О некоторых геометрических задачах и результатах, связанных с кафедрой геометрии и топологии НГУ

В.Н. Берестовский

Институт математики им. С.Л.Соболева РАН

Конференция "Дни геометрии в Новосибирске - 2021",
Посвященная 60-летию кафедры Геометрии и топологии ММФ НГУ

Новосибирский государственный университет, 21 сентября 2021

Благодарю организаторов конференции за приглашение сделать доклад. Я согласился из-за юбилея и неуверенности дожить до следующего. Иных уж нет, а те далече. 55 лет назад случайно из 7 абитуриентов, поселенных в одной комнате, я один поступил в НГУ. Удача, что Ю.Ф.Борисов предложил мне трудную тему дипломной работы. Ее хватило на мои кандидатскую и в какой-то степени докторскую диссертации. Математических кружков в нашей поселковой средней школе в Восточном Казахстане не было, в ФМШ я не учился. Возможно поэтому мой подход к геометрии состоял в поиске простых определений основных понятий. Может, это поможет сделать доклад и рассказать кратко о некоторых задачах и результатах, связанных и с моими работами.

Рассматриваются метрические пространства, в которых расстояние между любыми двумя точками равно инфимуму длин соединяющих их путей, т.е. *пространства с внутренней метрикой* по А.Д.Александрову. Если оно локально компактно и полно, то по теореме Кон-Фоссена любые две точки соединимы *кратчайшей*, реализующей упомянутый инфимум. Пространство с последним свойством называется *геодезическим*. Треугольник T в пространстве, стороны которого являются кратчайшими, будем называть просто *треугольником*. Треугольник T_K в 2-мерном односвязном римановом пространстве S^2_K постоянной секционной кривизны K со сторонами, длины которых равны длинам сторон треугольника T, называется *треугольником сравнения* для T.

1. *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. М.— Л., ОНТИ, 1936.

2. *Александров А.Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.— Л, Гостехиздат, 1948.

3. *Alexandrow A.D.* Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie. Schriftenreihe der Institute für Mathematik. 1957, H. 1, S. 33-84.

4. *Берестовский В. Н.* Пространства с ограниченной кривизной и дистанционная геометрия. Сиб. матем. журн. **27:1**, 11-25 (1986).

5. *Топоногов В.А.* Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. Усп. матем. наук. **14:1**, 87-130 (1959).

6. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.

7. *Brendle S., Schoen R.* Manifolds with $1/4$-pinched curvature are space-forms. J. Amer. Math. Soc. **22:1**, 287-307 (2009).

Теорема Адамара–Картана [1] утверждает, что экспоненциальное отображение с началом в любой точке полного односвязного риманова многообразия M (размерности, не меньшей 2) неположительной кривизны есть диффеоморфизм, что позволяет ввести в таком многообразии глобальную систему координат.
С помощью этого в [1] доказано, что углы любого треугольника T в M не больше соответствующих углов евклидова треугольника сравнения T_0 для T. В [3] Александров существенно обобщил это утверждение: углы треугольника T в геодезическом пространстве R_K кривизны $\leq K$ в его смысле, с непрерывной зависимостью кратчайших от концов, не больше соответствующих углов его треугольника сравнения T_K.
Замечание 1 [4]. Метрическое пространство с локальным существованием кратчайших имеет кривизну $\geq k$ (соответственно, $\geq k$ и $\leq K$, где $k \leq K$) по Александрову тогда и только тогда, когда локально каждая четверка точек пространства допускает изометрическое вложение в трехмерное односвязное риманово многообразие $S^3_{k'}$ некоторой постоянной кривизны $k' \geq k$ (соответственно, $k \leq k' \leq K$). Аналогичное, но несколько более сложное утверждение, справедливо для пространств кривизны $\leq K$.

