash D$ so the form $\omega_D = \mathrm{d} rm I \mathrm{d}\phi_D$ is a Kahler form which can be considered as a symplectic form on the complement. The ampleness condition ensures that ω_D has a natural exntesion on whole X.

Special Bohr - Sommerfeld geometry can be applied in our situation: the prequantization data (L, a) can be fixed, and then a natural incidence cycle $\mathcal{U}_{SBS} \subset \mathbb{P}\Gamma(X, L) \times \mathcal{B}_S$ can be constructed. Here $\mathcal{B}_S$ is the moduli space of Bohr - Sommmerfeld lagrangian cycles of a fixed topological type. Our dream is to derive a finitie dimensional component from $\mathcal{U}_{SBS}$ — it would be a finite dimensional moduli space, derived from the lagrangian geometry of X. So, the first step in this way arises when we take a natural finite dimensional projective subspace in $\mathbb{P}\Gamma(X, L)$ consists of holomorphic sections of L.

Thesis: *Take the total preimage $p_1^{-1}(\mathbb{P}H^0(M_I, L)) \subset \mathcal{U}_{SBS}$ - it is finite dimensional discrete covering of the finite dimensional projective space formed by pairs (S, p) where S are SBS submanifolds.*

But unfortunately this does not lead to a good answer: in general for a holomorphic section no smooth Special Bohr - Sommerfeld cycles. Therefore we must either desingularize the singular components or find another way. The possible way is in the usage of D - exact lagrangian submanifolds instead of Special Bohr - Sommerfeld. In the situation above we call a lagrangian submanifold S D - exact with respect to a divisor $D \subset X$ if $S \cap D = \emptyset$ and for each loop $\gamma \subset S$ and a common disk $B_2 \subset X$ bounded by γ one has $\mathrm{ind}(B_2 \cap D) = \int_{B_2} \omega_D$. The space of D - exact lagrangian submanifolds of a fixed topological type is infinite, but it is a natural action of the group $\mathrm{HamIso}(X \backslash D)$ of Hamiltonain isotopies, and we can factorize the space by the action. The main claim here is that for fixed D the quotient set is discrete. This leads to

Antithesis: *Attach to a very ample divisor D_α the space of smooth compact homologically non trivial exact lagrangian submanifolds on the complement $X \backslash D_\alpha$ modulo Hamiltonian isotopies on $X \backslash D_\alpha$, and then globalizing the attachment over the projective space $|L_D|$ get modified moduli space $\tilde{\mathcal{M}}_{SBS}$.*

Here our main result is that this moduli space if a finite dimensional object. But we introduce this new moduli space just to resolve the problem in the definition of a moduli space in the framework of Special Bohr - Sommerfeld geometry. Therefore

The author was supported by the Laboratory of Mirror Symmetry of the Higher School of Economics and the Government of the Russian Federation (Grant 14.641.31.0001).

Synthesis: *Cut from the modified moduli space $\tilde{\mathcal{M}}_{SBS}$ a stable component $\tilde{\mathcal{M}}^{st}_{SBS}$ consists of the classes $< S_i > \in \mathcal{H}(D_\alpha)$ which present Hamiltonian desingularizations of the compact closed components of the Weinstein skeleta $W(X \backslash D_\alpha)$.*

And for this last stable component we have

Main Conjecture. *For arbitrary compact smooth simply connected algebraic variety X and a very ample line bundle $L_D \to X$ the stable component of the modified moduli space is algebraic: $\tilde{\mathcal{M}}^{st}_{SBS} \cong Y \backslash D$ where D is a compact algebraic variety and $D \subset Y$ is an ample divisor.*

We supply the discussion by a number of examples illustrating the conjecture.

References

[1] N. A. Tyurin, *Special Bohr - Sommerfeld lagrangian submanifolds in algebraic varieties* // Izvestiya: Mathematics, **82**:3 (2018), 612–631.

[2] N. A. Tyurin, *The moduli space of D- exact Bohr - Sommerfeld lagrangian submanifolds* // Siberian Mathematical Journal, **60**:4 (2019), 709–719.

Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, 6 Joliot-Curie st., Dubna, 141980, Moscow;

Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russia

Email address: ntyurin@hse.ru, ntyurin@theor.jinr.ru

ON STANDARD PATHS WITH CONSTANT INTERNAL CURVATURES ON SPHERES OF PSEUDO-EUCLIDEAN SPACE

IRINA ZUBAREVA

Pseudo-Euclidean space $\mathbb{E}^n_l$ of arbitrary index l, where n, l are integers, $n \geq 3$, $0 \leq l \leq n/2$, is n–dimensional vector space together with the pseudoscalar product

$$\{(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\} := -x_1y_1 - \dots - x_ly_l + x_{l+1}y_{l+1} + \dots x_ny_n.$$

The number $\|x\| := \sqrt{|\ \{x, x\}\ |}$ is called the modulus of the vector x.

A continuous mapping $r : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n_l$ is called the standart path if for every $s \in \mathbb{R}$, there exists $r'(s)$ and $\|r'(s)\| = 1$.

A system of vectors $e_1, \dots, e_m$ in $\mathbb{E}^n_l$ is called orthonormal if $\|e_i\| = 1$, $\{e_i, e_j\} = 0$ for $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$. A system of functions $e_1, \dots, e_m : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n_l$ is orthonormal if for every $s \in \mathbb{R}$, the system of the vectors $e_1(s), \dots, e_m(s)$ is orthonormal in $\mathbb{E}^n_l$.

