ТЕЗИСЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ, 2012»,
посвященной 100-летию со дня рождения
академика Александра Даниловича Александрова

Новосибирск
2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАССЛОЕНИЯ НА ДИСКИ НАД ЗАМКНУТЫМИ ОРИЕНТИРУЕМЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ДОПУСКАЮЩИЕ КОМПЛЕКСНУЮ ИЛИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНУЮ ГИПЕРБОЛИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ

САША АНАНЬИН

Вероятно, наиболее простыми нетривиальными 4-многообразиями M являются расслоения на диски над ориентируемыми замкнутыми поверхностями. Топологически (= гладко) такие многообразия полностью характеризуются двумя числами: Эйлеровой характеристикой $\chi\Sigma$ базы Σ расслоения M и числом Эйлера (= алгебраическое число пересечений двух сечений) eM расслоения M.

В случае комплексной гиперболической геометрии, можно построить много таких примеров при помощи ‘строительных блоков’ — трансверсальных треугольников бисекторов. Эти блоки расслоены на диски и, в некотором смысле, обладают дробными числами Эйлера. В частности, этим способом получается тривиальное расслоение, что решает одну старую проблему.

В случае действительной гиперболической геометрии, похожие идеи позволяют легко построить известный пример Feng Luo. Этот пример даёт максимальное на сегодняшний момент значение $|eM/\chi\Sigma| = \frac{1}{2}$. Понятие минимального графа многообразия по-видимому приведет к лучшим примерам.

Universidade Estadual de Campinas, Кампинас, ??? почтовый индекс, Бразилия
E-mail address: ananin_sasha@yahoo.com

RATIONAL TRIGONOMETRY OF A TETRAHEDRON

NORMAN WILDBERGER

This talk will outline a new approach to the trigonometry of a general tetrahedron in Euclidean space, by combining the main formulas of planar affine rational trigonometry ([5]) and planar projective trigonometry ([4]) (which is the basis for Universal Hyperbolic Geometry ([1],[2],[3])).

The main metrical notions in the affine case are quadrance between two points, spread between two lines or two planes, quadreas of triangular faces, the solid spread made by a tripod of three concurrent lines in three dimensional space, and the quadrume of the tetrahedron itself. These notions will be here reviewed.

Suppose we have a symmetric bilinear form $v \cdot w \equiv vMw^T$ between (row) vectors v and w, for a symmetric non-degenerate matrix M, in a vector space over a field, which may be taken to be the rational numbers, or even a finite field. The **quadrance** of the vector v is the number

$$Q(v) \equiv v \cdot v.$$

The **spread** between the vectors v and w is the number

$$s(v,w) \equiv 1 - \frac{(v \cdot w)^2}{Q(v)\,Q(w)}.$$

If P and R are two planes with normal vectors p and r respectively, then the **spread** $S(P,R)$ between the planes is

$$S(P,R) \equiv s(p,r).$$

If a triangle has side vectors v, w and u (so that say $v+w+u=0$) with respective quadrances Q_v, Q_u and Q_w, then the **quadrea** of the triangle is the number

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\equiv (Q_v+Q_u+Q_w)^2 - 2\left(Q_v^2+Q_u^2+Q_w^2\right)\\ &= 4Q_vQ_u - (Q_v+Q_u-Q_w)^2.\end{aligned}$$

In Euclidean geometry $\mathcal{A}$ is 16 times the square of the area of the triangle, this is a rational form of Heron's formula.

If v, w and u are three row vectors which are the directions of three concurrent lines forming a tripod, then the **solid spread** $\mathcal{S}$ of the tripod (also called a projective triangle) is

$$\mathcal{S} \equiv \frac{\det^2\begin{pmatrix} v \\ u \\ w\end{pmatrix}}{Q(v)\,Q(u)\,Q(w)}.$$

So altogether a general tetrahedron has 6 edge quadrances (one for each edge), 12 face spreads (three for each face), 6 dihedral edge spreads (between faces which meet at an edge), 4 solid spreads (one at each vertex) and one quadrume $\mathcal{V}$, a multiple of the square of the volume.

