Об однозначной определенности конформного типа многогранных областей со связными границами

А.П. Копылов [1]

Новосибирск

kopylov@math.nsc.ru

В развитие классической тематики об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей их внутренними метриками [1] в статьях [2]– [5] был предложен еще один подход к этой проблематике, состоящий в решении задач об однозначной определенности, так сказать, конформного типа.

Первым результатом упомянутого нового направления является теорема об однозначной определенности ограниченных выпуклых многогранных областей в n-мерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, относительными конформными модулями граничных конденсаторов. В докладе мы излагаем ряд новых результатов, относящихся к этому направлению, причем один из основных среди них — это

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(n)$ — класс всех ограниченных областей U в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию: граница $\operatorname{fr} U$ области U — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^0 без края, которое можно представить в виде объединения конечного множества попарно не перекрывающихся клеток, причем размерность каждой такой клетки равна $n-1$. Тогда каждая область $U \subset \mathcal{P}_1$, обладающая связной границей, определяется однозначно в классе $\mathcal{P}_1$ относительными конформными модулями граничных конденсаторов с точностью до возможного использования дополнительного аффинного конформного преобразования $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

Замечание 1. Предположим, что $U \subset \mathbb{R}^n$ $(U \neq \mathbb{R}^n)$ — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, граница $\operatorname{fr} U$ которой — липшицево многообразие размерности $n-1$ без края. Граничный конденсатор $F = \{F_1,\ F_2\}$ области U — это пара замкнутых подмножеств F_1 и F_2 границы $\operatorname{fr} U$ этой области (хотя бы одно из которых ограничено), не имеющих общих точек. Относительным конформным модулем $M^U(F)$ граничного конденсатора F области U называется n-модуль

$$M_n(\Gamma_{F_1,F_2,U}) = \inf_{\mathcal{R}(\Gamma_{F_1,F_2,U})} \int_{\mathbb{R}^n} [\rho(x)]^n dx \qquad (1)$$

семейства $\Gamma_{F_1,F_2,U}$ всех непрерывных путей $\gamma : [0,1] \to \operatorname{cl} U$, где $\operatorname{cl} U$ — замыкание области U, таких что $\gamma(0) \in F_1$, $\gamma(1) \in F_2$ и $\gamma(t) \in U$, если $0 < t < 1$ (в (1) $\mathcal{R}(\Gamma_{F_1,F_2,U})$ — множество всех неотрицательных измеримых по Борелю функций $\rho : \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$, где $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ \infty\}$ — двухточеч-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00531), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-6613.2010.1) и программы обмена между Российской и Польской академиями наук (2008-2010, проект "Устойчивость и регулярность решений систем дифференциальных уравнений с частными производными и связанные вопросы теории квазиконформных отображений и теории гармонических полей").

ная компактификация вещественной прямой $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, удовлетворяющих условию $\int_\gamma \rho ds \geq 1$ для каждого спрямляемого пути $\gamma \in \Gamma_{F_1,F_2,U}$).

Предположим далее, что $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(n)$ — это некоторый подкласс класса $\mathcal{L} = \mathcal{L}(n)$ всех областей в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, отличных от $\mathbb{R}^n$, граница каждой из которых является липшицевым многообразием размерности $n-1$ без края. Говорят (см. [2]– [5]), что область $U \in \mathcal{L}_0$ однозначно определяется относительными конформными модулями своих граничных конденсаторов в классе $\mathcal{L}_0$, если имеет место следующее. Предположим, что $V \in \mathcal{L}_0$ и существует гомеоморфное отображение $f : \operatorname{fr} V \to \operatorname{fr} U$ границы frV области V на границу $\operatorname{fr} U$ области U, сохраняющее относительные конформные модули граничных конденсаторов: $M^V(F) = M^U(f(F))$ $(f(F) = \{f(F_1), f(F_2)\})$ для каждого граничного конденсатора F области V. Тогда область V может быть отображена посредством конформного отображения на область U.

Замечание 2. Необходимо отметить, что теореме 1 можно придать также следующий вид.

Теорема 1′. *В случае $n \geq 4$ каждая область U пространства $\mathbb{R}^n$, принадлежащая классу $\mathcal{P}_1(n)$ и обладающая связной границей, определяется однозначно в этом классе относительными конформными емкостями своих граничных конденсаторов-колец.*

Следующая теорема представляет собой аналог теоремы 1 и характеризует граничные значения изометрических отображений на основе понятия p-модулей семейств путей.

Теоерма 2. *Пусть $n \geq 4$. Предположим, что U_1 и U_2 — ограниченные области со связными границами из класса $\mathcal{P}_1$, такие что найдутся гомеоморфное отображение $f : \operatorname{fr} U_1 \to \operatorname{fr} U_2$ границ этих областей и число $p \in \{]1, n[\cup]n, \infty[\}$ со следующими свойствами: f сохраняет как относительные n-модули, так и относительные p-модули граничных конденсаторов. Тогда существует изометрия $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию $H(U_1) = U_2$.*

В связи с отмеченными выше результатами возникает естественный вопрос о возможности распространения их на случай размерности $n = 3$. Недавно [6] была доказана следующая ниже теорема 3, распространяющая упомянутую в начале теорему об однозначной определенности ограниченных выпуклых многогранных областей в пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n > 3$, на ту ситуацию, когда $n = 3$.

Теорема 3. *Каждая ограниченная выпуклая многогранная область U в трехмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (т.е. непустое ограниченное пересечение конечного множества открытых трехмерных полупространств) однозначно определяется относительными конформными модулями своих граничных конденсаторов в классе $\mathcal{P}_2$ всех ограниченных выпуклых областей $V \subset \mathbb{R}^3$. При этом область U определяется в классе $\mathcal{P}_2$ с точностью до возможного использования дополнительного преобразования подобия $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.*

Отметим, что хотя доказательство теоремы 3 в общих чертах осуществляется по тому же плану, что и доказательство аналогичной теоремы в случае $n > 3$, тем не менее оно принципиально отличается от последнего (это вызвано необходимостью внесения в него существенных

изменений, связанных со спецификой случая $n = 3$).

В докладе обсуждаются также ряд других результатов, касающихся проблем однозначной определенности (многогранных областей) конформного и изометрического типа.

Список литературы

[1] Погорелов А.В., *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей*, М.: Наука, 1969.

[2] Копылов А.П., *Однозначная определенность выпуклых многогранных областей относительными конформными модулями граничных конденсаторов* // ДАН **410** (2006), № 1, с. 21–23.

[3] Копылов А.П., *Однозначная определенность областей в евклидовых пространствах* // Современная математика. Фундаментальные направления, **22** (2007), 139-167.

[4] Kopylov, A.P., *Unique determination of domains.* In: Differential Geometry and its Applications. Proceedings of the 10th International Conference on DGA2007, in Honour of L. Euler, Olomouc, August 2007. World Scientific Publishing Company // P. 157–169. 2008.

[5] Копылов А.П., *Однозначная определенность многогранных областей и p-модули семейств путей* // ДАН **438** (2011), № 2, с. 168–171.

[6] Копылов А.П., *Об однозначной определенности выпуклых многогранных областей в трехмерном евклидовом пространстве относительными конформными модулями граничных конденсаторов* // ДАН, статья принята к печати.