НИУ Высшая школа экономики
Институт математики им. С.Л. Соболева
Международный математический центр в Академгородке

Дни геометрии в Новосибирске – 2021

21 – 25 сентября, 2021

Программный комитет

А.Ю. Веснин (ТГУ, Томск и НГУ, Новосибирск)

И.А. Дынников (МИ РАН, МГУ, Москва)

В.В. Пржиялковский (МИ РАН, НИУ ВШЭ, МГУ, Москва)

А.Е. Миронов (ИМ СО РАН и НГУ, Новосибирск)

И.А. Тайманов (ИМ СО РАН и НГУ, Новосибирск)

Организационный комитет

В.П. Голубятников (ИМ СО РАН и НГУ, Новосибирск)

Н.А. Даурцева (НГУ, Новосибирск)

М.С. Ерментай (НГУ, Новосибирск)

Зеркальное отображение в моделях Ландау-Гинзбурга

А.А. Басалаев

НИУ Высшая школа экономики, Москва
abasalaev@hse.ru

Моделью Ландау-Гинзбурга называется пара (f, G), где f - многочлен, задающий изолированную особенность, а G - некоторая его группа симметрий. Первым шагом для доказательства гипотезы зеркальной симметрии является установление зеркального отображения - изоморфизма двух векторных пространств моделей А и Б зеркальной симметрии. В докладе будет предложен такой изоморзифм для случаев G - как абелевой, так и неабелевой.

Общее невырожденное решение одной системы функциональных уравнений

Р.А. Богданова, Г.Г. Михайличенко

ГАГУ, Горно-Алтайск
bog-rada@yandex.ru; mikhailichenko@gasu.ru

Системы двух функциональных уравнений с несколькими неизвестными функциями от нескольких переменных естественно появляются при установлении вложения двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств (ДФС ГДМ). Вложение оказывается возможным, если соответствующая ему система функциональных уравнений имеет хотя бы одно невырожденное решение. Известна полная классификация ДФС ГДМ ранга $(n + 1, 2)$, где $n \geq 1$. Установление всех возможных последовательных по рангу их вложений предполагает рассмотрение 23 систем функциональных уравнений. В настоящей работе предлагается рассмотреть решение одной из таких систем функциональных уравнений.

О некоторых геметрических задачах и результатах, связанных с кафедрой геометрии и топологии НГУ

В.Н. Берестовский

ИМ СО РАН, Новосибирск
vberestov@inbox.ru

Будет кратко рассказано о некоторых геометрических задачах и результатах, обсуждавшихся на заседаниях и семинарах кафедры геометрии и топологии НГУ в мои студенческие и аспирантские годы. В их числе теорема Клингенберга о сфере, теорема Шарафутдинова о душе, проблема Чигера-Громола, теорема Александрова-Топоногова и ее обобщения, пространства Александрова двусторонне и односторонне ограниченной кривизны, некоторые проблемы хроногеометрии. Более поздние задачи и результататы: о локально компактных однородных пространствах с внутренней метрикой, задача Топоногова для студентов НГУ 1970-х гг. и пр.

Hyperelliptic sigma functions and polynomial dynamical systems

Е.Ю. Бунькова

МИ РАН, Москва
eybunkova@gmail.com

In [1], for each $g > 0$, a system of $2g$ multidimensional heat equations in a nonholonomic frame was constructed. The sigma function of the universal hyperelliptic curve of genus g is a solution of this system. In the talk we present explicit expressions for the Schrödinger operators that define the equations of the system considered. These expressions were published in [2].

This result has numerous interesting applications. They were explored in [3].

In the problem of constructing the series expansion for the genus g hyperelliptic sigma function, it allows to obtain the necessary initial conditions for this expansion. Namely, we show that the condition that the initial condition of the system considered is polynomial determines the solution of the system up to a constant factor.

We give an explicit description of the connection of such solutions to well-known Burchnall–Chaundy polynomials and Adler–Moser polynomials. For each g we find a system of linear second-order differential equations that determines the corresponding Adler–Moser polynomial.