Let M^{n-1} be a sphere in $\mathbb{E}^n_l$ with center the origin, a is the square of radius of M^{n-1}.

Definition 1. *Functions $\mathfrak{k}_1, \dots, \mathfrak{k}_{n-2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are called the internal curvatures of a standart path $r : \mathbb{R} \to M^{n-1}$ if there exists an orthonormal system of differentiable functions $\mathfrak{e}_i : \mathbb{R} \to M^{n-1}$, $i = 1, \dots, n-2$, satisfying the conditions: for every $s \in \mathbb{R}$*

1) $\mathfrak{e}_1(s) = r'(s)$;

2) $\mathfrak{k}_m(s) = \|\mathfrak{g}_m(s)\|$ for $m = 1, \dots, n-2$, where

$$\mathfrak{f}_m(s) = \mathfrak{e}'_m(s) - \{\mathfrak{e}'_m(s), r(s)\}\, r(s)/a,$$

$$\mathfrak{g}_m(s) = \mathfrak{f}_m(s) - \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i(s) \{\mathfrak{f}_m(s), \mathfrak{e}_i(s)\}\, \mathfrak{e}_i(s), \quad \epsilon_i(s) = \mathfrak{e}_i^2(s),\ i = 1, \dots, n;$$

3) $\mathfrak{k}_m(s) > 0$ for $m = 1, \dots, n-3$;

4) $\mathfrak{e}_{m+1}(s) = \mathfrak{g}_m(s)/\mathfrak{k}_m(s)$ for $m = 1, \dots, n-3$.

The author proved the following results below.

Theorem. Let $r : \mathbb{R} \to M^{n-1}$ be a standart path with constant internal curvatures $\mathfrak{k}_1, \dots, \mathfrak{k}_{n-2}$ and the function $\mathfrak{e}_{n-1}$ from the Definition 1 is differentiable. Then $r = r(s)$ is an orbit of some one-parameter isometry group of M^{n-1}.

Let us recall a well–known Poincare's model of the Lobachevsky space L^{n-1} on the upper hemisphere of the pseudo-Euclidean space $\mathbb{E}^n_1$:

$$L^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n_l\ : \{x, x\} = -1,\ x_1 > 0\}.$$

Corollary. Let $r : \mathbb{R} \to L^{n-1}$ be a standart path in the Lobachevsky space L^{n-1}, $n \geq 3$, with constant internal curvatures $\mathfrak{k}_1, \dots, \mathfrak{k}_{n-2}$ and the function $\mathfrak{e}_{n-1}$ from the Definition 1 is differentiable. Then $r = r(s)$ is an orbit of some one-parameter isometry group of the Lobachevsky space L^{n-1}.

Sobolev Institute of Mathematics (Obsk Branch), 13 Pevtsova st., Omsk, 644099, Russia
Email address: i_gribanova@mail.ru

ГРУППА ДВИЖЕНИЙ ОСОБОГО ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО РАСШИРЕНИЯ ЕВКЛИДОВОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

РАДА БОГДАНОВА[1], ВЛАДИМИР КЫРОВ[2]

В работе [1] В.А. Кыровым в рамках решения задачи вложения евклидовой геометрии найдено особое четырехмерное расширение евклидовой трехмерной геометрии. Эта геометрия задается следующей функцией пары точек:

$$f(i,j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2)e^{2w_i + 2w_j}, \tag{1}$$

где (x_i, y_i, z_i, w_i) и (x_j, y_j, z_j, w_j) — координаты соответственно точек i и j в R^4.

Целью работы является нахождение явных выражений для групп движений особого четырехмерного расширения евклидовой трехмерной геометрии.

Рассмотрим эффективное и дифференцируемое действие группы Ли G в $U \subset R^4$ [2, 3], то есть дифференцируемое отображение

$$\lambda : U \times G \to U',$$

где $U' \subset R^4$. Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением* пространства R^4 с функцией пары точек f, если для любых $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j \rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j) \rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f\big(\lambda_a(i), \lambda_a(j)\big) = f(i,j),$$

причем $S_f \subseteq R^4 \times R^4$ — область определения функции f.

Множество всех так определенных движений образует десятимерную группу Ли преобразований. Базисные операторы алгебры Ли этого преобразования имеют следующий вид [1]:

$$\begin{gathered}\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z,\ x\partial_y - y\partial_x,\ x\partial_z - z\partial_x,\ y\partial_z - z\partial_y,\ 2x\partial_x - 2y\partial_y - 2z\partial_z + \partial_w,\\ (y^2 + z^2 - x^2)\partial_x - 2xy\partial_y - 2xz\partial_z + x\partial_w,\ (x^2 + z^2 - y^2)\partial_y - 2yx\partial_x - 2yz\partial_z + y\partial_w,\\ (x^2 + y^2 - z^2)\partial_z - 2zx\partial_x - 2zy\partial_y + z\partial_w,\end{gathered} \tag{2}$$

Метод нахождения состоит в применении экспоненциального отображения [4, 5]:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = Exp(tX)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где t — вещественный параметр, а X — произвольный оператор алгебры Ли группы движений,

$$Exp(tX) = 1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \cdots .$$

Теорема. *Группа движений особого четырехмерного расширения евклидовой трехмерной геометрии с функцией пары точек (1) в явном виде имеет вид:*

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{((x^2+y^2+z^2)(a_{11}a+a_{12}b+a_{13}c)+a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)e^{-2\delta}}{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)+2ax+2by+2cz+1}+\alpha,\\
y' &= \frac{((x^2+y^2+z^2)(a_{21}a+a_{22}b+a_{23}c)+a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)e^{-2\delta}}{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)+2ax+2by+2cz+1}+\beta,\\
z' &= \frac{((x^2+y^2+z^2)(a_{31}a+a_{32}b+a_{33}c)+a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)e^{-2\delta}}{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)+2ax+2by+2cz+1}+\gamma,\\
w' &= w+\tfrac{1}{2}\ln((a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)+2ax+2by+2cz+1)+\delta,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in SO(3).$

Доказательство теоремы, состоит в нахождении с помощью экспоненциального отображения однопараметрических подгрупп, соответствующих базисным операторам алгебр Ли групп преобразований (2), композиция которых позволяет найти явные выражения локальных действий групп Ли (4) особого четырехмерного расширения евклидовой трехмерной геометрии с функцией пары точек (1).