В [2] Александров доказал, что углы каждого треугольника T геодезической двумерной поверхности P^2 кривизны $\geq k$ в его смысле не меньше соответствующих углов его треугольника сравнения T_k.
В [5] В.А.Топоногов доказал, что углы каждого треугольника T в полном римановом многообразии M размерности, не меньшей 2, секционные кривизны которого $\geq k$ во всех точках по всем двумерным направлениям σ, не меньше соответствующих углов его треугольника сравнения T_k. При этом, если $k > 0$, то периметр треугольника T не больше $2\pi/k$.

Эта *теорема сравнения углов Топоногова* сыграла важную роль в дальнейшем развитии римановой геометрии в целом. Отметим следующую *теорему Клингенберга о сфере* [6]:
Полное односвязное риманово многообразие M размерности ≥ 2 *гомеоморфно* сфере, если его секционная кривизна δ-ограничена с $\delta > 1/4$, т.е. она не меньше такого δ и не больше 1 по всем двумерным направлениям σ во всех точках из M.
После работ Хэмилтона и Перельмана пришла другая эпоха, время потоков Риччи, и с их помощью в работе [7] авторы доказали, что при тех же условиях (на самом деле даже при чуть более слабых условиях на кривизны) многообразие M *диффеоморфно* сфере.

8. *Cheeger J., Gromoll D.* The structure of complete manifolds of nonnegative curvature. Bull. Amer. Math. Soc. **74**, 1147-1150 (1968).

9. *Cheeger J., Gromoll D.* The structure of complete manifolds of nonnegative curvature. Ann. Math. **96**, 413-443 (1972).

10. *Шарафутдинов В. А.* Полные открытые многообразия неотрицательной кривизны. Сиб. матем. журн. **15:1**, 177-191 (1974).

11. *Perelman G.* Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll. J. Differ. Geom. **40:1**, 209-212 (1994).

12. *Шарафутдинов В. А.* Теорема Погорелова-Клингенберга для многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$. Сиб. матем. журн. **18:4**, 915-925 (1977).

13. *Berestovskii V.N., Guijarro L.* A metric characterization of Riemannian submersions. Ann. Glob. Anal. Geom. **18**, 577-588 (2000).

14. *Wilking B.* A duality theorem for Riemannian foliations in nonnegative sectional curvature. Geom. Funct. Anal. **17:4**, 1297-1320 (2007).

В статье [8] Чигер и Громол анонсировали, что каждое полное открытое (некомпактное) риманово многообразие M секционной кривизны ≥ 0 *диффеоморфно* нормальному расслоению над некоторым компактным вполне геодезическим подмногообразием S без края в M (душой, soul). Но в их статье [9] был доказан только соответствующий гомеоморфизм.

Упомянутый анонс из [8] доказал В.А.Шарафутдинов в статье [10].

Лишь 22 года спустя после [9] Г.Я.Перельман доказал в короткой статье [11] *гипотезу Чигера–Громола*: Если полное открытое риманово многообразие M размерности $n \geq 2$ неположительной секционной кривизны имеет в какой-нибудь точке положительные секционные кривизны по всем двумерным направлениям, то M диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.

В.А.Шарафутдинов построил в статье [12] некоторого рода *метрическую ретракцию*, (*отображение Шарафутдинова*) sh пространства M на S и описал некоторые ее свойства. Естественно возник вопрос: *является ли отображение sh гладким класса C^∞?*

На самом деле отображение sh является *субметрией* [13]. Отображение p метрического пространства M в метрическое пространство N называется субметрией, если p отображает каждый замкнутый шар в M на замкнутый шар того же радиуса в N, переводя центр шара в центр. В [13] доказано, что каждая субметрия C^∞-гладких римановых многообразий (в частности, sh) — $C^{1,1}$-отображение, т.е. ее дифференциал существует и является липшицевым. В общем случае это не улучшаемо [13], но есть гипотеза [13]: *если область определения такой субметрии p имеет неположительную секционную кривизну, то p бесконечно дифференцируема. Риманова субмерсия* полных римановых многообразий характеризуется как субметрия класса C^∞ [13].