These systems are closely related to a Lie subalgebra of the Witt algebra, where the generators are the second-order differential operators A_{2k} for $k = 0, 1, 2, \ldots$, where

$$A_{2k} = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k} \partial_{2s-1}\partial_{2k+1-2s} - \sum_{s=1}^{\infty}(2s-1)z_{2s-1}\partial_{2s+2k-1}.$$

In the problem finding the Lie algebra of derivations of the field of genus g hyperelliptic functions these results allow to obtain the explicit expressions for some of the generators of this Lie algebra for any genus g. A construction given in [4] allows to obtain the corresponding polynomial vector fields that lead to graded homogeneous polynomial dynamical systems in the complex $3g$-dimensional space. One of these polynomial dynamical systems

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} x_{i,j} = x_{i+1,j}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 3, \ldots, 2g-1,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} x_{3,j} = 4(2x_{1,1}x_{2,j} + x_{2,1}x_{1,j} + x_{2,j+2}), \quad j = 1, 3, \ldots, 2g-1,$$

where $x_{2,2g+1} = 0$, in the rational limit $\lambda = 0$ gives the Korteweg–de Vries equation

$$4\partial_3 \widehat{\wp} = \partial_1(\partial_1^2 \widehat{\wp} - 6\widehat{\wp}^2)$$

for the function $\widehat{\wp} = -\partial_1\partial_1 \ln \widehat{\sigma}$, where $\widehat{\sigma}$ is the rational limit of the genus g hyperelliptic sigma function.

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, D. V. Leykin, *Heat Equations in a Nonholomic Frame*, Funct. Anal. Appl., 38:2 (2004), 88–101.

[2] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, *Sigma functions and Lie algebras of Schrödinger operators*, Functional Analysis and Its Applications, 2020, 54:4, 229–240, arXiv:2007.08966

[3] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, *Hyperelliptic Sigma functions and Adler–Moser polynomials*, Functional Analysis and Its Applications, 55:3 (2021), 3–25, arXiv:2106.10896

[4] E. Yu. Bunkova, *Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions*, European Journal of Mathematics, 4:1 (2018), 93–112, arXiv:1703.03947

О гомотопических косах

В.В. Вершинин

Университет Монпелье, Франция; ИМ СО РАН, Новосибирск

Две геометрические косы называются гомотопическими, если одну можно деформировать в другую гомотопией кос с фиксированными начальными и конечными точками, так что разные нити не пересекаются. Доказана линейность таких кос над целыми числами.

Новые инварианты виртуальных узлов

А.Ю. Веснин

ТГУ, Томск и НГУ, Новосибирск
vesnin@math.nsc.ru

В 2013 г. Кауффман [J. Knot Theory, 2013] определил аффинный индексный полином для ориентируемых виртуальных узлов, использующий расстановку весов на дугах диаграммы узла. Позднее, Веснин, Каур и Прабхакар [J. Knot Theory, 2018], используя преобразование сглаживания в классических перекрестках, построили два более сильных семейства инвариантов, L-полиномы и F-полиномы, зависящие от двух переменных. Новые инварианты совпадают с аффинным индексным полиномом на классических узлах или при обращении одной из переменных в единицу. Для табулированных виртуальных узлов F-полиномы были вычислены в работах Веснина и Иванова [J. Knot Theory, 2020; Siberian Math. J., 2020]. В докладе мы обсудим конструкцию F-полиномов, их свойства, приложение к проблеме косметической смены перекрестков и для распознавания узла и его мутанта.

О группах бимероморфных автоморфизмов компактных кэлеровых многообразий размерности 3

А.С. Голота

НИУ ВШЭ, Москва
agolota@hse.ru

Говорят, что группа G обладает свойством Жордана, если существует такое натуральное число N, что любая конечная подгруппа в G содержит нормальную абелеву подгруппу индекса не более N. Я расскажу о том, как доказывать свойство Жордана для группы бимероморфных отображений $X \dashrightarrow X$, где X — компактное кэлерово многообразие размерности 3, не являющееся унилинейчатым.

Препятствия к существованию расширений Пикара–Вессио в дифференциальной теории Галуа

С.О. Горчинский

Математический институт им. Стеклова РАН, Москва
gorchins@mi-ras.ru

Дифференциальная теория Галуа исследует симметрии пространств решений систем линейных дифференциальных уравнений над абстрактным полем с выбранными дифференцированиями. Ключевым понятием в данной теории являются так называемые расширения Пикара–Вессио — аналог расширений Галуа для многочленов. Оказывается, что, в отличие от обычной теории Галуа, расширения Пикара–Вессио существуют не для всех систем линейных дифференциальных уравнений. Первый пример этого явления был построен А. Зайденбергом в 50-х годах при помощи явных вычислений. В докладе будет рассказано о том, как концептуально строить серии таких примеров при помощи нового алгебро-геометрического подхода к данным вопросам.