Список литературы

[1] В. А. Кыров, *Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий* // Сиб. электрон. матем. изв., **15**, 741–758 (2018).

[2] Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований* // М.: Наука, 1980.

[3] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы* // М.: Наука, 1973.

[4] М. М. Постников, *Группы и алгебры Ли* // М.: Наука, 1982.

[5] В. А. Кыров, Р. А. Богданова, *Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности* // Сиб. матем. журн., **59**:2, 412–421 (2018).

[1]Горно-Алтайский Государственный Университет, ул. Ленкина 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

Email address: bog-rada@yandex.ru

[2]Горно-Алтайский Государственный Университет, ул. Ленкина 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

Email address: kyrovVA@yandex.ru

УСЛОВИЕ cc-ВНУТРЕННЕГО КОНУСА И ГИПЕРПРОСТРАНСТВА КАНОНИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЭНГЕЛЯ

АЛЕКСАНДР ГРЕШНОВ[1], РОМАН ЖУКОВ[2]

Каноническая группа Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с системой координат (x, y, t, z), индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3, e_4) (здесь e_1, e_2, e_3, e_4 — стандартные орты $\mathbb{R}^4$), при помощи таблицы коммутаторов

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, & \alpha > 0, \\ [e_1, e_3] = \beta e_4, & \beta > 0; \end{cases} \tag{1}$$

все остальные возможные коммутаторы e_1, e_2, e_3, e_4 равны 0. Пусть $v = (x, y, t, z)$, $w' = (x', y', t', z')$. Тогда, используя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа, при помощи (1) мы получаем мы получаем аналитическую запись операции левого сдвига произвольного элемента $w' = (x', y', t', z') \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ на произвольный элемент $w = (x, y, t, z) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$:

$$\begin{aligned} L_w w' = w \cdot w' = \Big(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y), \\ z + z' + \frac{\beta}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta}{12}(x - x')(xy' - x'y)\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

Используя (2), мы получаем выражения для базисных левоинвариантных векторных полей группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ в любой точке (x, y, t, z):

$$X = (1, 0, -\frac{\alpha}{2}y, -\frac{\beta t}{2} - \frac{\alpha\beta xy}{12}) = e_1 - \frac{\alpha y}{2} \cdot e_3 - (\frac{\beta t}{2} + \frac{\alpha\beta xy}{12}) \cdot e_4,$$
$$Y = (0, 1, \frac{\alpha x}{2}, \frac{\alpha\beta x^2}{12}) = e_2 + \frac{\alpha x}{2} \cdot e_3 + \frac{\alpha\beta x^2}{12} \cdot e_4,$$
$$T = (0, 0, 1, \frac{\beta x}{2}) = e_3 + \frac{\beta x}{2} \cdot e_4, \quad Z = e_4.$$

Расстояние Карно — Каратеодори $d_{cc}(u, v)$ между двумя произвольными точками $u, v \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, определяется как точная нижняя грань длин $l(\gamma)$ всех абсолютно непрерывных горизонтальных путей $\gamma = \gamma(s)$, определенных на некотором отрезке $[0, s_0]$, соединяющих точки u, v, т. е. таких, что $u = \gamma(0)$, $v = \gamma(s_0)$,

$$\dot{\gamma}(s) = \alpha(s)X(\gamma(s)) + \beta(s)Y(\gamma(s)) \quad \text{п. в. } s \in [0, s_0],$$

где $\alpha(s), \beta(s)$ — некоторые интегрируемые функции. Длина кривой здесь определяется при помощи стандартной формы скалярного произведения, индуцированного базисными левоинвариантными векторными полями рассматриваемой канонической группы. В дальнейшем символом $B_{cc}(x, r)$ мы будем обозначать открытый шар в метрике Карно — Каратеодори с центром в точке x радиуса r.

На $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ определена однопараметрическая подгруппа растяжений (дилатаций)

$$\delta_\varepsilon(x, y, t, z) = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 z).$$

Известно, что метрика Карно — Каратеодори инвариантна относительно действий δ_ε и левых сдвигов, т. е.

$$d_{cc}(\delta_\varepsilon u, \delta_\varepsilon v) = \varepsilon d_{cc}(u, v), \quad d_{cc}(L_u v, L_u w) = d_{cc}(v, w).$$

Точка O (начало координат) является единичным элементом любой канонической группы Энгеля: $L_O u = u$. Отметим, что каноническая группа Энгеля является частным случаем групп Карно, см., например, [1].