Our aim is to introduce some of the many relations between these numbers. Some of these are obvious analogs of classical formulae known for some time, such as the formula for the volume of a tetrahedron in terms of the edge quadrances, going back to Tartaglia. Others of the formulas will perhaps not be so familiar! We will motivate our discussion by simple tetrahedra that can be constructed with the popular construction set Zome.

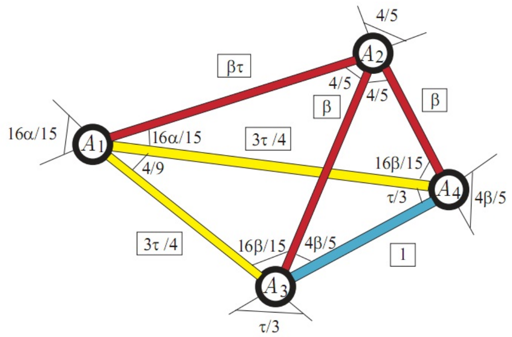


Figure 1. A Zome tetrahedron associated to the dodecahedron

It is of course interesting to contemplate the extension of such formulae to the spherical or hyperbolic cases.

References

[1] N. J. Wildberger, "Universal Hyperbolic Geometry I: Trigonometry", *Geometriae Dedicata* (2012), `http://www.springerlink.com/content/t97274g7j0x6r854/`
[2] N. J. Wildberger, "Universal Hyperbolic Geometry II: A pictorial overview", *KoG*, 3–24 (2010).
[3] N. J. Wildberger, "Universal Hyperbolic Geometry III: First steps in projective triangle geometry", *KoG*, 25–49 (2011).
[4] N. J. Wildberger, "Affine and projective metrical geometry", *J. of Geometry* to appear (2006), `arXiv: math/0612499v1`
[5] N. J. Wildberger, *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry*, Wild Egg Books, Sydney, (2005).

University of New South Wales, Sydney, 2052, Australia
E-mail address: `n.wildberger@unsw.edu.au`

ГЕОМЕТРИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

СЕРГЕЙ ВОДОПЬЯНОВ

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — C^1-гладкие векторные поля класса, определенные в некоторой окрестности U евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $n < N$. Цель лекции состоит в том, чтобы показать условия на векторные поля, при выполнении которых решения уравнения вида

$$-\operatorname{div}_h(|\nabla_0 v|^{p-2}\nabla_0 v) = 0, \quad 1 < p < \infty, \tag{1}$$

(или некоторых его обобщений) имеют определенные свойства регулярности [1] (условие Гёльдера и др.). Концептуально данные векторные поля должны включаться в систему C^1-гладких векторных полей $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_N$, задающих локально структуру многообразия Карно.

Более общо, связное N-мерное гладкое многообразие $\mathbb{M}$ называется *пространством Карно – Каратеодори*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ задана фильтрация

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$$

подрасслоениями такими, что в окрестности каждой точки $U(g) \subset \mathbb{M}$ найдется семейство C^1-гладких векторных полей $X_1, \dots, X_N$, удовлетворяющих следующим двум свойствам:

(1) для каждого $v \in U$ имеем подпространство $H_i\mathbb{M}(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$ постоянной размерности $\dim H_i$, $i = 1, \dots, M$;

(2) $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, \dots, M-1$;

Если, кроме того, выполняется условие

(3) $H_{j+1} = \operatorname{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$, $j = 1, \dots, M-1$, пространство Карно – Каратеодори называется *многообразием Карно*.

Будут рассказаны некоторые результаты работ [2–6], которые обеспечивают регулярность решений уравнения (1) и некоторых его обобщений.

Список литературы

[1] V. M. Chernikov, S. K. Vodop′yanov, "Sobolev Spaces and Hypoelliptic Equations. I.", *Sib. Advances in Math*, 6, No. 3, 27–67 (1996); II. 6, No. 4, 64–96 (1996).

[2] S. K. Vodop′yanov, M. B. Karmanova, "Local approximation theorem on Carnot manifolds under minimal smoothness", *Dokl. AN*, 427, No. 6, 731–736 (2009).