В статье [14] Б.Вилкинг доказал в частности, что $sh \in C^\infty$.

15. *Берестовский В. Н.* Введение римановой структуры в некоторых метрических пространствах. Сиб. матем. журн. **16:4**, 651-662 (1975).

16. *Николаев И. Г.* О параллельном переносе векторов в пространствах с двусторонне ограниченной по А.Д.Александрову кривизной. Сиб. матем. журн. **24:1**, 130-145 (1983).

17. *Николаев И. Г.* О гладкости метрики пространств с двусторонне ограниченной по А.Д.Александрову кривизной. Сиб. матем. журн. **24:2**, 114-132 (1983).

18. *Александров А.Д., Берестовский В. Н., Николаев И.Г.* Обобщенные римановы пространства. Успехи. мат. наук. **41:3**, 3-44 (1986).

19. *Бураго Ю.Д., Громов М. Л., Перельман Г.Я.* Пространства А.Д.Александрова с ограниченными снизу кривизнами. Усп. матем. наук. **47:2**, 3-51 (1992).

В [1] Э.Картан доказал, что локально в римановом многообразии модуль разности соответствующих углов треугольника T и его евклидова треугольника сравнения T_0 не больше произведения площади $S(T_0)$ треугольника T_0 и положительного числа (сколь угодно мало отличающегося от трети максимума модулей нижней и верхних границ секционных кривизн в рассматриваемой окрестности). В [15] доказано, что G-пространство Буземана, удовлетворяющее такому локальному условию, изометрично риманову многообразию класса C^0, т.е. имеющему атлас класса C^1 с непрерывными компонентами метрического тензора в этом атласе. Благодаря Александрову, это можно переформулировать так:

Теорема 1.

Локально компактное пространство с внутренней метрикой, удовлетворяющее локальным условиям продолжаемости кратчайших и двусторонней ограниченности кривизны по Александрову, изометрично риманову многообразию класса C^0 некоторой размерности $n \geq 2$.

В доказательстве теоремы был использован введенный мной атлас из *дистанционных* (термин Александрова) систем *координат*, когда в малых окрестностях берутся расстояния до некоторых n точек из каждой окрестности. В конце статьи [15] было высказано предположение, что дистанционные координаты дают атлас класса $C^{1,1}$ с липшицевыми компонентами метрического тензора.

И.Г.Николаев с помощью введенной им геометрической конструкции параллельного переноса векторов вдоль кратчайших (ее аналог был ранее известен физикам) доказал это предположение в статье [16]. На основе этого он доказал в [17] весьма нетривиальное аналитическое утверждение: пространства из теоремы 1 допускают атлас из гармонических систем координат класса $C^{3,\alpha}$ с любым показателем Гёльдера $0 < \alpha < 1$ и с компонентами метрического тензора класса $C^{1,\alpha}$ и почти всюду определенными компонентами тензора кривизны.

Полученные результаты были суммированы в [18] и позже в моей совместной с Николаевым части обзора ВИНИТИ под редакцией Ю.Г.Решетняка, переведенного на английский в виде монографии.

Статья [18] оказала большое влияние на введение основных понятий в обзоре [19] его авторов по полученным ими результатам о (в основном конечномерных) пространствах Александрова ограниченной снизу кривизны. Почему-то только эти пространства стали часто называть позже *пространствами Александрова*. Например, определения K-конуса и касательного пространства (как 0-конуса над пространством направлений в данной точке) — те же, что в [18]. Лишь несколько изменено определение пространства направлений. Само определение пространства Александрова ограниченной снизу кривизны (локальное условие (D) из [19] для четверок точек, отличное от характеризации в Замечании 1) — это его критерий из моей статьи [4], хотя в этом определении в общем случае даже локально не предполагается внутренний характер метрики. Но характер доказательств, и в некоторой степени результатов, в [19] — другой, чем в [18]. Сформулируем наиболее важные на наш взгляд результаты из [19].