Определение 1. Множество
$$K_\infty(M,X,r)=\bigcup_{\varepsilon\geq 0} M\cdot\delta_\varepsilon B_{cc}(X,r),\quad d_{cc}(O,X)=1>r,$$
канонической группы Энгеля будем называть cc-однородным конусом с вершиной в точке M, осью $M\cdot\delta_\varepsilon X$ и раствором r. Множество
$$K_{\varepsilon_0}(M,X,r)=\bigcup_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} M\cdot\delta_\varepsilon B_{cc}(X,r),\quad d_{cc}(O,X)=1>r,$$
будем называть усеченным cc-однородным конусом с вершиной в точке M, осью $M\cdot\delta_\varepsilon X$ и раствором r.

Определение 2. Говорим, что неограниченная область $\mathcal{D}$ канонической группы Энгеля удовлетворяет условию внутреннего cc-однородного конуса, если существует r такое, что для каждой точки $M\in\partial\mathcal{D}$ найдется cc-однородный конус $K_\infty(M,X,r)$, $X=X(M)$, такой, что $\big(K_\infty(M,X,r)\setminus M\big)\subset\mathcal{D}$, где r не зависит от выбора M.

Определение 3. Говорим, что область $\mathcal{D}$ канонической группы Энгеля является cc-равномерной, если для каждой пары точек $x,y\in\mathcal{D}$ найдется абсолютно непрерывный горизонтальный путь $\gamma=\gamma(s)\subset\mathcal{D}$, определенный на $[0,s_0]$, соединяющий точки x,y, такой, что
$$\begin{cases} l(\gamma)\leq ad_{cc}(x,y),\\ \min\{l(\gamma_{x,z}),l(\gamma_{y,z})\}\leq bd_{cc}(z,\partial\mathcal{D}),\end{cases}$$
где $z\in\gamma$ — текущая точка, $\gamma_{y,z}$ — участок кривой γ от точки y до точки z, $\gamma_{x,z}$ — участок кривой γ от точки x до точки z, и константы a,b не зависят от выбора $x,y\in\mathcal{D}$.

Все необходимые комментарии и ссылки, связанные с определениями 1–3, читатель может найти в [2].

Теорема 1. 1^0 *Гиперпространства* $\{(x,y,t,z)\in\mathbb{E}_{\alpha,\beta}\mid x>0\}$, $\{(x,y,t,z)\in\mathbb{E}_{\alpha,\beta}\mid y>0\}$ *удовлетворяют условию внутреннего cc-однородного конуса и являются cc-равномерными областями,* 2^0 *гиперпространства* $\{(x,y,t,z)\in\mathbb{E}_{\alpha,\beta}\mid Ax+By+Ct>0,\ C\neq 0\}$, *удовлетворяют условию внутреннего cc-однородного конуса и являются cc-равномерными областями,* 3^0 *гиперпространство* $\{(x,y,t,z)\in\mathbb{E}_{\alpha,\beta}\mid z>0\}$ *не удовлетворяет условию внутреннего cc-однородного конуса и не является cc-равномерной областью.*

П. 1 теоремы 1 доказан в [1]; тот факт, что гиперпространство $\{(x,y,t,z)\in\mathbb{E}_{\alpha,\beta}\mid z>0\}$ не удовлетворяет условию внутреннего cc-однородного конуса, установлен в работе [3], но мы приводим альтернативное доказательство.

Список литературы

[1] A. V. Greshnov, *On uniform and NTA-domains on Carnot groups* // Siberian Math. J., **42**:5, 851–864 (2001).

[2] A. V. Greshnov, *Hyperspaces that satisfy cc-homogeneous cone condition on canonical Heisenberg and Engel groups* // Sib. Elektron. Mat. Izv., **16**, 938–948 (2019).

[3] R. Monti, D. Morbidelli, *Regular domains in homogeneous groups* // Trans. Amer. Math. Soc., **357**:8, 2975–3011 (2005).

[1]Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 1, Новосибирск, 630090, Россия;

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия

Email address: greshnov@math.nsc.ru

[2]Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 1, Новосибирск, 630090, Россия

Email address: eifromdc@yandex.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ ЛОКАЛЬНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДВИЖНОСТИ

ВЛАДИМИР КЫРОВ

Рассмотрим трехмерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению двумерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L. Построим функцию пары точек $f : M \times M \to R$ с открытой и плотной областью определения $S_f \subset M^2$ по следующей формуле:

$$f = \chi(g(\pi_1(h), \pi_1(h)), \pi_2(h), \pi_2(h)), \tag{1}$$

где $h : M \to N \times L$ — локальный диффеоморфизм, $\pi_1 : N \times L \to N$ и $\pi_2 : N \times L \to L$ — проекции, $g : N \times N \to R$ — функция пары точек с открытой и плотной областью определения S_g в N^2, $\chi : R \times L \times L \to R$ — невырожденная функция (отличны от нуля производные первого порядка по всем переменным). Все приведенные здесь функции аналитические.

Методом вложения построена классификация трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности, задаваемых функциями пары точек (1) по ранее известным двумерным геометриям максимальной подвижности, задаваемых функциями пары точек g. Основные результаты опубликованы в работах [1–4].

Список функций пары точек двумерных геометрий локальной максимальной подвижности [5]:

$$g(A,B) = \sin y_A \sin y_B \cos(x_A - x_B) + \cos y_A \cos y_B;$$
$$g(A,B) = \operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \cos(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B;$$
$$g(A,B) = \operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \operatorname{ch}(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B;$$
$$g(A,B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2;$$
$$g(A,B) = (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2;$$
$$g(A,B) = x_A y_B - x_B y_A;$$
$$g(A,B) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B};$$
$$g(A,B) = ((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2) e^{2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}};$$
$$g(A,B) = \beta \ln(y_A - y_B) + \varepsilon \ln(x_A - X_B);$$
$$g(A,B) = (x_A - x_B)^2 e^{2\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}},$$

где (x_A, y_A) — локальные координаты точки A многообразия N, $\beta, \gamma = \mathrm{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0, \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$.

