Об одном необходимом условии изгибаемости невырожденной подвески в пространстве Лобачевского

Дмитрий Слуцкий

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
и Университет Тулуза 3

1 сентября 2011 г.

Введение

- Рауль Брикар в 1897 году описал все изгибаемые октаэдры в $\mathbb{R}^3$. Октаэдры Брикара — первые примеры изгибаемых многогранников (с самопересечениями).

Введение

- Рауль Брикар в 1897 году описал все изгибаемые октаэдры в $\mathbb{R}^3$. Октаэдры Брикара — первые примеры изгибаемых многогранников (с самопересечениями).
- Роберт Коннелли в 1976 году доказал, что порядок экватора изгибаемой подвески в $\mathbb{R}^3$ равен нулю.

Введение

- Рауль Брикар в 1897 году описал все изгибаемые октаэдры в $\mathbb{R}^3$. Октаэдры Брикара — первые примеры изгибаемых многогранников (с самопересечениями).
- Роберт Коннелли в 1976 году доказал, что порядок экватора изгибаемой подвески в $\mathbb{R}^3$ равен нулю.
- С. Н. Михалёв в 2001 году доказал, что некоторая комбинация длин рёбер экватора изгибаемой подвески в $\mathbb{R}^3$, взятых со знаком «плюс» или «минус» каждая, равна нулю.

Определения

- Пусть $\mathcal{K}$ — двумерный симплициальный комплекс. Многогранник(многогранная поверхность) в трёхмерном пространстве Лобачевского — это непрерывное отображение из $\mathcal{K}$ в $\mathbb{H}^3$, которое переводит каждый k-мерный симплекс комплекса $\mathcal{K}$ в подмножество k-мерной плоскости пространства Лобачевского ($k \leq 2$).

Определения

- Пусть $\mathcal{K}$ — двумерный симплициальный комплекс. Многогранник(многогранная поверхность) в трёхмерном пространстве Лобачевского — это непрерывное отображение из $\mathcal{K}$ в $\mathbb{H}^3$, которое переводит каждый k-мерный симплекс комплекса $\mathcal{K}$ в подмножество k-мерной плоскости пространства Лобачевского ($k \leq 2$).
- Образы двумерных топологических симплексов называются гранями, одномерных — рёбрами, 0-мерных — вершинами многогранника.

Определения

- Пусть $\mathcal{K}$ — двумерный симплициальный комплекс. Многогранник(многогранная поверхность) в трёхмерном пространстве Лобачевского — это непрерывное отображение из $\mathcal{K}$ в $\mathbb{H}^3$, которое переводит каждый k-мерный симплекс комплекса $\mathcal{K}$ в подмножество k-мерной плоскости пространства Лобачевского ($k \leq 2$).
- Образы двумерных топологических симплексов называются гранями, одномерных — рёбрами, 0-мерных — вершинами многогранника.
- Если $v_1, ..., v_W$ — вершины $\mathcal{K}$, а $\mathcal{P} : \mathcal{K} \to \mathbb{H}^3$ — многогранник, то $\mathcal{P}$ определяется W точками $P_1, ..., P_W \in \mathbb{H}^3$, где $P_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}(v_j)$, $j = 1, ..., W$.

Определения

- Если $\mathcal{P} : \mathcal{K} \to \mathbb{H}^3$ и $\mathcal{Q} : \mathcal{K} \to \mathbb{H}^3$ — два многогранника, то мы будем говорить, что $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ конгруэнтны, если существует движение $\mathcal{A} : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ такое, что $\mathcal{Q} = \mathcal{A} \circ \mathcal{P}$ (то есть изометрическое отображение $\mathcal{A}$ переводит каждую вершину многогранника $\mathcal{P}$ в соответствующую вершину многогранника $\mathcal{Q}$: $Q_j = \mathcal{A}(P_j)$ или, что то же самое, $\mathcal{Q}(v_j) = \mathcal{A}(\mathcal{P}(v_j))$, $j = 1, ..., W$).