Далеким обобщением теорем сравнения углов Александрова и Топоногова является *Теорема глобализации 3.2*: В полном пространстве Александрова M кривизны $\geq k$ условие (D) выполняется для любых четверок точек в M.

При тех же условиях и $k > 0$ в Теореме 3.6 доказано, что диаметр пространства M не больше $\pi/\sqrt{k}$, а в Теореме 3.7 что размер любой тройки в M, т.е. сумма их попарных расстояний, не больше $2\pi/\sqrt{k}$ и для любой четверки в M размера $2\pi/\sqrt{k}$ выполняется условие (D).

Отметим также следующее утверждение: если область определения субметрии является пространством Александрова кривизны $\geq k$, то и ее образ есть пространство Александрова кривизны $\geq k$ (в [19] это доказано для частного случая субметрии: *пространства эквидистантного слоения*), являющееся далеким обобщением соответствующего известного результата для секционных кривизн римановых многообразий: области определения и образа римановой субмерсии.

20. *Берестовский В. Н.* Однородные пространства с внутренней метрикой. Докл. АН СССР **301:2**, 268-271 (1988).

21. *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой. I. Сиб. матем. журн. **29:6**, 17-29 (1988).

22. *Берестовский В. Н.* О структуре однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой. Сиб. матем. журн. **30:1**, 23-34 (1989).

23. *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой. II. Сиб. матем. журн. **30:2**, 14-28 (1989).

24. *Берестовский В. Н.* Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского. Сиб. матем. журн. **35:1**, 3-11 (1994).

25. *Berestovskii V.N., Plaut C.P.* Homogeneous spaces of curvature bounded below. J. Geom. Analysis. **9:2**, 203-219 (1999).

Метрическое пространство M называется *однородным*, если для любых его точек x, y существует изометрия f пространства M на себя такая, что $f(x) = y$.
В [20] анонсированы следующие результаты.
1. Каждое конечномерное локально компактное однородное пространство с внутренней метрикой является многообразием, изометричным однородному пространству G/H связной группы Ли G по ее компактной подгруппе H, снабженному G-инвариантной (суб)финслеровой метрикой ρ.
2. Пусть (M, ρ) — бесконечномерное локально компактное однородное пространство с внутренней метрикой. Тогда существуют бесконечная последовательность однородных многообразий с внутренней метрикой (M_n, ρ_n), субметрии $p_n : (M, \rho) \to (M_n, \rho_n)$, $p_{nm} : (M_m, \rho_m) \to (M_n, \rho_n)$, $n < m$, такие, что $p_{nk} = p_{nm}p_{mk}$, $n < m < k$; $\rho_n(p_n \times p_n)$ сходится равномерно на $M \times M$ к ρ при $n \to \infty$.

3. В условиях п. 1 на группе Ли G существует левоинвариантная (суб)финслерова метрика σ такая, что каноническая проекция $p:(G,\sigma)\to(G/H,\rho)$ есть субметрия. При этом каждая кратчайшая в $(G/H,\rho)$ является проекцией некоторой кратчайшей в (G,σ).

4. В условиях п. 3, кратчайшие в (G,σ), параметризованные длиной дуги, — это в точности решения левоинвариантной задачи оптмального быстродействия вида $\dot{g}(t)=dl_{g(t)}(u(t)), u(t)\in U$, с измеримыми управлениями $u(t)$, где U — замкнутый единичный шар единичного радиуса некоторой нормы в подпространстве $\mathfrak{p}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, порождающего алгебру $\mathfrak{g}$.

Доказательства этих результатов опубликованы в [21]—[23]. При этом доказательство п. 2 использует известные результаты о локально компактных топологических группах, полученные в ходе доказательства 5-й гипотезы Гильберта.