Решето Новикова

И.А. Дынников

Математический институт им. Стеклова РАН, Москва
dynnikov@mech.math.msu.su

Доклад основан на совместной работе с П.Мерка, О.Парис-Ромаскевич, А.Скрипченко и П.Юбером. Решето Новикова - это фрактальное подмножество октаэдра, которое параметризует несколько семейств связанных друг с другом динамических систем. В частности, с его помощью можно описывать множество хаотических режимов в задаче Новикова о плоских сечениях 3-периодических поверхностей в случае рода три при наличии центральной симметрии. (В связи с этим и было выбрано название для фрактала.) Оно также параметризует некоторые тайлинговые бильярды и перекладывания с переворотами, выделяя среди них те, что обладают условием минимальности. Основной наш результат состоит в том, что это множество действительно фрактальное, то есть имеет хаусдорфову размерность строго меньше трех и, соответственно, нулевую лебегову меру.

Оценка высших производных гладкой функции через геометрию и топологию её множества нулей

И.Н. Иомдин

Институт науки Вейцмана, Реховот, Израиль

Неравенство жёсткости порядка d для гладкой функции f – это нижняя граница для производных f порядка $d+1$, которая выполняется, если f демонстрирует поведение, запрещённое для полиномов степени d. Планируется обсудить некоторые результаты в этом направлении, которые используют как инпут «плотность» множества Z нулей функции f, или его топологию. В частности, как неравенства жёсткости итрерпретируются некоторые новые результаты Lerario and Stecconi, сравнивающие топологию гладких трансверсальных особенностей и их полиномиальных приближений.

Группа сингулярных крашеных кос

Т.А. Козловская

ТГУ, Томск
konus_magadan@mail.ru

В данной работе найдена конечная система порождающих и соотношений группы сингулярных крашеных кос. Отсюда получено разложение сингулярных крашеных кос на трех нитях в виде полупрямого произведения и HNN - расширение известных групп. Также доказано, что в группе сингулярных крашеных кос на трех нитях центр выделяется прямым множителем.

Постороены локальные однородные линейные представления группы сингулярных кос.

Квантование по Березину-Теплицу на некомпактных симплектических многообразиях

Ю.А. Кордюков

ИМВЦ УФИЦ РАН, Уфа
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
yurikor@matem.anrb.ru

Доклад посвящен квантованиям по Березину-Теплицу симплектических многообразий, для которых пространствами квантования являются собственные подпространства лапласианов Бохнера, ассоциированных с большими тензорными степенями предквантового линейного расслоения. Мы опишем конструкцию таких квантований для широкого класса некомпактных симплектических многообразий.

О локальном расширении группы параллельных переносов трёхмерного пространства

В.А. Кыров

ГАГУ, Горно-Алтайск
kyrovVA@yandex.ru

Под расширением транзитивной группы Ли G понимается группа Ли G_1, содержащая G в виде подгруппы Ли и тоже транзитивная на M, причем ограничение этого транзитивного действия на G дает исходное транзитивное действие группы Ли G. Решается задача о нахождении всех локально дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов трёхмерного пространства. Эта задача сводится к вычислению алгебр Ли локально дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов. Базисные операторы таких алгебр Ли находятся из решений особых систем трёх дифференциальных уравнений.

Инверсная полугруппа метрик на дубле метрического пространства

В.М. Мануйлов

МГУ, Москва
manuilov@mech.math.msu.su

Для неограниченного метрического пространства X рассматриваются классы квази-эквивалентности (грубой эквивалентности) метрик на двух экземплярах X, совпадающие с заданной метрикой на каждом из этих экземплярах. По отношению к естественной композиции это множество оказывается инверсной полугруппой. Будут описаны некоторые связи между геометрическими свойствами X и алгебраическими свойствами этой инверсной полугруппы.

Косые брэйсы и решения уравнения Янга-Бакстера

Т.Р. Насыбулов

ИМ СО РАН, Новосибирск
t.nasybullov@g.nsu.ru

Брэйсом называется алгебраическая система с двумя групповыми операциями (сложение и умножение), связанными между собой одним специальным соотношением. Брэйсы были построены В. Румпом как мощный инструмент для конструирования решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера. Румп установил, что любое инволютивное решение теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера может быть построено с помощью некоторого брэйса. Так алгебраические свойства брэйсов играют важную роль при изучении свойств решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера.

