514.76

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫЕ ЭЙНШТЕЙНОВЫ СТРУКТУРЫ НА ПЯТИМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Я. В. СЛАВОЛЮБОВА

Аннотация. В работе приводятся пятимерные алгебры Ли, допускающие левоинвариантные псевдоримановые сасакиевы K-контактные эйнштейновы структуры.

Известно [1], не существует K-контактных-эйнштейновых, и тем более сасаки-эйнштейновых, левоинвариантных римановых структур на группах Ли размерности ≥ 5. Однако в псевдоримановом случае такие структуры существуют. В размерности 5 следующие разрешимые алгебры Ли: разложимые: $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2 \times \mathbb{R}e_5$, $\mathfrak{r}_2' \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{d}_{4,\lambda} \times \mathbb{R}(\lambda \neq 1)$, $\mathfrak{d}'_{4,\delta}(\delta \neq 0)$, неразложимая: $\mathfrak{g}_{5,22}$, допускают левоинвариантные псевдоримановые эйнштейновые K-контактные-сасакиевые структуры. Напомним, что $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ – прямое произведение алгебр Ли $aff(\mathbb{R}) \times aff(\mathbb{R})$, где $aff(\mathbb{R})$ – алгебра Ли группы Ли аффинных преобразований $\mathbb{R}$; $\mathfrak{r}_2'$ – алгебра Ли $aff(\mathbb{C})$, рассматриваемая как вещественная алгебра Ли [2]; а $\mathfrak{g}_{5,22}$ - 22-я алгебра Ли классификационного списка А.Диатты разрешимых и неразложимых алгебр Ли [1]. Подробно рассмотрим одну из них.

Алгебра Ли $\mathfrak{d}'_{4,\delta} \times \mathbb{R}(\delta \neq 0)$. Алгебра Ли $\mathfrak{d}'_{4,\delta}(\delta \neq 0)$ имеет базис e_1, e_2, e_3, e_4, в котором скобки Ли задаются следующим образом:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = -\frac{\delta}{2}e_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = -\delta e_3, \quad [e_2, e_4] = -e_1 - \frac{\delta}{2}e_2.$$

Она является разрешимой, но не нильпотентной. Первый производный идеал $D^1\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ имеет размерность 3, центр – нулевой. Алгебра Ли $\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{A}_{4,11a}, a > 0$ при $a = -\frac{\delta}{2}$ из [3]. Группу Ли, соответствующую данной алгебре Ли будем обозначать символом $D'_{4,\delta}, \delta \neq 0$.

Общий элемент группы Ли $D'_{4,\delta}$ имеет вид [3]:

$$\begin{pmatrix} e^{-\delta x_4} & -e^{-\frac{\delta x_4}{2}}(-x_3 \sin x_4 + x_1 \cos x_4) & e^{-\frac{\delta x_4}{2}}(-x_3 \cos x_4 - x_1 \sin x_4) & -x_2 \\ 0 & e^{-\frac{\delta x_4}{2}} \cos x_4 & e^{-\frac{\delta x_4}{2}} \sin x_4 & \frac{\delta x_3}{2} + x_1 \\ 0 & -e^{-\frac{\delta x_4}{2}} \sin x_4 & e^{-\frac{\delta x_4}{2}} \cos x_4 & -\frac{\delta x_1}{2} + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ является точной симплектической и симплектическая форма ω имеет вид:

$$\omega = e^1 \wedge e^2 - \delta e^3 \wedge e^4, \quad \omega = d\alpha, \quad \alpha = -e^3.$$

Рассмотрим контактное расширение $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}'_{4,\delta} \times \mathbb{R}e_5$ с симплектической формой $\omega = e^1 \wedge e^2 - \delta e^3 \wedge e^4$, тогда контактная форма имеет вид:

$$\eta = -e^3 + e^5.$$

Легко видеть, что $d\eta = e^1 \wedge e^2 - \delta e^3 \wedge e^4$. Поле Риба ξ имеет вид $\xi = e_5$.

Контактное распределение D – это левоинвариантное распределение, заданное следующим подпространством в алгебре Ли. Если $(x_1, \dots, x_5)$ – координаты на $\mathfrak{g}$, соответствующие выбранному базису e_i, то $D \subset \mathfrak{g}$ задается уравнением: $-x_3 + x_5 = 0$.