Список функций пары точек трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности [1]–[4]:

$$f(A,B) = \sin z_A \sin z_B [\sin y_A \sin y_B \cos(x_A - x_B) + \cos y_A \cos y_B] + \cos z_A \cos z_B;$$
$$f(A,B) = \operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \cos(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B;$$
$$f(A,B) = \operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \cos(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B;$$
$$f(A,B) = \operatorname{sh} z_A \operatorname{sh} z_B [\operatorname{sh} y_A \operatorname{sh} y_B \operatorname{ch}(x_A - x_B) - \operatorname{ch} y_A \operatorname{ch} y_B] + \operatorname{ch} z_A \operatorname{ch} z_B;$$
$$f(A,B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2;$$
$$f(A,B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2;$$
$$f(A,B) = x_A y_B - x_B y_A + z_A - z_B;$$

$$f(A,B)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}+z_A+z_B;$$
$$f(A,B)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}e^{z_A+z_B};$$
$$f(A,B)=\mathrm{arctg}\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}+z_A+z_B;$$
$$f(A,B)=((x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2)e^{2z_A+2z_B};$$
$$f(A,B)=((x_A-x_B)^2-(y_A-y_B)^2)e^{2z_A+2z_B};$$
$$f(A,B)=((x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2)e^{2\gamma\mathrm{arctg}\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}+2z_A+2z_B};$$
$$f(A,B)=\beta\ln(y_A-y_B)+\varepsilon\ln(x_A-x_B)+z_A+z_B;$$
$$f(A,B)=(x_A-x_B)^2e^{2\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}+2z_A+2z_B},$$
где (x_A, y_A, z_A) — локальные координаты точки A многообразия M, $\beta, \gamma = \mathrm{const}$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0, \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$.

Для оформления литературы, пожалуйста, используйте следующий образец:

Список литературы

[1] В. А. Кыров, Г. Г. Михайличенко, *Аналитический метод вложения симплектической геометрии.* // Сиб. электрон. матем. изв., **14**, 657–672 (2017).

[2] В. А. Кыров, *Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий.* // Сиб. электрон. матем. изв., **15**, 741–758 (2018).

[3] В. А. Кыров, *Вложение многомерных особых расширений псевдоевклидовых геометрий.* // Челяб. физ.-матем. журнал., **4**:3, 408–420 (2018).

[4] В. А. Кыров, *Аналитическое вложение некоторых двумерных геометрий максимальной подвижности.* // Сиб. электрон. матем. изв., **16**, 916–937 (2019).

[5] Г. Г. Михайличенко, *Математические основы и результаты теории физических структур* // Горно-Алтайск, ГАГУ, 2016.

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия

Email address: `kyrovVA@yndex.ru`

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОЛИЭДРЫ С МАКСИМАЛЬНЫМ РАНГОМ ГОМОЛОГИЙ $H_2(P; Z_2)$

ДАНИИЛ ДАМИРОВИЧ НИГОМЕДЬЯНОВ

Пусть P — специальный полиэдр с d 2-клетками. Тогда ранг гомологий $H_2(P; Z_2)$ не превосходит $d - 1$. Будем говорить, что ранг гомологий $H_2(P; Z_2)$ максимальный, если достигается равенство.

В данной работе получено полное описание класса специальных полиэдром с максимальным рангом гомологий. Устанавливается сложность виртуальных многообразий, задаваемых рассматриваемыми специальными полиэдрами. Рассматривается вопрос об утолщаемости полиэдров.

Доклад основан на совместной работе с С. В. Ивановым и Е. А. Фоминых.

Санкт-Петербургский государственный университет, 14 линия Васильевского острова 29, Санкт-Петербург, 199178, Россия
Email address: danil.nig@gmail.com

СОЛИТОНЫ РИЧЧИ И КИЛЛИНГОВЫ ПОЛЯ НА ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ КАХЕНА-УОЛЛАХА

ДМИТРИЙ ОСКОРБИН[1], ЕВГЕНИЙ РОДИОНОВ[2]

В работе исследуются солитоны Риччи и поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена - Уоллаха, которые являются симметрическими порядка k. Уравнение солитона Риччи являются обобщением уравнения Эйнштейна на (псевдо)римановых многообразиях и тесно связано с потоками Риччи.

Геодезически полное (псевдо)риманово многообразие $(\mathcal{M}, g)$ называется солитоном Риччи, если тензор Риччи r удовлетворяет уравнению солитона Риччи:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g,$$

где $\Lambda \in$ R, $L_X g$ — производная Ли метрики g в направлении векторного поля X.

Обобщенное пространство Кахена - Уоллаха $(\mathcal{CW}_d^{n+2}, g)$ размерности $n+2 \geq 4$ порядка d определяется как $\mathbb{R}^{n+2}$ с метрикой $g = 2dvdu + \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(u)x^i x^j (du)^2$, $\quad A = (a_{ij}(u)) = \sum_{k=0}^{d} H_k u^k$, где H_k — симметрические постоянные матрицы $n \times n$, H_d — невырожденная диагональная матрица.

Обобщенные пространства Кахена - Уоллаха возникают при разложении 1-, 2- и 3-симметрических лоренцевых пространств в прямое произведение. Известно, что локально симметрическое риманово многообразие локально изометрично прямому произведению конечного числа неприводимых локально симметрических пространств и евклидова пространства, а неприводимое локально симметрическое пространство является эйнштейновым.

