514.7

НОВОЕ УРАВНЕНИЕ НА МЕТРИКИ КАЛАБИ–ЯУ В МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Д. В. ЕГОРОВ

Аннотация. В данной работе мы получим уравнение на метрики компактных кэлеровых многообразий в размерностях 2 и 3, решением которого будут метрики Калаби–Яу. Данное уравнение отличается от уравнения Монжа–Ампера.

Пусть M компактное кэлерово многообразие размерности n, с кэлеровой формой ω. Калаби сформулировал гипотезу (см. [1]) суть, которой в следующем: если $c_1(M) = 0$, то на M существует риманова метрика с группой голономий, содержащейся в $SU(n)$, в частности это означает, что метрика эйштейнова. Более точно гипотезу Калаби можно сформулировать следующим образом: уравнение Монжа–Ампера на вещественную функцию φ

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F \omega^n, \tag{1}$$

где F — гладкая вещественная функция на M с условием $\int_M e^F \omega^n = \int_M \omega^n$ имеет единственное решение. При этом предполагается, что $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ является вещественной положительной $(1,1)$-формой и $\int_M \varphi\, \omega^n = 0$.

Из существования решения уравнения (1), которое доказал Яу, и условия $c_1(M) = 0$ следует существование метрики Калаби–Яу [2].

В этой работе мы введем уравнение на деформацию комплексной структуры кэлерова многообразия M в размерностях $n = 2, 3$. Решениям этого уравнения, так же как и решениям уравнения (1), отвечают метрики Калаби–Яу.

Пусть Ω — голоморфная форма объема на M, т.е. Ω является замкнутой формой, и в окрестности каждой точки, в некоторой локальной комплексной системе координат $z^1, \dots, z^n$ форма Ω имеет вид $\Omega = dz^1 \wedge \dots dz^n$.

Справедлива

Теорема 0.1. *Пусть M — компактное кэлерово многообразие размерности n, и $c_1(M) = 0$. Пусть F — произвольная вещественная функция на M со следующим условием нормировки $\int_M e^F \Omega \wedge \bar{\Omega} = \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}$. Тогда при $n = 2, 3$ уравнение*

$$(\Omega + dd^s\psi) \wedge (\bar{\Omega} + dd^s\bar{\psi}) = e^F \Omega \wedge \bar{\Omega} \tag{2}$$

на комплексную n-форму ψ, где, d^s — симплектический дифференциальный оператор имеет такое решение, что $\tilde{\Omega} = \Omega + dd^s\psi$ является устойчивой примитивной формой.

Условие устойчивости формы $\tilde{\Omega}$ в формулировке теоремы означает существование комплексной структуры на M, для которой $\tilde{\Omega}$ является голоморфной формой объема [3].

Данная работа частично поддержана РФФИ (грант 09-01-00598-а) и грантами Президента России для государственной поддержки: ведущих научных школ (НШ-7256.2010.1) и молодых кандидатов (МК-842.2011.1).

Список литературы

[1] E. Calabi, On Kähler manifolds with vanishing canonical class // Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefshetz, pp. 78–89. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957

[2] S.-T. Yau, On the Ricci curvature of compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation, I, Comm. on pure and appl. math, **31** (1978), 339–411.

[3] N. Hitchin , The geometry of three-forms in six and seven dimensions, arXiv:math/0010054

Дмитрий Владимирович Егоров
Северо-Восточный федеральный университет им М. К. Аммосова,
ул. Белинского 58,
677000, Якутск, Россия
E-mail address: egorov.dima@gmail.com