Определения

- Если $\mathcal{P} : \mathcal{K} \to \mathbb{H}^3$ и $\mathcal{Q} : \mathcal{K} \to \mathbb{H}^3$ — два многогранника, то мы будем говорить, что $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ конгруэнтны, если существует движение $\mathcal{A} : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ такое, что $\mathcal{Q} = \mathcal{A} \circ \mathcal{P}$ (то есть изометрическое отображение $\mathcal{A}$ переводит каждую вершину многогранника $\mathcal{P}$ в соответствующую вершину многогранника $\mathcal{Q}$: $Q_j = \mathcal{A}(P_j)$ или, что то же самое, $\mathcal{Q}(v_j) = \mathcal{A}(\mathcal{P}(v_j))$, $j = 1, \dots, W$).
- Мы скажем, что $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ изометричны (или изометричны во внутренних метриках), если каждое ребро многогранника $\mathcal{P}$ имеет ту же длину, что и соответствующее ему ребро из $\mathcal{Q}$, то есть если $\langle v_j, v_k \rangle$ есть одномерный симплекс комплекса $\mathcal{K}$, то $\mathrm{d}_{\mathbb{H}^3}(Q_j, Q_k) = \mathrm{d}_{\mathbb{H}^3}(P_j, P_k)$, где символ $\mathrm{d}_{\mathbb{H}^3}(\cdot, \cdot)$ обозначает расстояние в $\mathbb{H}^3$.

Определения

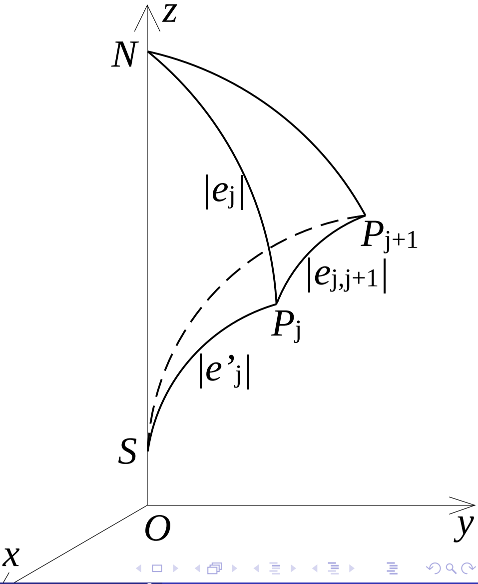
- Многогранник $\mathcal{P}$ называется изгибаемым, если для некоторого непрерывного однопараметрического семейства многогранников $\mathcal{P}_t : \mathcal{K} \to \mathbb{H}^3$, $0 \leq t \leq 1$, выполнены следующие три условия: (1) $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$; (2) каждый многогранник $\mathcal{P}_t$ изометричен $\mathcal{P}_0$; (3) для некоторого значения параметра t многогранник $\mathcal{P}_t$ не конгруэнтен $\mathcal{P}_0$.

Определения

- Пусть комплекс $\mathcal{K}$ определён следующим образом: $\mathcal{K}$ имеет вершины $v_0, v_1, \ldots, v_V, v_{V+1}$, где $v_1, \ldots, v_V$ образуют цикл (вершина v_j смежна с v_{j+1}, $j = 1, \ldots, V-1$, а вершина v_V смежна с v_1), а каждая из вершин v_0 и v_{V+1} смежна со всеми вершинами $v_1, \ldots, v_V$. Всякий многогранник $\mathcal{P}$, построенный по такому комплексу $\mathcal{K}$, называется подвеской. При этом точка $N \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}(v_0)$ называется северным полюсом, $S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}(v_{V+1})$ — южным полюсом, а точки $P_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}(v_j)$, $j = 1, \ldots, V$ — вершинами экватора $\mathcal{P}$.

Определения

- Если считать отрезок NS дополнительным ребром, то $\mathcal{P}$ становится совокупностью V тетраэдров, циклично склеенных вдоль ребра NS. Назовём подвеску невырожденной, если ни один из этих тетраэдров не лежит в двумерной гиперболической плоскости.

