Устойчивость классов решений дифференциальных уравнений с квазивыпуклой функцией и нуль-лагранжианом

Егоров А. А. (yegorov@math.nsc.ru, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН и Новосибирский государственный университет)

Орлова Н. С. (aknatorl@gmail.com, Новосибирский государственный университет)

В данной работе изучаются свойства устойчивости классов решений $u \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$, $V \subset \mathbb{R}^n$, диффереациальных уравнений $F(u'(x)) = G(u'(x))$, строящихся с помощью квазивыпуклых функций $F\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ и нуль-лагранжианов $G\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, где равенство выполняется для п. в. $x \in V$.

Здесь $k, m, n \in \mathbb{N}$, $2 \le k \le \min\{m,n\}$; $u' = \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right)$ — матрица Якоби отображения $u = (u_1, \dots, u_m)\colon V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $\mathbb{R}^{m\times n}$ — пространство вещественных $m \times n$-матриц.

Непрерывная функция $F\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ является *квазивыпуклой* в смысле Ч. Б. Морри, если $\int\limits_{B(0,1)} F(\zeta + \varphi'(x))\,dx \ge |B(0,1)|F(\zeta)$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1);\mathbb{R}^m)$, $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Функция $G\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — *нуль-лагранжиан*, если функции G и $-G$ квазивыпуклые. Только аффинные комбинации миноров, называемые *квазиаффинными* функциями, являются нуль-лагранжианами.

В обсуждаемых результатах функции F и G удовлетворяют следующим условиям:

(H1) F является *строго k-квазивыпуклой* в смысле М. А. Сычева, т. е. F — квазивыпуклая функция такая, что для каждой матрицы $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и чисел $\varepsilon, C > 0$ существует число $\delta = \delta_{\zeta,\varepsilon,C} > 0$ такое, что для каждого отображения $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1);\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющего неравенству $\|\varphi'\|_{L^k(B(0,1);\mathbb{R}^{m\times n})} \le C|B(0,1)|^{1/k}$, условие

$$\int\limits_{B(0,1)} F(\zeta + \varphi'(x))\,dx \le |B(0,1)|(F(\zeta) + \delta)$$

влечет соотношение $|\{x \in B(0,1) : |\varphi'(x)| \ge \varepsilon\}| \le \varepsilon|B(0,1)|$;

(H2) G — нуль-лагранжиан;

(H3) F и G — положительно k-однородные функции;

(H4) $F(\zeta) \ge G(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$, и, более того, $\sup\{K \ge 0 : F(\zeta) \ge KG(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}\} = 1$;

(H5) $c_F := \inf\{F(\zeta) : \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}, |\zeta| = 1\} > 0$;

(H6) $d_G := \sup\Big\{ \sum\limits_{J \in \Gamma^k_m, I \in \Gamma^k_n} |\gamma_{JI}||x_I|^2 : x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1\Big\} < kc_F/(n-k)$ в случае $k < n$.

Здесь $\Gamma^k_l := \{I = (i_1, \dots, i_k) : 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le l,\ i_\varkappa \in \{1, \dots, l\},\ \varkappa = 1, \dots, k\}$, $l = n, m$; $x_I := (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$; и $\gamma_{JI} \in \mathbb{R}$ — коэффициенты из представления нуль-лагранжиана G в виде линейной комбинации миноров. В силу k-однородности функции G это представление состоит только из $k \times k$-миноров, т. е.

$$G(\zeta) = \sum_{J \in \Gamma^k_m, I \in \Gamma^k_n} \gamma_{JI} \det\nolimits_{JI} \zeta,$$

где $\det_{JI} \zeta := \det \begin{pmatrix} \zeta_{j_1 i_1} & \cdots & \zeta_{j_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{j_k i_1} & \cdots & \zeta_{j_k i_k} \end{pmatrix}$ — $k \times k$-минор для $m \times n$-матрицы $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta_{m1} & \cdots & \zeta_{mn} \end{pmatrix}$, $J = (j_1, \dots, j_k) \in \Gamma^k_m$, $I = (i_1, \dots, i_k) \in \Gamma^k_n$.

Получены следующие теоремы.

Теорема 1 (А. А. Егоров [2]). *Пусть функции F и G удовлетворяют предположениям* (H1)–(H6). *И пусть V — область в $\mathbb{R}^n$, U — компактное подмножество в V, $1 \le K < K_0 = K_0(V,U,F,G)$. Тогда для каждого отображения $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$ с некоторым $p > q = q(F,G,K)$ $(1 < q < k)$, для которого неравенство*

$$F(v'(x)) \le KG(v'(x))$$

выполняется для п. в. $x \in V$, существует отображение $u \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющее $F(u'(x)) = G(u'(x))$ п. в. в V и такое, что

$$\|v-u\|_{C(U;\mathbb{R}^m)} \le \alpha(K)\,\mathrm{diam}\,v(V)$$

и

$$\|v'-u'\|_{L^k(U;\mathbb{R}^{m\times n})} \le \alpha(K)\,\mathrm{diam}\,v(V),$$

где $\alpha(K) = \alpha_{V,U,F,G}(K)$ — неотрицательная функция такая, что

$$\lim_{K\to 1}\alpha(K) = \alpha(1) = 0.$$

Теорема 2 (Н. С. Орлова). *Пусть функции F и G удовлетворяют предположениям* (H1)–(H5). *И пусть V — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, U — компактное подмножество в V, $M>0$. Тогда для каждого отображения $v \in W^{1,k}(V;\mathbb{R}^m)$ с $\int\limits_V |v'(x)|^k\,dx \le M$, удовлетворяющего неравенству*

$$\int\limits_V F(v'(x))\,dx \le K\int\limits_V G(v'(x))\,dx$$

с некоторым $1 \le K < K_0 = K_0(V,U,F,G)$, найдется отображение $u \in W^{1,k}(V;\mathbb{R}^m)$, для которого $F(u'(x)) = G(u'(x))$ п. в. в V, и такое, что

$$\|v-u\|_{W^{1,k}(U;\mathbb{R}^m)} < \beta(K)M^{1/k},$$

где $\beta(K) = \beta_{V,U,F,G}(K)$ — неотрицательная функция такая, что

$$\lim_{K\to 1}\beta(K) = \beta(1) = 0.$$

Замечание 1. В теореме 2 не требуется выполнение предположения (H6).

В докладе также обсуждаются приложения полученных результатов и приводится сравнение с ранее известными теоремами устойчивости.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11–01–00819), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–13 гг. (гос. контракт 02.740.11.0457) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ–6613.2010.1).

Список литературы

[1] *Егоров А. А.* Квазивыпуклые функции и нуль-лагранжианы в проблемах устойчивости классов отображений // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. № 4. С. 796–812.

[2] *Egorov A. A.* Solutions of the differential inequality with a null Lagrangian: regularity and removability of singularities // arXiv:1005.3459, 2010.