[3] M. Karmanova, S. Vodopyanov, "Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability and coarea formula", *Analysis and Mathematical Physics*, Birkhäuser, 284–387 (2009).

[4] A. V. Greshnov, "A proof of Gromov Theorem on homogeneous nilpotent approximation for C^1-smooth vector fields", *Mathematicheskie Trudy*, 15, No. 2 (2012) (accepted).

[5] S. Basalaev, S. Vodopyanov, "Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces", `arXiv:1206.5197v2`

[6] P. Hajłasz, P. Koskela, "Sobolev Met Poincaré", *Mem. Amer. Math. Soc.* 145 (2000), No. 688, 101 pp.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: vodopis@math.nsc.ru

Работа выполнена при частичной поддержке проектами Научные школы: НШ-921.2012.1; и ФЦПК – заявка № 2012-1.2.1-12-000-1001-025.

ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА СФЕРЕ РИМАНА

ИЛЬЯ ВЬЮГИН

Рассматриваются две задачи аналитической теории дифференциальных уравнений. Первая — задача восстановления системы линейных дифференциальных уравнений

$$y' = B(z)y, \qquad y(z) \in \mathbb{C}^n \tag{1}$$

по ее данным монодромии, характеризующим ветвление решений системы. Наиболее известный частный случай этой задачи, когда требуется построить фуксову систему

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{z-a_i}\right) y, \qquad \sum_{i=1}^{m} B_i = 0, \tag{2}$$

решения которой обладают заданной монодроией, называется проблемой Римана–Гильберта. Общий отрицательный ответ в этой задаче был дан в 1989 году А.А. Болибрухом, тогда возник вопрос о построении достаточных условий положительной разрешимости данной проблемы. В работах А.А. Болибруха [1] и докладчика [2] был построен критерий положительной разрешимости аналогичной задачи, сформулированной в более узком классе систем (2) с неприводимым набором матриц-вычетов $B_1, \ldots, B_m$. В докладе будет рассказано об этом и некоторых других результатах, полученных с помощью техники голоморфных векторных расслоений со связностью, образующих стабильную пару.

Вторая задача — задача построения семейства систем (1), зависящего от некоторого набора параметров, имеющих при этом одинаковое ветвление. Такое семейство называется изомонодромной деформацией системы (1). К таким задачам сводятся некоторые известные нелинейные уравнения, в частности уравнения Пенлеве. Для шестого уравнения Пенлеве

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-t}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{w-t}\right)\frac{dw}{dt} + \\ + \frac{w(w-1)(w-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{t}{w^2} + \gamma\frac{t-1}{(w-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(w-t)^2}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

получен следующий результат.

Теорема.
Решения уравнения (3) представляются в окрестности особой точки $t = 0$ в одном из двух видов:

$$w(t) = P(t, t^{\lambda}, t^{-\lambda}),$$

или

$$w(t) = Q(t, \ln t, \ln^{-1} t),$$

где $P(x_1, x_2, x_3)$ и $Q(x_1, x_2, x_3)$ — степенные ряды по переменным x_1, x_2, x_3, а λ — некоторое комплексное число.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-01-00339 и гранта фонда Саймонса за 2012 год.

Список литературы

[1] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, (2009).
[2] А. А. Болибрух, "Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности", *Тр. МИАН*, 238, 55–69 (2002).
[3] И. В. Вьюгин, "О конструктивных условиях разрешимости проблемы Римана–Гильберта", *Матем. заметки*, 77, No. 5, 643–655 (2005).

Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия
E-mail address: vyugin@gmail.com

COMBINATORIAL REALISATION OF CYCLES AND SIMPLICIAL VOLUME

ALEXANDER GAIFULLIN

The following problem on realisation of cycles was posed by Steenrod in 1940s. Given a homology class $z \in H_n(X, \mathbb{Z})$ of a topological space X, does there exist an oriented closed smooth manifold M^n and a continuous mapping $f : M^n \to X$ such that $f_*[M^n] = z$? If the answer is "yes", z is said to be realisable. In 1954, Thom found a non-realisable 7-dimensional class and proved that for every n, there is a positive integer $k(n)$ such that the class $k(n)z$ is always realisable.