Выберем базис $E_1, \dots, E_4$ контактного подпространства D. Пусть $E_1 = e_1$, $E_2 = e_2$, $E_3 = e_3 + e_5$, $E_4 = e_4$.

Выберем также базис $E_1, \dots, E_5$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, взяв в качестве пятого вектора поле Риба, $E_5 = e_5$.

Выпишем ненулевые структурные константы в новом базисе:

$$C_{12}^3 = 1, \quad C_{12}^5 = -1, \quad C_{14}^1 = -\frac{\delta}{2}, \quad C_{14}^2 = 1,$$

$$C_{24}^1 = -1, \quad C_{24}^2 = -\frac{\delta}{2}, \quad C_{34}^3 = -\delta, \quad C_{34}^5 = \delta.$$

Контактная форма и ее внешний дифференциал в новом базисе определяются:

$$\eta = E^5, \quad d\eta = dE^5 = E^1 \wedge E^2 - \delta E^3 \wedge E^4.$$

Как известно, ассоциированная метрика g контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) при фиксированных η и ξ определяется аффинором φ по следующей формуле [4]:

$$g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Запишем аффинор φ в общем виде в базисе E_i. Учитывая, что φ обладает свойством

$$d\eta(\varphi X, \varphi Y) = d\eta(X, Y), \quad X, Y \in D,$$

легко видеть, что

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & 0 \\ \psi_{21} & -\psi_{11} & \psi_{23} & \psi_{24} & 0 \\ \frac{\psi_{24}}{\delta} & -\frac{\psi_{14}}{\delta} & \psi_{33} & \psi_{34} & 0 \\ -\frac{\psi_{23}}{\delta} & \frac{\psi_{13}}{\delta} & \psi_{43} & -\psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы связаны еще условиями, которые следуют из равенства $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$:

$$\begin{cases} \psi_{11}^2 + \psi_{12}\psi_{21} + \frac{1}{\delta}(\psi_{13}\psi_{24} - \psi_{14}\psi_{23}) = -1, \\ \psi_{12}\psi_{23} + \psi_{13}(\psi_{11} + \psi_{33}) + \psi_{14}\psi_{43} = 0, \\ \psi_{12}\psi_{24} + \psi_{13}\psi_{34} + \psi_{14}(\psi_{11} - \psi_{33}) = 0, \\ \psi_{13}\psi_{21} - \psi_{23}(\psi_{11} - \psi_{33}) + \psi_{24}\psi_{43} = 0, \\ \psi_{14}\psi_{21} + \psi_{23}\psi_{34} - \psi_{24}(\psi_{11} + \psi_{33}) = 0, \\ \psi_{33}^2 + \psi_{34}\psi_{43} + \frac{1}{\delta}(\psi_{13}\psi_{24} - \psi_{14}\psi_{23}) = -1. \end{cases}$$

Теорема 1. *Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на группе $D'_{4,\delta} \times \mathbb{R}$ является K-контактной при всех значениях параметров.*

Контактная метрическая структура на группе $D'_{4,\delta} \times \mathbb{R}$ является сасакиевой при следующем аффиноре

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & \psi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\psi_{33}^2}{\psi_{34}} & -\psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \psi_{34} \neq 0.$$

Тогда соответствующая сасакиева метрика g контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) имеет следующую матрицу:

$$g = \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta(1+\psi_{33}^2)}{\psi_{34}} & \delta\psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \delta\psi_{33} & \delta\psi_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \psi_{34} \neq 0.$$

Квадраты норм тензора Римана и Риччи имеют выражения:

$$\|Riem\|^2 = \frac{(3\delta(\psi_{33}^2+1)+\psi_{34})^2+\psi_{34}^2}{\psi_{34}^2}, \|Ric\|^2 = \frac{24\delta^2(\psi_{33}^2+1)^2+36\delta\psi_{34}(\psi_{33}^2+1)+17{\psi_{34}}^2}{2\psi_{34}^2}.$$

Скалярная кривизна выражается формулой: $S = -\frac{6\delta(\psi_{33}^2+1)+\psi_{34}}{\psi_{34}}$. *Матрица оператора Риччи имеет следующий вид:*

$$RIC = diag(-\frac{3\delta(\psi_{33}^2+1)+\psi_{34}}{2\psi_{34}}, -\frac{3\delta(\psi_{33}^2+1)+\psi_{34}}{2\psi_{34}}, -\frac{3\delta(\psi_{33}^2+1)+\psi_{34}}{2\psi_{34}}, -\frac{3\delta(\psi_{33}^2+1)+\psi_{34}}{2\psi_{34}}, 1).$$