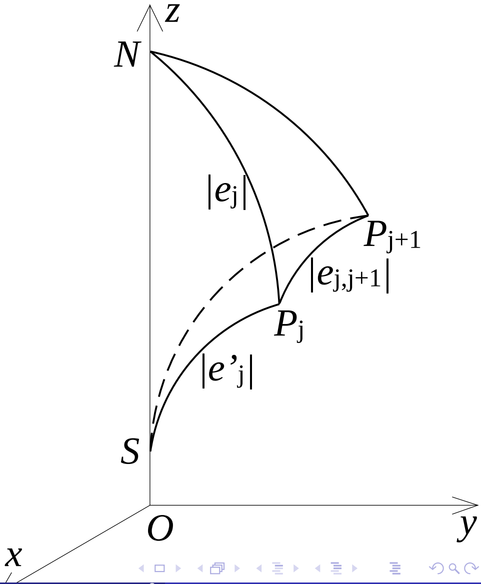


Основной результат

Теорема *Пусть* $\mathcal{P}$ *— невырожденная изгибаемая подвеска в трёхмерном пространстве Лобачевского с полюсами* S *и* N *и вершинами экватора* P_j, $j = 1, \ldots, V$. *Тогда для некоторой комбинации знаков* $\sigma_{j,j+1} \in \{+1, -1\}$, $j = 1, \ldots, V$, *сумма длин всех рёбер* $P_j P_{j+1}$ *экватора подвески, взятых с соответствующими знаками* $\sigma_{j,j+1}$, *равна нулю. (По определению считается, что* $P_V P_{V+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} P_V P_1$ *и* $\sigma_{V,V+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma_{V,1}$.)

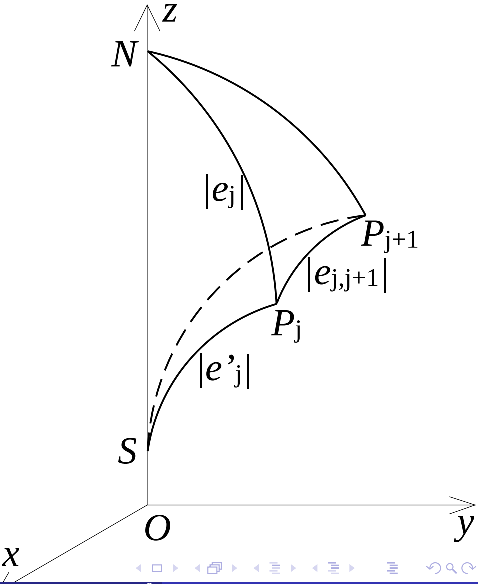
Уравнение изгибаемости

- Р. Коннелли вывел уравнение изгибаемости нетривиальной подвески в трёхмерном евклидовом пространстве. Вслед за ним в этом параграфе мы получим уравнение изгибаемости нетривиальной подвески в трёхмерном пространстве Лобачевского.



Уравнение изгибаемости

- Р. Коннелли вывел уравнение изгибаемости нетривиальной подвески в трёхмерном евклидовом пространстве. Вслед за ним в этом параграфе мы получим уравнение изгибаемости нетривиальной подвески в трёхмерном пространстве Лобачевского.
- Двугранный угол $\theta_{j,j+1}$ тетраэдра NSP_jP_{j+1} при ребре NS равен плоскому углу $\angle\widetilde{P}_j O \widetilde{P}_{j+1}$, $j = 1, \ldots, V$.