We consider the following explicit version of Steenrod's problem. Given a singular cycle Z representing a homology class $z \in H_n(X, \mathbb{Z})$, can we construct *explicitly* a manifold M^n and a mapping $f : M^n \to X$ such that $f_*[M^n] = kz$ for a non-zero integer k? Such explicit construction was proposed by the author [1]. It is based on the explicit procedure for resolving singularities of the singular cycle Z. This construction has several applications.

First, for every n, it allows us to find a manifold M^n that has the following universality property (see [2]–[4]):

Universal Realisation of Cycles (URC) property. *For any X and any $z \in H_n(X, \mathbb{Z})$, a multiple of z can be realised by an image of some non-ramified finite-sheeted covering of M^n.*

This manifold M^n is a so-called small cover of the permutahedron, i.e., a manifold glued in a special way of 2^n permutahedra. (The permutahedron is a special convex polytope with $(n+1)!$ vertices.) Further, among small covers over other simple polytopes, we find a broad class of examples of URC-manifolds, i. e., manifolds that have URC-property. In particular, in dimension 4, we find a hyperbolic URC-manifold, thus proving a conjecture of Kotschick and Löh claiming that a multiple of any homology class can be realised by an image of a hyperbolic manifold.

Second application is to the theory of simplicial volume. Recall that the *simplicial semi-norm* on the homology of a topological space X is defined in the following way. Denote by $C_n(X, \mathbb{R})$ the n-dimensional singular simplicial chain group of X with real coefficients. For each chain $Z = \sum \alpha_i \sigma_i$, where $\alpha_i \in \mathbb{R}$ and σ_i are singular simplices, the ℓ^1-norm of it is equal to

$$\|Z\|_1 = \sum |\alpha_i|.$$

The simplicial semi-norm of a homology class $z \in H_n(X, \mathbb{R})$ is given by

$$\|z\|_1 = \inf \|Z\|_1,$$

where the infimum is taken over all singular cycles Z representing the homology class z. The simplicial semi-norm of the fundamental class $[M^n]$ of an oriented closed manifold M^n is called the *simplicial volume* (or the *Gromov norm*) of M^n, and is denoted by $\|M^n\|$.

It is well-known that in dimension 2 the simplicial semi-norm can be equivalently defined in the following way. For a homology class $z \in H_2(X, \mathbb{Z})$,

$$\|z\| = \inf \left\{ \frac{g}{k} \,\middle|\, f_*[S^2_g] = kz \right\},$$

where S^2_g is an oriented surface of genus g.

A natural question is whether it is possible to obtain a similar description of the simplicial semi-norm in an arbitrary dimension n. We have the following result towards this question.

The work was partially supported by RFBR (projects 12-01-31444, 12-01-92104), by a grant of the President of Russian Federation (project MD-4458.2012.1), by a grant of the Government of the Russian Federation (project 2010-220-01-077), and by Dmitri Zimin's "Dynasty" foundation.

For each URC-manifold M^n, we define the corresponding semi-norm $\|\cdot\|_{M^n}$ on homology in the following way. For any X and $z \in H_n(X,\mathbb{Z})$, we put

$$\|z\|_{M^n} = \inf \frac{r}{|k|},$$

where the infimum is taken over all mappings $f\colon \widehat{M}^n \to X$ such that $\widehat{M}^n$ is an r-sheeted covering of M^n and $f_*[\widehat{M}^n] = kz$, $k \neq 0$.

Theorem ([5]) *For each URC-manifold M^n, there exist positive constants $c_1(M^n)$ and $c_2(M^n)$ such that for any X and any $z \in H_n(X,\mathbb{Z})$, we have*

$$c_1(M^n)\|z\|_1 \leq \|z\|_{M^n} \leq c_2(M^n)\|z\|_1.$$

Indeed, one can take $c_1(M^n) = \|M^n\|^{-1}$. We do not know if $\|z\|_{M^n} = \|M^n\|^{-1} \cdot \|z\|_1$ for all z.