В работе [24] возможно впервые найдены кратчайшие произвольной левоинвариантной субфинслеровой метрики на примере (трехмерной) группы Гейзенберга с помощью принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального быстродействия из п. 4.

В статье [25] доказано, что каждое локально связное фактор-пространство G/H связной локально компактной топологической группы G с 1-й аксиомой счетности по ее компактной подгруппе H допускает G-инвариантную внутреннюю метрику кривизны $\geq k$ по Александрову при некотором k. Если G/H компактно, можно взять $k = 0$. Обратно, всякое однородное локально компактное пространство (M, ρ) с внутренней метрикой кривизны $\geq k$ получается таким образом. Оно может быть бесконечномерным.

На основе [21–23] в [25] установлено, что если (M, ρ) имеет бесконечную размерность, то все однородные многообразия с внутренней метрикой (M_n, ρ_n) из п. 2 — однородные римановы многообразия с секционными кривизнами $\geq k$, а все субметрии $p_{nm} : (M_m, \rho_m) \to (M_n, \rho_n)$, $n < m$, — римановы субмерсии.

Если (M, ρ) — однородное локально компактное пространство с внутренней метрикой кривизны $\leq K$ по Александрову, то (M, ρ) — риманово многообразие с секционными кривизнами $\leq K$ [25].

В [25] введены следующие понятия.

Метрическое пространство (M, ρ) называется δ-*однородным*, если для любых его точек x, y существует переводящая первую точку во вторую изометрия f (δ-перенос) пространства (M, ρ) с максимальным смещением в точке x.

Метрическое пространство (M, ρ) называется *однородным по Клиффорду-Вольфу*, кратко КВ-однородным, если для любых его точек x, y существует переводящая первую точку во вторую изометрия f (КВ-перенос) пространства (M, ρ), смещающая все точки в (M, ρ) на одно и то же расстояние.

Ясно, что КВ-однородное метрическое пространство δ-однородно, а δ-однородное однородно.

Локально компактное δ-однородное пространство с внутренней метрикой кривизны $\geq k$ по Александрову имеет кривизну ≥ 0 [25].

26. *Berestovskii V.N., Nikonorov Yu.G.* On δ-homogeneous Riemannian manifolds. Different. Geometry and Its Applications. **26**, 514-535 (2008).

27. *Berestovskii V.N., Nikonorov Yu.G.* Killing vector fields of constant length on locally symmetric Riemannian manifolds. Transformation Groups. **13:1**, 25-45 (2008).

28. *Берестовский В.Н., Никоноров Ю.Г.* Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях I. Сиб. матем. журн. **49:3**, 497-514 (2008). II. Сиб. матем. журн. **59:2**, 267-278 (2009).

29. *Berestovskii V.N., Nikonorov Yu.G.* Clifford-Wolf homogeneous Riemannian manifolds. J. Differential Geometry **82**, 467-500 (2009).

30. *Berestovskii V.N., Nikonorov Yu.G.* Generalized normal homogeneous Riemannian metrics on spheres and projective spaces. Ann. Glob. Anal. Geom. **45:3**, 167-196 (2014). DOI: 101007/s10455-013-9393-x.

31. *Berestovskii V.N., Nikonorov Yu.G.* On homogeneous geodesics and weakly-symmetric spaces. Ann. Glob. Anal. Geom. **55:3**, 575-589 (2019). http:/doi.org/10.1007/s10455-018-9641-1.
32. *Valerii Berestovskii, Yurii Nikonorov.* Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics. Springer Monographs in Mathematics. Springer Nature Switzerland AG. Cham, 2020. XXII+482 pp.

33. *Берестовский В.Н., Никоноров Ю.Г.* Конечные однородные метрические пространства. Сиб. матем. журн. **60:5**, 973-995 (2019).

34. *Берестовский В.Н., Никоноров Ю.Г.* Конечные однородные подпространства евклидовых пространств. Мат. труды. **24:1**, 3-34 (2021).