Теорема.

Обобщенное пространство Кахена-Уоллаха $(\mathcal{CW}_d^{n+2}, g)$ является солитоном Риччи, причем уравнение солитона Риччи $r = \Lambda \cdot g + L_X g$ локально разрешимо для любой константы Λ.

В системе координат Бринкмана изучены поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена-Уоллаха, указаны ограничения на размерность пространства киллинговых полей, а для 2-симметрических лоренцевых многообразий найдены все возможные размерности этого пространства.

Список литературы

[1] J. M. Senovilla, *Second-order symmetric Lorentzian manifolds. I. Characterization and general results* // Classical Quantum Gravity, **25**:24, 24–50 (2008).

[2] A. Galaev, D. Alexeevskii, *Two-symmetric Lorentzian manifolds* // J. Geom. Physics, **61**:12, 2331–2340 (2011).

[3] A. Galaev, *Classification of third-order symmetric Lorentzian manifolds* // Classical Quantum Gravitys, **201**:4, 541–559 (2015).

[1]Алтайский государственный университет, пр. Ленина 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: oskorbin@yandex.ru

[2]Алтайский государственный университет, пр. Ленина 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: edr2002@mail.ru

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

АЛЕКСАНДР С. РОМАНОВ

Согласно работе [1], если B - шар в R^n, функция $u \in W_1^1(B)$ и ее градиент принадлежит пространству Лоренца $L_{n,1}(B)$, то функция u является n-абсолютно непрерывной. Функцию $u : B \to R$ называют n-абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для произвольного семейства непересекающихся шаров $\{B_k \subset B\}$ из условия

$$\sum_k m_n(B_k) < \delta \quad \text{следует} \quad \sum_k (osc_{B_k} u)^n < \varepsilon.$$

Поскольку при всех $p > n$ выполняются вложения $L_p(B) \subset L_{n,1}(B) \subset L_n(B)$, то результат работы [1] позволяет уточнить утверждение классической соболевской теоремы вложения в пространство непрерывных функций.

В работе [2] показано, что в рамках шкалы пространств Лоренца результат работы [1] является точным, т.е. при любом $q > 1$ существует такая имеющая неустранимый разрыв в точке $x = 0$ функция $u : B \to R$, что $u \in W_1^1(B)$, $\nabla u \in L_{n,q}(B)$.

Аналогичная ситуация и с функциями соболевского типа на метрических пространствах.

Рассмотрим s-регулярное метрическое пространство (X, d) с мерой μ, удовлетворяющей оценке

$$C_1\, r^s \le \mu\, (B(x, r)) \le C_2\, r^s, \quad s > 1.$$

Неотрицательную функцию g называют допустимой для измеримой функции $u : X \to R$, если неравенство

$$|u(x) - u(y))\,| \le d(x, y)\ (g(x) + g(y))$$

выполняется для почти всех $x, y \in X$.

Согласно работе [3], если для функции $u \in L_1(X, \mu)$ существует допустимая функция g, принадлежащая пространству Лоренца $L_{s,1}(X, \mu)$, то функция u является s-абсолютно непрерывной.

Как и в евклидовом случае удается показать, что в рамках шкалы пространств Лоренца этот результат является точным, т.е. при $q > 1$ существует разрывная $u \in L_1(X, \mu)$, у которой допустимая функция $\in L_{s,q}(X, \mu)$.

Свойство абсолютной непрерывности является более сильным по сравнению с обычным свойством непрерывности, поэтому должны существовать более слабые условия, обеспечивающие непрерывность функций соболевского типа. Возможно такие условия можно получить в рамках шкалы пространств Орлича.

Список литературы

[1] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Maly, *On functions with derivatives in a Lorentz space* // Manuscripta math., **100**:1, 87–101 (1999).

[2] А. С. Романов, *О непрерывности функций с обобщенными производными* // Известия Вузов. Математика, **11**, 82–85 (2018).

[3] А. С. Романов, *Об абсолютной непрерывности функций соболевского типа на метрических пространствах* // Сиб. матем. журн., **49**:5, 1148–1157 (2008).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия

Email address: asrom@math.nsc.ru

Работа поддержана программой фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0007, и Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 17-01-00801.

КАТЕГОРНАЯ ТОПОЛОГИЯ И МОРФИЗМЫ ОБЪЕКТОВ ТОПОСОВ ГРОТЕНДИКА

ЕВГЕНИЙ СКУРИХИН

Топос Гротендика - это категория, эквивалентная категории пучков множеств на некотором сайте Гротендика. Таким образом, объект топоса Гротендика можно, с точностью до изоморфизма, описывать, как предпучок множеств на некоторой категории. Множество морфизмов между 2 объектами топоса Гротендика совпадает с множеством всех гомоморфизмов (естественных преобразований) соответствующих предпучков множеств.

Пусть (K, τ) сайт Гротендика, то есть K категория, τ топология Гротендика на K, D - τ-пучок множеств на K. Класс $K_{D,\tau}$ всех подпучков D образует полную брауэрову решётку и тем самым задаёт на D структуру, близкую к топологической. Роль открытых множеств при этом играют подпучки D. Если E произвольный предпучок множеств на K, D порождённый им τ-пучок, то класс $K_{E,\tau}$ всех τ-замкнутых подпредпучков E естественно изоморфен $K_{D,\tau}$, как полная брауэрова решётка.