References

[1] A. A. Gaifullin, "Explicit construction of manifolds realising prescribed homology classes", *Russ. Math. Surveys*, 62, No. 6, 1199–1201 (2007), arXiv:0712.1709

[2] A. A. Gaifullin, "Realisation of cycles by aspherical manifolds", *Russ. Math. Surveys*, 63, No. 3, 562–564 (2008), arXiv:0806.3580

[3] A. A. Gaifullin, "The Manifold of Isospectral Symmetric Tridiagonal Matrices and Realization of Cycles by Aspherical Manifolds", *Proc. Steklov Inst. Math.*, 263, 38–56 (2008).

[4] A. A. Gaifullin, "Universal realisators for homology classes", arXiv:1201.4823, (2012).

[5] A. A. Gaifullin, "Combinatorial realisation of cycles and small covers", *Proc. of 6ECM*, to appear (2012), arXiv:1204.4823

Steklov Mathematical Institute, Moscow, 119991, Russia
Moscow State University, Moscow, 119991, Russia
Kharkevich Institute for Information Transmission Problems, Moscow, 127994, Russia
E-mail address: agaif@mi.ras.ru

ПОДСЧЕТ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ НОРМАЛЬНЫХ КРИВЫХ

ИВАН ДЫННИКОВ

Я расскажу о быстром алгоритме подсчета числа пересечений двух нормальных кривых на поверхности, находящихся в натянутом положении, исходя из их нормальных координат по отношению к некоторой триангуляции. Этот алгоритм позволяет работать с группами классов отображений поверхностей с отмеченными точками в определенном смысле более эффективно, чем при использовании любой конечной системы образующих. Это означает следующее.

С каждой конечной системой образующих связана норма — длина кратчайшего слова, представляющего элемент. Все эти нормы эквивалентны друг другу. Я использую другой способ представления элементов, при котором норма — длина записи в этом представлении — ограничена умноженной на константу длиной слова в фиксированной системе образующих, но длина кратчайшего слова не ограничена многочленом от моей нормы и может быть по сравнению с ней экспоненциально большой. Это происходит, например, для больших степеней скручиваний Дэна. Тем не менее, проблема равенства для моего способа представления элементов по-прежнему решается за полиномиальное время.

Математический институт РАН им. В. А. Стеклова, Москва, 119991, Россия
E-mail address: dynnikov@mech.math.msu.su

Исследования поддержаны грантами РФФИ 10-01-91056-НЦНИ_а и 11-01-00197-а, а также грантом Правительства РФ № 2010-220-01-077.

ISOSPECTRAL DEFORMATIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL OPERATORS AND ALGEBRAIC VARIETIES

ALEXANDER ZHEGLOV

It is well known that isospectral deformations of ordinary differential operators are described by the KP or KdV flows on Jacobians of algebraic curves.

For partial differential operators one can introduce a similar notion of isospectral deformations and then try to study the analysis and geometry connected with them. I will talk about equations describing these deformations (analogues of KP or KdV equations) and geometric properties of the corresponding geometric data (modified geometric data of Parshin) for some examples of differential operators in two variables.

This talk is based on recent works [1], [2].

References

[1] A. B. Zheglov, "On rings of commuting partial differential operators", e-print `arXiv:math-ag/1106.0765v2`

[2] H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, "Commuting differential operators and higher-dimensional algebraic varieties", *Oberwolfach Preprint Series*, 2, 2012, `http://www.mfo.de/scientific-programme/publications/owp`

Moscow State University, Moscow, 119992, Russia
E-mail address: `azheglov@math.msu.su`

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ В РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Сергей Иванов

Для приближенного решения уравнений на римановых многообразиях и связанных с этим обратных задач требуется дискретизация — приближенное представление многообразия дискретным набором данных. Традиционный подход к этой проблеме — использовать триангуляции многообразия и и полиэдральные приближения римановой метрики. Он хорошо работает в размерности 2, но в старших размерностях возникающие требования равномерной невырожденности трудно выполнимы, особенно в обратных задачах. Я расскажу о другом подходе: приближении многообразия конечными метрическими пространствами в смысле расстояния по Громову–Хаусдорфу. В частности, я опишу алгоритмически проверяемый критерий того, что дискретное пространство близко к некоторому n-мерному риманову многообразию с данными ограничениями на кривизну и радиус инъективности.