35. *Берестовский В.Н., Никоноров Ю.Г.* Полуправильные многогранники Госсета. 2021, 33 с. будет опубликована.

В работах [26—32] многосторонне изучаются δ-однородные и КВ-однородные римановы многообразия. Поскольку доказывается, что нормальные однородные по М.Берже римановы многообразия δ-однородны, то последние пространства в римановом, да и в других случаях, называются еще *обобщенными нормальными однородными*. Исследуются и более общие геодезически орбитальные римановы многообразия, каждая геодезическая в которых является орбитой некоторой 1-параметрической группы изометрий; они включают все слабо симметрические римановы многообразия [31] и обобщенные нормальные однородные римановы многообразия.

В статьях [33—35] изучаются конечные однородные метрические пространства, в том числе их подклассы КВ-однородных и δ-однородных пространств. Получена полная классификация всех правильных и полуправильных многогранников в конечномерных евклидовых пространствах по свойствам КВ-однородности и δ-однородности.

36. *Александров А. Д.* О преобразованиях Лоренца. Усп. матем. наук. **5:3**, 187 (1950).

37. *Александров А. Д., Овчинникова В. В.* Замечания к основам теории относительности. Вестн. ЛГУ., 1953, вып. 11, 95-110.

38. *Борисов Ю. Ф.* О преобразованиях псевдоевклидова пространства. Изв. вузов. Математика. 1960. № 6, 31–39.

39. *Борисов Ю. Ф.* Об аксиоматическом определении групп Галилея и Лоренца. Сиб. матем. журн. **19:6**, 1237-1253 (1978).

40. *Ионин В. К.* Характеристические свойства преобразований Лоренца. Сиб. матем. журн. **18:5**, 1027-1031 (1977).

41. *Кузьминых А. В.* Об одном минимальном условии, определяющем преобразование Лоренца. Сиб. матем. журн. **17:6**, 1321-1326 (1976).

Еще А.Эйнштейну было известно, что линейное преобразование пространства-времени Минковского, сохраняющее скорость света, есть преобразование Лоренца. Первый научный руководитель А.Д.Александрова В.А.Фок поставил ему вопрос: верно ли это утверждение без условия линейности? Естествен аналогичный вопрос для преобразований, сохраняющих временно-подобные конусы, световые конусы (будущего), причинные конусы (будущего) или временно-подобные конусы будущего. Этим вопросам посвящена статья Александрова 1950 г. и статьи [36, 37], его спецкурс и последующий семинар 1970 гг. по *хроногеометрии* в НГУ. Основная задача семинара: доказать аффинность преобразований аффинного пространства размерности ≥ 3, сохраняющих систему параллельных конусов, в том числе выпуклых, при возможно более слабых условиях. Было много работ по этой тематике; скажем о немногих.

Пусть A^n, $n \geq 3$, — аффинное пространство с декартовыми координатами $x_1, \ldots, x_n$ и квадратичной формой $x^2 = x_n^2 - \Sigma_{k=1}^{n-1} x_k^2$. Определим следующие конусы с вершиной $x \in A^n$:
(1) $C_x = \{y : (y-x)^2 = 0\}$ — световой конус;
(2) $K_x = \{y : (y-x)^2 \geq 0\}$ — причинный конус;
(3) $Q_x = \{y : (y-x)^2 > 0\}$ — временно-подобный конус;
При дополнительном ограничении $x_n \leq y_n$ получаем соответственно
(1^+) C_x^+ — световой конус будущего;
(2^+) K_x^+ — причинный конус будущего;
(3^+) Q_x^+ — временно-подобный конус будущего.

Общая теорема. Если биекция $f : A^n \to A^n$ и ее обратная f^{-1} сохраняют систему параллельных конусов одного из указанных видов, то f есть преобразование Лоренца (точнее, его прямой аналог) с точностью до подобия и параллельного переноса.