В рамках доклада мы обсудим ряд недавних результатов об аддитивных и мультипликативных группах брэйсов и их связях между собой. Часть результатов закрывают открытые вопросы, сформулированные А. Смоктунович и Л. Вендрамином. Помимо этого, мы обсудим приложения брэйсов для построения решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера, построения представлений групп (виртуальных) кос и построения инвариантов (виртуальных) узлов.

Об одном уравнении Эйнштейна полусимметрических связностей трехмерных метрических групп Ли

А.А. Павлова, О.П. Хромова

АГУ, Барнаул
anya.0596@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивита. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в [1], и называется полусимметрической связностью или связностью с векторным кручением (с точностью до направления) [2, 3]. Тензор Риччи таких связностей, вообще говоря, не является симметрическим, поэтому имеет место следующее определение.

(Псевдо)риманово многообразие (M, g) с полусимметрической связностью ∇ называется эйнштейновым, если тензор r_{ij} удовлетворяет одному из следующих уравнений [4, 5]:

Type $\mathcal{A}$	Type $\mathcal{B}$	Type $\mathcal{C}$	Type $\mathcal{D}$
$r_{ij} = \Lambda g_{ij}$	$r_{ij} = \Lambda(x) g_{ij}$	$r_{(ij)} = \Lambda g_{ij}$	$r_{(ij)} = \Lambda(x) g_{ij}$

,

где $r_{(ij)}$ — симметрическая часть тензора Риччи, Λ — константа, $\Lambda(x)$ — функция на многообразии.

В работе исследованы уравнения Эйнштейна типа $\mathcal{C}$ на трехмерных группах Ли с левоинваринтной римановой метрикой. Отметим, что уравнения Эйнштейна типа $\mathcal{A}$ в случае трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий изучались в [6, 7].

Список литературы

[1] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie)* // Ann. Ecole Norm. Sup., **42**, 17–88 (1925).

[2] K. Yano, *On semi-symmetric metric connection* // Revue Roumame de Math. Pure et Appliquees., **15**, 1579–1586 (1970).

[3] I. Agricola, M. Kraus, *Manifolds with vectorial torsion* // Differential Geometry and its Applications, **46**,130–147 (2016).

[4] Y.B. Maralbhavi, G. Muniraja, *Semi-Symmetric Metric Connections, Einstein Manifolds and Projective Curvature Tensor* // Int. J. Contemp. Math. Sciences, **5(20)**, 991–999 (2010).

[5] D.S. Klemm, L. Ravera, *Einstein manifolds with torsion and nonmetricity* // Phys. Rev. D., **101(4)**, (2020).

[6] P. Klepikov, E. Rodionov, O. Khromova, *Einstein's equation on three-dimensional metric Lie groups with vector torsion* // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **181**, 41—53 (2020)

[7] P. Klepikov, E. Rodionov, O. Khromova, *Einstein equation on 3-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds with vectorial torsion* //Mathematical notes of NEFU, **26(4)**, 25–36, (2020).

Комбинаторные геометрические потоки на двумерных поверхностях

Ф.Ю. Попеленский

МГУ, Москва
popelens@mech.math.msu.su

В 1980-х Р.Гамильтон и Б.Чоу доказали, что на двумерной замкнутой поверхности поток Риччи

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}, \text{он же } \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -Kg_{ij}$$

сходится для любого начального условия к метрике постоянной кривизны.

Поиск адекватной дискретизации двумерного потока Риччи оказался нетривиальной задачей. «Наивная» версия дискретного потока Риччи могла бы быть, например, такой. Пусть M — двумерная замкнутая поверхность с зафиксированной триангуляцией. Перенумеруем вершины. Длину ребра, соединяющего вершины с номерами i и j, обозначим ℓ_{ij}, и пусть K_i — кривизна в i-й вершине. «Наивная» версия дискретного потока Риччи — это система дифференциальных уравнений на длины ребер триангуляции

$$\frac{d\ell_{ij}}{dt} = -(K_i + K_j)\ell_{ij}.$$

К сожалению, для такого потока теорема сходимости к метрике постоянной кривизны для любых начальных условий неверна.

Адекватную дискретизацию потока Риччи для двумерного случая нашли Б.Чоу и Ф.Луо в начале 2000-х. В качестве метрик на поверхности они рассматривали так называемые метрики упаковок кругов (circle packing metric).