Зафиксируем объект k категории K. Описанная выше конструкция задаёт на предпучке множеств $i^K(k)$, представляющем объект k, структуру, близкую к топологической. Так как соответствие $k \mapsto i^K(k)$ задаёт полный строгий функтор, то любая структура на $i^K(k)$ определяется свойствами объекта k.

В работе [1] рассмотрены нормальные структуры на множествах и построена теория пучков на множествах, снабжённых нормальными структурами. В докладе будет рассказано о нормальных структурах на предпучках множеств, задаваемых ими топологиях Гротендика и свойствах пучковых когомологий. Доказывается, что когомологии Чеха и Гротендика изоморфны. Как и в случае множеств, нормальные структуры позволяют определить понятие близости и равномерности на предпучках множеств, а значит и на объектах произвольной категории, и изучать их когомологическими методами.

В работах [2] и [3] описаны гомоморфизмы, а также полугруппы эндоморфизмов предпучков множеств, если зафиксированы их семейства порождающих. Для пучков множеств понятие семейства порождающих меняется: семейство $\alpha \subset D$ порождает τ-пучок множеств D, если предпучок, порождённый семейством α, является τ-плотным в D. В докладе описываются гомоморфизмы, а также полугруппы эндоморфизмов, эпиморфизмов, мономорфизмов и группы автоморфизмов пучков множеств, то есть объектов топосов Гротендика. Гомоморфизмы предпучков сохраняют топологические структуры и позволяют составить спектральные последовательности морфизмов объектов топосов, а значит, в силу вышесказанного, морфизмов объектов произвольной категории.

Частными случаями приводимых в докладе результатов являются теоремы о правых H-множествах, где H полугруппа с единицей.

Список литературы

[1] E. E. Skurikhin, *Categorical topology of normal structures* // Siberian Electronic Mathematical Reports, **15**, 1719–1734 (2018).

[2] E. E. Skurikhin, *Presheaves of sets and actions of semigroups* // Far Eastern Mathematical Journal, **19**:1, 63–74 (2019).

[3] Е. Е. Скурихин, *Полугруппы эндоморфизмов категорных топологических пространств* // Тезисы Международной конференции «ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ–2018», 70–71 (2018).

Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио 7, Владивосток, 690041, Россия;
Дальневосточный федеральный университет, ул. Аякс 10, Владивосток, 690920, Россия
Email address: eeskur@gmail.com

ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНЫМ КРУЧЕНИЕМ

ПАВЕЛ КЛЕПИКОВ[1], ЕВГЕНИЙ РОДИОНОВ[2], ОЛЕСЯ ХРОМОВА[3]

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X,$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивита. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], и называется метрической связностью с векторным кручением или полусимметрической связностью (с точностью до направления).

Данная связность играет важную роль для двумерных поверхностей, так как в этом случае любая метрическая связность является связностью с векторным кручением [1]. Кроме того, многообразия с плоской метрической связностью с векторным кручением связаны с конформно плоскими (псевдо)римановыми многообразиями [2].

В случае связности Леви-Чивита хорошо известны математические модели, позволяющие вычислять компоненты различных инвариантных тензорных полей (Римана, Риччи, Вейля и других) на локально однородных (псевдо)римановых многообразиях (см., например, [3]). Целью данной работы является построение подобной математической модели для вычисления инвариантных тензорных полей на локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с метрической связностью с векторным кручением, а также реализация данной модели в среде систем компьютерной математики.

Список литературы

[1] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie)* // Ann. Ecole Norm. Sup., **42**, 17–88 (1925).

[2] K. Yano, *On semi-symmetric metric connection* // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees., **15**, 1579–1586 (1970).

[3] О.П. Хромова, *Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях* // Известия АлтГУ, **1(93)**, 140–143 (2017).

[1]Алтайский государственный университет, пр. Ленина 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: klepikov.math@gmail.com

[2]Алтайский государственный университет, пр. Ленина 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: edr2002@mail.ru

[3]Алтайский государственный университет, пр. Ленина 61, Барнаул, 656049, Россия
Email address: khromova.olesya@gmail.com

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРОСТРАНСТВА МОДЕЛЕЙ

ПАВЕЛ В. ЧЕРНИКОВ

Доказывается, что если l — классическая двузначная логика со счетным количеством высказываний, то пространство всех ее моделей, наделенное элементарной топологией и профакторизованное по естественному отношению эквивалентности R, является $\varepsilon{-}ANR$— пространством.

В [1, 2] определяется понятие абсолютного окрестностного ε-ретракта в классе метрических компактов. Приведем это определение (с небольшими изменениями).

Замкнутое подмножество A компактного метрического пространства X называется окрестностным ε-ретрактом X, если для всякого $\delta > 0$ существуют окрестность U_δ множества A в X и такое непрерывное отображение $r_\delta\colon U_\delta \to A$, что $\rho(x, r_\delta(x)) \leq \delta$ для всех $x \in A$.

Компактное метрическое пространство Y называется абсолютным окрестностным ε-ретрактом, если всякое замкнутое подмножество A любого компактного метрического пространства X, гомеоморфное Y, является окрестностным ε-ретрактом X.

Совокупность всех абсолютных окрестностных ε-ретрактов обозначим, следуя [1], через $\varepsilon - ANR$.

Лемма 1. *Ретракт абсолютного окрестностного ε-ретракта является абсолютным окрестностным ε-ретрактом.*

Лемма 2. *Декартово произведение $X = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ является абсолютным окрестностным ε-ретрактом тогда и только тогда, когда каждый сомножитель есть абсолютный окрестностный ε-ретракт.*

Далее будем использовать терминологию и обозначения из [3].