Случай системы конусов C_x в этой теореме впервые рассмотрел Александров в 1949 г. [36] (см. также [38]), систем C_x^+ и K_x^+ — в [37]. Названия статей [39—41] немного раскрывают их содержание.

42. *Гуц А. К.* Аксиоматическая теория относительности. Усп. мат. наук. **37:2**, 39-79 (1982).

43. *Пименов Р. И.* Пространства кинематического типа. Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1968, **6**, 3-496.

44. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах. Алгебра и анализ. **11:4**, 1-34 (1999).

45. *Кузьминых А. В.* Отображения, сохраняющие расстояние 1. Сиб. матем. журн. **20:3**, 597-602 (1979).

46. *Berestovskii, V. N.* Isometries in Alexandrov spaces of curvature bounded above. Illinois J. of Math. **46:2**, 645-656 (2002).

47. *Андреев П. Д.* Задача А.Д.Александрова для $CAT(0)$-пространств. Сиб. матем. журн. **47:1**, 3-24 (2006).

В статье [42] и книге [43] построены некоторые аксиоматические теории относительности (в [43] и некоторых элементов ОТО); в [42] есть библиография работ участников семинара по хроногеометрии.

В статье [44] предлагается метрический подход к изучению левоинвариантных порядков на топологических группах в связи с задачами теории оптимального управления. Вводятся три эквивалентных системы аксиом для метризованных порядков. Наиболее традиционная из них основана на понятии почти внутренней антиметрики, являющейся обобщением внутренней кинематической метрики из [43]. Метризованные порядки на локально компактных группах реализованы в виде предела метризованных порядков на группах Ли. Антиметрики на группах Ли включают в себя левоинвариантные (суб)лоренцевы метрики.

Тематика семинара по хроногеометрии включала в себя и характеризации изометрий специальных метрических пространств.

А.В. Кузьминых доказал в [45], что отображение $f : (M, \rho) \to (M, \rho)$, где (M, ρ) евклидово пространство размерности ≥ 2 или пространство Лобачевского, — изометрия, если оно сохраняет расстояние 1, т.е. если $x, y \in M$ и $\rho(x, y) = 1$, то $\rho(f(x), f(y)) = 1$.

Я доказал в [46], что каждая биекция f односвязного локально компактного полного пространства с внутренней метрикой кривизны $\leq K < 0$ по Александрову, сферы которого линейно связны, является изометрией, если f и f^{-1} отображают каждый замкнутый шар фиксированного радиуса $r > 0$ на замкнутый шар радиуса r.

В статье [47] П.Д.Андреев доказал, что ответ на поставленный в [46] вопрос, верно ли то же утверждение для $K = 0$, положительный.

48. *Берестовский В. Н.* Об одной задаче В.А.Топоногова. Мат. труды. **13:1**, 15-22 (2010).

49.*Берестовский, В. Н., Зубарева И. А.* Функции с (не)временноподобным градиентом на пространстве-времени. Мат. труды. **17:2**, 41-60 (2014).

50. *Geroch, R. P.* Domain of dependence. J. Mathematical Phys. **11**, 437 (1970).

51. *Bernal, A. N., Sánches M.* On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem. Commun. Math. Phys. **243**, 461–470 (2003).

В начале 1970-х гг. В.А.Топоногов предложил следующую интересную

Задача 1. В замкнутой верхней полуплоскости декартовой плоскости (x, y) определена непрерывно дифференцируемая вещественная функция f такая, что $f(x, 0) \equiv 0$ и всюду $|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq |\frac{\partial f}{\partial x}|$. Доказать, что $f \equiv 0$ всюду.

Первое положительное решение этой задачи было получено в [48]. Я сформулирую здесь только последний общий результат, из которого следуют все более ранние.

Определение 1.

