Перечисление 3-мерных узлов в многообразии $S^3 \times S^3$ (классификация с точностью до диффеоморфизма)

А.В.Жубр (Коми научный центр, Сыктывкар)

k-мерным узлом в гладком многообразии M мы называем гладкое вложение $S^k \to M$. Множество классов таких вложений относительно сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $M \to M$ мы обозначаем через $\Pi_k(M)$, то же в варианте с нормальным оснащением — через $\Pi_k^{fr}(M)$. Множества $\Pi_3(S^6)$ и $\Pi_3^{fr}(S^6)$ являются абелевыми группами согласно Хефлигеру(1), им же они были вычислены(2). Группа $\Pi_3^{fr}(S^6)$ — свободная с двумя образующими, которые мы здесь обозначаем α и β. Образующая α — это класс тривиально вложенной сферы, оснащение которой получено из тривиального (постоянного) подкручиванием на образующую группы $\pi_3\mathrm{SO}_3 = \mathbb{Z}$; образующая β представляется нетривиальным узлом ("3-мерным трилистником", описанным в (1)), снабженным тривиальным оснащением. При естественной проекции $\Pi_3^{fr}(S^6) \to \Pi_3(S^6)$ образующая α переходит в нуль, а β становится образующей группы $\Pi_3(S^6) \approx \mathbb{Z}$.

Мы обозначаем через $\Pi_3(S^3 \times S^3, d)$ (соотв. через $\Pi_3^{fr}(S^3 \times S^3, d)$) множество классов узлов, чей гомологический класс имеет d своим наибольшим натуральным делителем; при этом удобно считать, что $d = 0$ соответствует нулевому классу. Множества $\Pi_3(S^3 \times S^3, 0)$ и $\Pi_3^{fr}(S^3 \times S^3, 0)$ без труда отождествляются с соответствующими группами Хефлигера. Что же касается всех остальных множеств $\Pi_3^{(fr)}(S^3 \times S^3, d)$, то группы Хефлигера действуют на них посредством обычной связной суммы.

Теорема. *Каждое из множеств* $\Pi_3^{fr}(S^3 \times S^3, d)$ *является орбитой группы* $\Pi_3^{fr}(S^6) \approx \mathbb{Z}^2$. *При этом стационарная подгруппа порождается элементами* $d \cdot \alpha + d/(3,d) \cdot \beta$ *и* $d/(2,d) \cdot \beta$, *где* (m,n) *обозначает наибольший общий делитель.*

Следствие 1. *Каждое из множеств* $\Pi_3(S^3 \times S^3, d)$ *является орбитой группы* $\Pi_3(S^6)$, *а соответствующая стационарная подгруппа порождается элементом* $d/(6,d) \cdot \beta$.

Следствие 2. *Число элементов множеств* $\Pi_3^{fr}(S^3 \times S^3, d)$ *и* $\Pi_3(S^3 \times S^3, d)$ *задается формулами*

$$\begin{cases} |\Pi_3^{fr}(S^3 \times S^3, d)| = \frac{d^2}{(2,d)} \\ |\Pi_3(S^3 \times S^3, d)| = \frac{d}{(6,d).} \end{cases}$$

Мы обозначаем, для каждого $d > 0$, через s_d "стандартный узел индекса d" в многообразии $S^3 \times S^3$, образованный из d "параллельных" сфер $S \times a$, последовательно соединенных друг с другом посредством трубок, см. ниже рис. 1.

Следствие 3. *Всякий элемент множества* $\Pi_3(S^3 \times S^3, d)$ *единственным, с точностью до изотопии, образом представляется в виде связной суммы стандартного узла* s_d *и* k *экземпляров "3-мерного трилистника",* $0 \leqslant k < d/(6,d)$.

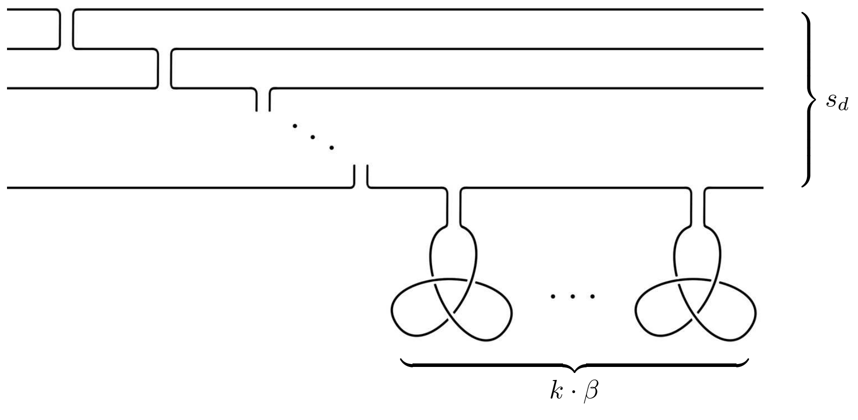

Рис. 1: Стандартное представление узла в $S^3 \times S^3$

Приведенные здесь результаты уточняют и дополняют одну старую работу автора(3).

Ссылки. (1) Ann. Math., 1962, 452–466. (2) Ann. Math. (2), 1966, 402–436. (3) Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1976, 148–163.