Секционные кривизны в направлении базисных площадок $\langle E_i, E_j \rangle$ *принимают следующие значения:*

$$K_{1,2} = K_{3,4} = -\frac{4\delta(\psi_{33}^2+1)+3\psi_{34}}{4\psi_{34}}, \quad K_{1,3} = K_{1,4} = K_{2,3} = K_{2,4} = -\frac{\delta(1+\psi_{33}^2)}{4\psi_{34}},$$

$$K_{1,5} = \frac{1}{4}, \quad K_{2,5} = \frac{1}{4}, \quad K_{3,5} = \frac{1}{4}, \quad K_{4,5} = \frac{1}{4}.$$

Сасакиева метрика является псевдоримановой эйнштейновой при $\psi_{34} = -\delta(1+\psi_{33}^2)$ *и* $\eta-$*эйнштейновой при любых параметрах.*

Результаты относительно остальных вышеупомянутых алгебр Ли с указанием контактной формы сведены в следующую таблицу:

№	Алгебра Ли, контактная структура	Алгебр. св-ва	Доп. стр. Сасаки	Доп. K-конт. стр.	Доп. эйнштейновы / η-эйнштейновы структуры
1	$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2 \times \mathbb{R}e_5$, ω_0 $[e_1, e_2] = e_2, [e_3, e_4] = e_4$ $\eta = -e^2 - e^4 + e^5, \omega_0 = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$	разреш. разл.	+	+	+/+
2	$\mathfrak{r}'_2 \times \mathbb{R}$, ω_1 $[e_1, e_3] = e_3, [e_2, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_4, [e_2, e_4] = -e_3$ $\eta = -e^3 + e^5, \omega_1 = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4$	разреш. разл.	+	+	+/+
	$\mathfrak{r}'_2 \times \mathbb{R}$, ω_2 $[e_1, e_3] = e_3, [e_2, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_4, [e_2, e_4] = -e_3$ $\eta = -e^4 + e^5, \omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$	разреш. разл.	+	+	+/+
3	$\mathfrak{d}_{4,\lambda} \times \mathbb{R}, \lambda \neq 1$, ω $[e_1, e_2] = e_3, [e_3, e_4] = -e_3,$ $[e_1, e_4] = -\lambda e_1, [e_2, e_4] = (\lambda - 1)e_2$ $\eta = -e^3 + e^5, \omega = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$	разреш. разл.	+	+	+/+
4	$\mathfrak{d}'_{4,\delta} \times \mathbb{R}, \delta \neq 0$, ω $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_4] = -\frac{\delta}{2}e_1 + e_2,$ $[e_3, e_4] = -\delta e_3, [e_2, e_4] = -e_1 - \frac{\delta}{2}e_2$ $\eta = -e^3 + e^5, \omega = e^1 \wedge e^2 - \delta e^3 \wedge e^4$	разреш. разл.	+	+	+/+
5	$\mathfrak{g}_{5,22}$ $[e_2, e_3] = e_1, [e_1, e_4] = 2e_1,$ $[e_2, e_4] = e_2, [e_3, e_4] = e_3,$ $[e_2, e_5] = -e_3, [e_3, e_5] = e_2$ $\eta = e^1 + e^5$	разреш. неразл.	+	+	+/+

Список литературы

[1] Diatta A. *Left invariant contact structures on Lie groups* // arXiv: math.DG/0403555, v2, 2004. - 17 p.

[2] Ovando G. *Four dimensional symplectic Lie algebras* // arXiv:math/0407501v1, [math.DG], 2004. - 21 p.

[3] Ghanam R., Thompson G., Miller E.J. *Variationality of Four-Dimensional Lie Group Connection* // J. of the Lie Theory, 2004. - Vol. 14. - P. 395-425.

[4] Blair. D.E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry.* Lecture Notes in Mathematics. - Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. - 145 p.

Ярославна Викторовна Славолюбова
РГТЭУ,
пр. Кузнецкий 39,
650992, Кемерово, Россия
E-mail address: jar1984@mail.ru