Пусть $\mathcal{M}_l$ — множество всех моделей классической двузначной логики l, наделенное элементарной топологией. Обозначим через Σ_l множество всех высказываний логики l. Определим на множестве $\mathcal{M}_l$ отношение эквивалентности R следующим образом: если модели A, B принадлежат классу $\mathcal{M}_l$, то $A \equiv B(modR)$ тогда и только тогда, когда $[A] = [B]$ [3]. Мощность множества W обозначим $|W|$.

Теорема. *Пусть $|\Sigma_l| = \omega$. Тогда $\mathcal{M}_l/R \in \varepsilon - ANR$.*

Наметим доказательство. По теореме о компактности А. И. Мальцева пространство $\mathcal{M}_l$, определяемое элементарной топологией на $\mathcal{M}_l$, компактно [3]. Пространство $\mathcal{M}_l$ не хаусдорфово; оно становится хаусдорфовым, если отождествить элементарно эквивалентные модели, т.е. фактор-пространство $\mathcal{M}_l/R$ — хаусдорфовый компакт. Пространство $\mathcal{M}_l/R$ гомеоморфно некоторому подмножеству $Th(\mathcal{M}_l/R)$ пространства $\{0,1\}^\omega$ [3]. Так как множество $\mathcal{M}_l/R$ компактно, то $Th(\mathcal{M}_l/R)$ замкнуто в $\{0,1\}^\omega$. Согласно [4, с. 431] множество $Th(\mathcal{M}_l/R)$ является ретрактом пространства $\{0,1\}^\omega$. По лемме 2 компакт $\{0,1\}^\omega$ принадлежит $\varepsilon - ANR$. Тогда по лемме 1 $\mathcal{M}_l/R \in \varepsilon - ANR$.

Список литературы

[1] Noguchi H., *A generalization of absolute neighborhood retracts* // Kōdai Math. Sem. Rep., **5**:1, 20–22 (1953).
[2] Борсук К., *Теория ретрактов* // М.: Мир, 1971.
[3] Кейслер Г. Дж., Чэн Чень-чунь., *Теория непрерывных моделей* // М.: Мир, 1971.
[4] Энгелькинг Р., *Общая топология* // М.: Мир, 1986.

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 1, Новосибирск, 630090, Россия

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ПОЛУОДНОРОДНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

АНТОН ВЯЧЕСЛАВОВИЧ ШЕРСТОБИТОВ

Четырехмерные полуоднородные многогранники H_4 задаются следующими свойствами:
(1) Все ребра равны по длине;
(2) Существует описанная гиперсфера.

Теорема 1. *Существует бесконечное число многогранников H_4, отличных от однородных.*

Теорема 2. *Пусть у многогранника H_4 есть ячейка W, имеющая $n-$угольную двумерную грань w, чтобы при повороте ячейки W в соответствующем ей трехмерном пространстве относительно оси $O'F$, где F - центр грани w, а O' - центр ячейки W, на угол $360°/n$, ячейка W не переходила сама в себя. Построим многогранник H_4', получающийся из H_4 с помощью поворота относительно плоскости $OO'F$ (O - центр многогранника H_4), при котором: многоугольник w переходит сам в себя, ячейка W не переходит сама в себя. Тогда если двумерные грани, которые принадлежат сразу двум многогранникам, H_4 и H_4', удаляются, то два многогранника превращаются в один H_4''.*

Алгоритм построения многогранника, двойственного H_4:

(1) В каждой двумерной грани многогранника H_4 строятся диагонали, соединяющие каждую вершину грани с вершиной, идущей от нее через одну (в треугольных гранях диагонали отсутствуют). Точки их пересечения - точки (в треугольных гранях за точки принимаем вершины). Каждое ребро двумерной грани задает одну точку A.

(2) В двумерных гранях ячейки, смежных по ребру, точки A, соответствующие этому ребру, соединяются прямой (прямые a). Каждое ребро ячейки задает одну прямую a.

(3) Прямые , проходящие через точки одной двумерной грани ячейки, пересекаются в одной точке (точки). Каждая двумерная грань ячейки задает одну точку B.

(4) В ячейках, смежных по двумерной грани, точки B, соответствующие этой двумерной грани, соединяются прямой (прямые b). Каждая двумерная грань многогранника H_4 задает одну прямую b.

(5) Все прямые b, соответствующие двумерным граням одной ячейки, пересекаются в одной точке C. Каждая ячейка задает одну точку C.

(6) Точки С являются вершинами многогранника U_4, двойственного исходному, а ребра этого многогранника лежат на прямых b.

Следствие 1. В многограннике H_4 все точки C, соответствующие ячейкам с общим ребром, всегда лежат в одной плоскости.

Следствие 2. В многограннике H_4 все точки C, соответствующие ячейкам с общей вершиной, всегда лежат в одном трехмерном пространстве.

Список литературы

[1] А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники* // М-Л., 1950.
[2] А. В. Шерстобитов, *Полуоднородные многогранники* // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, **2**:20, 158–163 (2012).
[3] R. Klitzing *Convex Segmentochora* // Symmetry: Culture and Science, **11**, Nos. 1-4, 139–181 (2000).
[4] The CRF Polychora. http://eusebeia.dyndns.org/4d/crf
[5] https://sites.math.washington.edu/ grunbaum

Муниципальное Автономное Образовательное Учреждение Гимназия №120, ул. Степана Разина 71, Екатеринбург, 620142, Россия
Email address: sherstobitov_a55@mail.ru