Пространство-время (M, g) есть связное хаусдорфово C^∞-гладкое лоренцево многообразие размерности ≥ 2 и сигнатуры $(+, +, \ldots, -)$ со счетной базой топологии τ и временной ориентацией X, т.е. (глобальным) гладким, незануляющимся временно-подобным векторным полем. Каждый непространственно-подобный вектор $v \in T_p M$, $p \in M$, *направлен в будущее* или *направлен в прошлое*, что означает $g(X(p), v) < 0$ (соответственно, $g(X(p), v) > 0$).

Определение 2.

Причинное будущее $J^{+}(L)$ (соответственно, *причинное прошлое* $J^{-}(L)$) подмножества L в (M, g) есть множество всех точек $q \in M$, для которых существует непрерывная кусочно дифференцируемая кривая $c = c(t)$, $t \in [a, b]$, с направленными в будущее (соответственно, в прошлое) непространственно-подобными касательными векторами такая, что $c(a) \in L$, $c(b) = q$. Будем называть коротко кривые обоих таких типов *непространственно-подобными кривыми*. Таким же образом определяется *хронологическое будущее* $I^{+}(L)$ (соответственно, *хронологическое прошлое* $I^{-}(L)$) при дополнительном условии, что касательные векторы кривой c временно-подобны.

Определение 3.

Пространство-время называется *глобально гиперболическим*, если

1) Множества $I^{+}(p) \cap I^{-}(q)$, $p, q \in M$, составляют базу топологии τ;

2) все множества $J^{+}(p) \cap J^{-}(q)$, $p, q \in M$, компактны.

Определение 4.

Непространственно-подобная кривая $c = c(t)$, $t \in (a, b)$, называется *нерасширяемой*, если не существует пределов $\lim_{t\to a^+} c(t)$ и $\lim_{t\to b^-} c(t)$.

Определение 5.

Поверхность Коши в пространстве-времени (M, g) размерности $n+1$ — замкнутое n-мерное топологическое подмногообразие $S \subset M$, пересекающееся с каждой нерасширяемой непространственно-подобной кривой в (M, g) в точности в одной точке.

Если S — любая поверхность Коши в пространстве-времени (M, g), то $M = J^+(S) \cup J^-(S)$.

Теорема 2, [50].

Пространство-время глобально гиперболично тогда и только тогда, когда оно имеет некоторую поверхность Коши.

Теорема 3, [50].

Для любой поверхности Коши S в глобально гиперболическом пространстве-времени (M, g) существует гомеоморфизм $\psi : M \cong S \times \mathbb{R}$ такой, что $S_t = \psi^{-1}(S \times \{t\})$ — поверхность Коши для любого $t \in \mathbb{R}$.

Следующая теорема дает ответ на долго стоявший вопрос.

Теорема 4, [51].

Любое глобально гиперболическое простаранство-время допускает гладкую поверхность Коши S и при этом в качестве ψ в теореме 3 можно взять диффеоморфизм.

Теорема 5, [48,49].

Пусть f — непрерывно дифференцируемая вещественная функция на глобально гиперболическом пространстве-времени (M, g) с поверхностью Коши S и для каждой точки $u \in M$ существует ненулевой непространственно-подобный вектор $v \in T_uM$ такой, что $df(u)(v) = 0$. Тогда для каждой точки $u^1 \in J^+(S)$ (соответственно, $u^1 \in J^-(S)$) существует точка $u^0 \in S \cap J^-(u^1)$ (соответственно, $u^0 \in S \cap J^+(u^1)$) такая, что $f(u^1) = f(u^0)$.

Примерами глобально гиперболических пространств-времен являются пространства-времена Минковского, Эйнштейна, де Ситтера первого рода, многие модели А.А.Фридмана и пространства-времена Робертсона-Уокера. Положительный ответ на вопрос В.А.Топоногова следует из частного случая теоремы 5 для двумерного пространства-времени Минковского $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ с лоренцевой метрикой $g = dx^2 - dy^2$, временной ориентацией $X \equiv (0, 1)$ и поверхностью Коши $S = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$.

Большое спасибо за внимание !