Симметричные инвариантные пространства комплексификаций линейных операторов

Сторожук К. В. ИМ СО РАН; НГУ.

Пусть $T : X \to X$ — ограниченный линейный оператор на банаховом пространстве X. Инвариантным подпространством называем *собственное замкнутое* подпространство $Y \subset X$, такое, что $T(Y) \subset Y$. Если X комплексное, то символ $\sigma(T)$ обозначает спектр T, а $R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}$ — резольвенту T. Стандартный спектральный метод получения инвариантных подпространств у хороших операторов таков ([1], [2]): если спектр $\sigma(T)$ несвязен, то охватим контуром γ какую-нибудь компоненту F. Образ $[F]$ и ядро $[\sigma \backslash F]$ спектрального проектора $P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, T)d\lambda$ — инвариантные подпространства и $\sigma(T|_{[F]}) = F$. Если спектр связен, но рост резольвенты в его окрестности не очень велик, то вырезая контуром γ подмножество $F \subset \sigma(T)$, надо домножать резольвенту под интегралом на весовую функцию g, малую в окрестности точек пересечения $\gamma \cap F$: $f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, T)g(\lambda)d\lambda$.

Пусть теперь X вещественно. Если интегрировать резольвенту комплексификации $T_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ оператора T по $\mathbb{R}$-*симметричному* контуру с *симметричным* весом g, то "вещественная часть" образа $f(T_{\mathbb{C}})$ будет T-инвариантным подпространством в X. Близкие методы анализа вещественных операторов описаны в [3]. Мы доказываем следующую теорему, в комплексном случае полученную в [4]. Утверждение для изометрий в комплексном случае восходит к теореме J из [5].

Теорема 1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $T : X \to X$ — обратимый линейный оператор, такой, что $\|T^n\| = O(|n|^k), k < \infty$ при $n \to \pm\infty$. Если $\dim X > 2$, то оператор T имеет инвариантное подпространство. В частности, линейная изометрия $T : X \to X$ вещественного пространства имеет инвариантное подпространство.*

Список литературы

[1] Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Том 3. Спектральные операторы. М.:Мир, 1974.

[2] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман. Об операторах с отделимым спектром. Функц. анализ и его прил., 7:2 (1973), 52–61.

[3] А. Г. Баскаков, А. С. Загорский. К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах. Мат. заметки, 2007, т. 81, вып. 1, 17—31.

[4] Wermer, J. The existence of invariant subspaces. Duke Math. J. 19, (1952). 615–622.

[5] Godement, Roger Théorèmes taubériens et théorie spectrale. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 64 (1947), p. 119-138.