Мы расскажем о результатах Чуо и Луо, а наших продвижения в этом направлении, в том числе и о потоках Риччи для метрик упаковок кругов с вырождениями, кроме того, мы обсудим свойства «наивного» потока Риччи, а также его связь с комбинаторным потоком Ямабе.

Введение в модифицированные теории гравитации

А.А. Попов

КФУ, Казань
arkady_popov@mail.ru

Известные проблемы описания геометрии нашего пространства при больших кривизнах (например, на ранних этапах эволюции Вселенной) рассматриваются в рамках различных модифицированных теорий гравитации. Кроме того, рассматриваются некоторые следствия возможного существования дополнительных компактных измерений с характерным масштабом не позволяющим их обнаружить в настоящее время. Дается обзор решений, описывающих эволюцию максимально симметричных подпространств в рамках модифицированных многомерных теорий гравитации.

Компактификации лог-Калаби–Яу моделей Ландау–Гинзбурга и связанные с ними гипотезы

В.В. Пржиялковский

Математический институт им. Стеклова РАН,
НИУ Высшая школа экономики, Москва
victorprz@mi-ras.ru

Одним из самых распространенных способов построения моделей Ландау–Гинзбурга многообразий Фано является нахождение (из геометрических соображений) моделей, тотальным пространством которых является алгебраический тор, и дальнейшая их послойная компактификация. Мы обсудим, как строить такие компактификации. Также мы обсудим, какую роль в зеркальном соответствии играют слои компактификаций над бесконечностью.

The Curve Shortening Flow in the Metric-Affine Plane.

В.Ю. Ровенский

Хайфский Университет (Израиль, г. Хайфа)

We investigate the curve shortening flow in the metric-affine plane and prove that under simple geometric condition (when the curvature of initial curve dominates the torsion term) it shrinks a closed convex curve to a “round point” in finite time. This generalizes the classical result by M. Gage and R.S. Hamilton about convex curves in a Euclidean plane.

References:

[1] Chou, K.-S.; Zhu, X.-P. The Curve Shortening Problem; Chapman and Hall/CRC: Boca Raton, FL, USA, 2001.

[2] Rovenski V., The Curve Shortening Flow in the Metric-Affine Plane. Mathematics 2020, 8(5), 701; https://doi.org/10.3390/math8050701

Шашки Фейнмана: квантовая теория поля на клетчатой доске

М.Б. Скопенков

МГУ, Москва
mikhail.skopenkov@gmail.com

(По совместной работе с А.Устиновым)

Мы рассмотрим наиболее элементарную модель движения электрона, предложенную Р. Фейнманом. Это игра, в которой по клетчатой доске по простым правилам движется шашка, а мы следим за ее поворотами. "Шашки Фейнмана"также известны как одномерное квантовое блуждание или модель Изинга при мнимой температуре.

Мы впервые математически доказываем, что в непрерывном пределе эта модель воспроизводит так называемый запаздывающий пропагатор, описывающий движение электрона по прямой в квантовой механике. Это подтверждает эвристическое рассуждение, полученное Дж. Нарликаром в 1972.

Также мы обобщаем модель так, чтобы в непрерывном пределе она воспроизводила уже пропагатор Фейнмана из квантовой теории поля, учитывающий процессы рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар. Это обобщение основано на идеях дискретного комплексного анализа.

Доклад рассчитан на широкую аудиторию, никаких предварительных знаний по физике не предполагается.

Liouville fields, Weinstein structures and Eliashberg conjectures

Н.А. Тюрин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна,
НИУ Высшая школа экономики, Москва
ntyurin@theor.jinr.ru

During the work on Special Bohr - Sommerfeld geometry (SBS for short) we established certain relations with the subject presented in the title of the talk. Namely every smooth section of the prequantization bundle defines a Liouville vector field on the complement to the zero locus of it; if the section is sufficiently regular (f.e. pseudo holomorphic with respect to a compatible almost complex structure) it defines a Weinstein structure, and the corresponding Weinstein skeleton contains must contain a special Bohr - Sommmerfeld submanifold (in particular if the skeleton does not have smooth components then no SBS submanifolds exist); and the notion of exact and regular lagrangian submanifold from the terminology of the Eliashberg conjectures have direct translation to the SBS language. Therefore some ideas from SBS geometry can be exploited in the work on these important and interesting conjectures. Namely for a Liouville field we can derive a domain in the moduli space of Bohr - Sommerfeld lagrangian submanifolds conists of exact lagrangian submanifolds, define a special norm for the restriction of the field on each point of this domain and show that this norm admits as critical points only global minima.