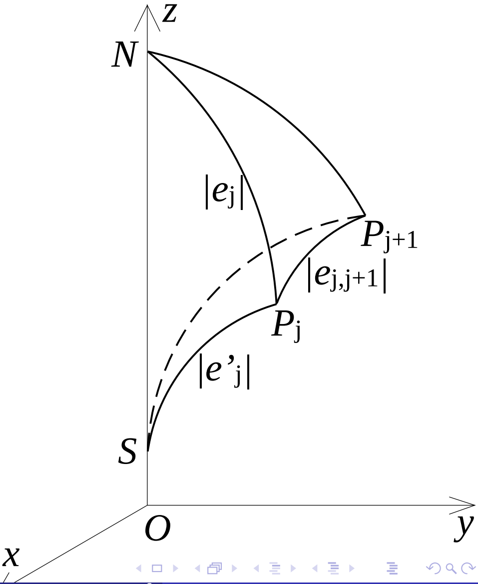


Уравнение изгибаемости

- Сумма двугранных углов $\theta_{j,j+1}$ всех тетраэдров NSP_jP_{j+1}, $j = 1, ..., V$, при NS постоянна и кратна 2π (здесь и далее $\theta_{V,V+1} \overset{\text{def}}{=} \theta_{V,1}$, $\theta_{V+1} \overset{\text{def}}{=} \theta_1$, $\rho_{V+1} \overset{\text{def}}{=} \rho_1$), то есть

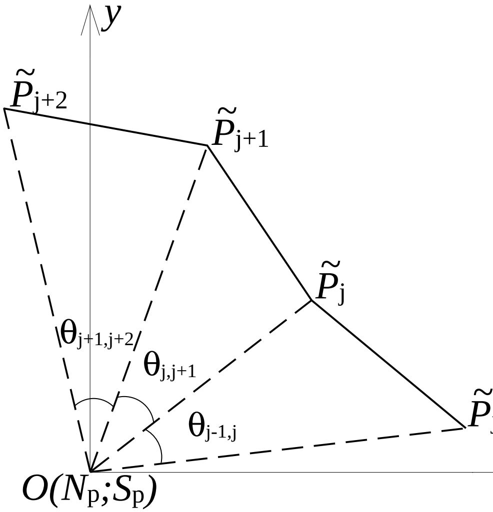
$$\sum_{j=1}^{V} \theta_{j,j+1} = 2\pi k$$

для некоторого целого числа k.



Уравнение изгибаемости

- Пусть точка S имеет координаты $(0, 0, z_S)$, точка N — $(0, 0, z_N)$, точки P_j — (x_j, y_j, z_j), $j = 1, \ldots, V$.



Проекция подвески $\mathcal{P}$

Уравнение изгибаемости

$$\prod_{j=1}^{V} \frac{(x_j x_{j+1} + y_j y_{j+1}) + i(x_j y_{j+1} - y_j x_{j+1})}{x_j^2 + y_j^2} = 1.$$

(по определению считаем, что $x_{V+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_1$, $y_{V+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} y_1$, $z_{V+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} z_1$)

Примеры

- Хельмут Штахель в 2000 году доказал изгибаемость аналогов октаэдров Брикара в трёхмерном пространстве Лобачевского.

Примеры

- Хельмут Штахель в 2000 году доказал изгибаемость аналогов октаэдров Брикара в трёхмерном пространстве Лобачевского.
- Полученное необходимое условие изгибаемости подвески выполнено для октаэдров Брикара-Штахеля.

Полезные ссылки

- R. Bricard, *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé*, J. Math. Pures Appl., Vol. 3 (1897), P. 113-150
- Р. Коннелли, *Об одном подходе к проблеме неизгибаемости*, в кн. под ред. А. Н. Колмогорова и С. П. Новикова: Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир. 1980. С. 164-209.
- С. Н. Михалёв, *Некоторые необходимые метрические условия изгибаемости подвесок*, Вестник МГУ, Сер. I, 2001, No. 3, С. 15-21
- H. Stachel, *Flexible octahedra in the hyperbolic space*, в книге под ред. A. Prékopa: Non-Euclidean geometries. János Bolyai memorial volume. Papers from the international conference on hyperbolic geometry, Budapest, Hungary, July 6-12, 2002. New York, NY: Springer. Mathematics and its Applications 581 (2006), P. 209-225

ВСЁ!!!

Спасибо за внимание!