

Обобщения теоремы Хопфа и задача о восхождении на гору

А.В. Малютин, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург

Теорема Борсука-Улама гласит, что всякое непрерывное отображение, отправляющее n -мерную евклидову сферу в n -мерное евклидово пространство, принимает одинаковое значение в точках из некоторой антиподальной пары. Например, в любой момент времени на поверхности Земли найдутся антиподальные точки с равной температурой и равным давлением. Обобщающая теорему Борсука-Улама теорема Хопфа утверждает, что для любого положительного d всякое непрерывное отображение f , отправляющее замкнутое n -мерное риманово многообразие M в n -мерное евклидово пространство, принимает одинаковое значение в концевых точках некоторой геодезической длины d в M . Теорема о восхождении на гору утверждает, что для любого кусочно линейного сюръективного отображения $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, такого что $f(0)=f(1)=0$, точки $(0,1)$ и $(1,0)$ находятся в одной и той же компоненте линейной связности множества $\{(a,b) \in [0,1] \times [0,1] : f(a)=f(b)\}$. Мы обобщаем эти теоремы и доказываем, в частности, что для всякого непрерывного отображения f , отправляющего замкнутое n -мерное риманово многообразие M в n -мерное евклидово пространство, связная компонента множества $\{(a,b) \in M \times M : f(a)=f(b)\}$, содержащая диагональ, содержит точку (x,y) такую, что расстояние между x и y в метрике многообразия M не меньше радиуса инъективности. Отсюда следует, к примеру, что в любой момент времени на поверхности Земли найдутся такие антиподальные точки с равной температурой и равным давлением, что два путешественника, стартуя из этих точек, при неизменной погоде смогут прийти в одну точку на поверхности Земли таким образом, чтобы в процессе путешествия в каждый момент находиться в точках со сколь угодно мало отличающейся температурой и сколь угодно мало отличающимся давлением. Совместное исследование с Ильей Широковым.