О гипотезе Л.Цербо для однородных (псевдо)римановых многообразий малой размерности

П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова

АГУ, Барнаул
klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Метрика g полного (псевдо)риманова многообразия (M, g) называется солитоном Риччи, если она удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda g + L_P g, \quad (1)$$

где r — тензор Риччи метрики g, $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P, константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная (псевдо)риманова метрика, удовлетворяющая (1), называется однородным солитоном Риччи, а если $M = G$ — группа Ли, и поле P левоинвариантное, то g называется инвариантным солитоном Риччи. Более того, инвариантный солитон Риччи называется тривиальным, если $L_P g(Y, Z) = \tau \cdot g(Y, Z)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$ и произвольных векторных полей $Y, Z \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G.

Солитоны Риччи являются решением потока Риччи и представляют собой естественное обобщение метрик Эйнштейна. Более подробно этот вопрос изучался в случае тривиальных солитонов Риччи или метрик Эйнштейна, а также в однородном римановом случае и в случае малой размерности[1, 2, 3]. Так Л. Цербо доказал, что на унимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны[4]. В неунимодулярном случае аналогичный результат до размерности четыре был получен П.Н. Клепиков и Д.Н. Оскорбин [5]. В данной работе исследуются полусимметрические связности на трехмерных группах Ли с метрикой инвариантного солитона Риччи, т.е. метрические связности вида $\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X$, где V — некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле, X и Y — произвольные левоинвариантные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Получена классификация этих связностей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой солитона Риччи. Доказано, что

Теорема. *Пусть (G, g, ∇) — трехмерная группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и полусимметричной связностью ∇, отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли есть группы и полусимметрические связности на них, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи.*

Тем самым дан ответ на гипотезу Л. Цербо об инвариантных солитонах Риччи на трехмерных метрических группах Ли в классе нетривиальных полусимметрических связностей.

Список литературы

[1] А.Бессе. *Многообразия Эйнштейна*, Мир, 1990.

[2] H.-D. Cao, *Recent progress on Ricci solitons* //Advanced Lectures in Mathematics, **11**, 1–38 (2010).

[3] R.M. Arroyo, R. Lafuente, *Homogeneous Ricci solitons in low dimensions* // Int. Math. Res. Notices., **13**, 4901–4932 (2014).

[4] L.F. Cerbo, *Generic properties of homogeneous Ricci solitons* //Adv. Geom, **2(14)**, 225–237 (2014).

[5] П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин, *Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли* //Известия Алтайского государственного университета, **1/2(85)**, 115–122 (2015).

Преобразование Бианки псевдосферы

М.А. Чешкова

АГУ, Барнаул
cma41@yandex.ru

Рассмотрим две гладкие поверхности M, $\bar{M}$ и диффеоморфизм $f: M \to \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя постоянный двугранный угол θ, причем вектор $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p — орт, $\rho = const$.

Теорема Беклунда утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2} sin(\theta)^2$, то и поверхность $\bar{M}$ имеет ту же кривизну.

Если угол θ прямой, то преобразование Беклунда называется преобразованием Бианки.

Обозначим через n – орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$, а через $\bar{n}$ – орт нормали к поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p) \in \bar{M}$.

Имеем

(1)
$$\bar{n} = sin(\theta)[V, n] + cos(\theta)n.$$

Пусть поверхность M, заданая радиус-вектором $r = r(u^1, u^2)$, отнесена к линиям кривизны.

Обозначим через $R(u^1, u^2)$ – радиус-вектор поверхности $\bar{M}$ и рассмотрим отображение $f: M \to \bar{M}$

$R(u^1, u^2) = r(u^1, u^2) - \rho V, R_i = \alpha_i V + \beta_i [V, n] + \gamma_i n, \alpha_i =< r_i, V >, \gamma_i = -\rho b_{ii} V^i, \beta_i = -ctg(\theta)\gamma_i, b_{ij}$ - вторая квадратичная форма.

Теорема. *Преобразование Беклунда определяется системой*

(2)
$$\rho\nabla_1 V^1 = \rho(\partial_{u^1} V^1 + \Gamma^1_{1s} V^s) = 1 - g_{11}(V^1)^2 - \rho ctg(\theta) b_{11} V^1 \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} V^2,$$
$$\rho\nabla_1 V^2 = \rho(\partial_{u^1} V^2 + \Gamma^2_{1s} V^s) = -g_{11} V^1 V^2 - \rho ctg(\theta) b_{11} V^1 (-\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} V^1),$$
$$\rho\nabla_2 V^1 = \rho(\partial_{u^2} V^1 + \Gamma^1_{2s} V^s) = -g_{22} V^1 V^2 - \rho ctg(\theta) b_{22} V^2 \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} V^2$$
$$\rho\nabla_2 V^2 = \rho(\partial_{u^2} V^2 + \Gamma^2_{2s} V^s) = 1 - g_{22}(V^2)^2 - \rho ctg(\theta) b_{22} V^2 (-\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} V^1),$$
$$g_{11}(V^1)^2 + g_{22}(V^2)^2 = 1,$$

Рассмотрим преобразование Бианки псевдосферы.

Обозначим через $k = (0, 0, 1)$ – орт оси, а через $e = (cos(v), sin(v), 0)$ – радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси.

Тогда поверхность вращения M можно задать в виде

(3)
$$r = ue(v) + f(u)k,$$

где $f = f(u)$ – дифференцируемая функция, $u = u^1, v = u^2$ – параметры.

Для псевдосферы [1, с. 100]

$$f(u) = \int \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}} du. \tag{4}$$

Формулы (2) ($\rho = 1, \theta = \pi/2$) примут вид

$$\begin{gathered}
\partial_u V^1 - \frac{1}{u} V^1 = 1 - \frac{1}{u^2}(V^1)^2 \,(1),\ \partial_v V^1 - u^3 V^2 = -u^2 V^1 V^2 \,(2), \\
\partial_u V^2 + \frac{1}{u} V^2 = -\frac{1}{u^2} V^1 V^2 \,(3), \partial_v V^2 + \frac{1}{u} V^1 = 1 - u^2 (V^2)^2 \,(4), \\
\frac{1}{u^2}(V^1)^2 + u^2 (V^2)^2 = 1 \,(5).
\end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим равенства (1), (2), (5) системы (5). Используя математический пакет получим решение

$$V^1 = u \frac{u^2(v+c_1)^2 - 1}{u^2(v+c_1)^2 + 1},\ V^2 = \frac{2(v+c_1)}{u^2(v+c_1)^2+1},\ c_1 = const. \tag{6}$$

В формуле (5) равенства (3),(4), в силу (6), выполняются.

Имеем

$$R = (u - V^1) e(v) - V^2 u e'(v) + (f(u) - V^1 \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}) k. \tag{7}$$

Положим $u = sin(t)$, $c_1 = 0$. Тогда

$$f(t) = \int \frac{cos(t)^2}{sin(t)} dt = cos(t) + ln(tg(\frac{t}{2})), \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
x = \frac{2sin(t)}{v^2 sin(t)^2 + 1}(cos(v) + vsin(v)), \\
y = \frac{2sin(t)}{v^2 sin(t)^2 + 1}(sin(v) - vcos(v)), \\
z = \frac{2cos(t)}{v^2 sin(t)^2 + 1} + ln(tg(\frac{t}{2})).
\end{gathered} \tag{9}$$

Система уравнений (9) определяет поверхность Куэна [2, стр. 345].

Построим эту поверхность для $t \in [\pi/18, \pi - \pi/18], v \in [2\pi, 5\pi]$ (рис. 1).

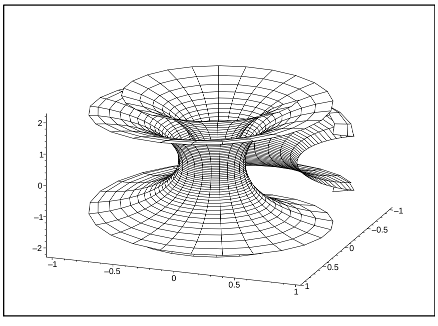

Рис. 1. Поверхность Куэна $\bar{M}, c_1 = 0$

Список литературы

[1] Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Т. 2, М. ГИНТЛ, 1947.

[2] С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов, С.М. Халаби. “Аналитические поверхности “. М.2006.

Automorphisms of algebraic surfaces

К.А. Шрамов

МИ РАН и НИУ ВШЭ, Москва
costya.shramov@gmail.com

I will discuss boundedness properties for finite subgroups in the groups of (birational) automorphisms of algebraic surfaces over fields of positive characteristic.