Кроме того, по дискретизации многообразия в указанном смысле можно построить дискретизацию оператора Лапласа–Бельтрами, которая представляет собой дискретный лапласиан подходящего взвешенного графа. Для этого дискретного лапласиана удалось доказать сходимость собственных чисел к собственным числам настоящего оператора Лапласа–Бельтрами, причем сходимость равномерна по всем многообразиям при фиксированных ограничениях на кривизну, диаметр и радиус инъективности.

Результаты получены в (продолжающейся) совместной работе с Д. Бураго и Я. Курылевым.

Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А.Стеклова РАН, С.-Петербург, 191023, Фонтанка 27, Россия

E-mail address: svivanov@pdmi.ras.ru

Исследования поддержаны грантом РФФИ 11-01-00302-а.

GEOMETRY OF SPACES OF RATIONAL FUNCTIONS

SERGEI LANDO

Meromorphic functions are holomorphic mappings of complex curves to the projective line. Spaces of such functions on curves of given genus (*Hurwitz spaces*) are classical objects of investigation. One of the simplest examples of such spaces is the space of rational functions of degree 3 with simple poles considered up to rational changes of the domain variable. This space can be identified with the space of functions

$$az + \frac{b}{z} + \frac{c}{z-1} + d : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1 \qquad a, b, c \neq 0,$$

that is, with an open subset in the vector space $\mathbb{C}^4$ with the coordinates a, b, c, d.

The last decades clarified the importance of Hurwitz spaces due to the fact that they are first instances of spaces of mappings of complex curves to algebraic varieties, which, in their own turn, are the main object of study in the theory of Gromov–Witten invariants.

Under the geometry of Hurwitz spaces we mean their cohomology properties and intersection theory on these spaces. The example above shows that Hurwitz spaces normally are noncompact, which makes necessary constructing their appropriate compactifications. The most well-known and widely used compactification, the one due to Harris and Mumford [2], possesses a disadvantage that it is singular. Another compactification was constructed in [1]. Both compactifications take into account mappings of singular curves, but in the second case only mappings to $\mathbb{C}P^1$ are considered, while the Harris–Mumford approach requires studying mappings to singular curves as well. As is shown in [5], the second compactification consists of *stable maps*, that is, maps whose automorphism group is finite.

Denote by $\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ the completed Hurwitz space of meromorphic functions on genus g curves with n marked poles of order 1. The example above corresponds to the case $g = 0$, $n = 3$, and the Hurwitz space $\overline{\mathcal{H}}_{0;3}$ is just $\mathbb{C}^4$. In order to obtain a compact space, one has only to projectivize $\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$, that is, to consider non-zero meromorphic functions up to a non-zero multiplicative constant.

Both the Hurwitz space $\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ and its projectivization $P\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ are naturally fibered over the moduli space $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ of stable genus g complex curves with n marked points (the fibration is obtained by associating the domain to a function). As a result, there is no hope to get a complete description of the cohomology $H^*(\overline{\mathcal{H}}_{g;n})$ of the Hurwitz spaces, since the cohomology $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$ is known to be extremely complicated.

Fortunately, there is also no need too. Information required to do practical computations concerns the *degrees* of certain specific *strata* in a natural stratification of the Hurwitz spaces. The stratification in question of the Hurwitz spaces consists of functions having specific *singularities*. A generic function is a Morse function; it has singularities of type A_1, that is, $z \mapsto z^2$ only. In addition, the space $P\overline{\mathcal{H}}_{0;3}$ contains the stratum of functions possessing the singularity A_2, which is locally $z \mapsto z^3$.

The simplest and important numerical characteristic of a singularity stratum is its *degree* (the intersection index with the complementary power of the projectivization class $\mathcal{O}(1) \in H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{g;n})$). The degrees of the strata coincide with the *Hurwitz numbers* thoroughly studied, in particular, by A. D. Mednykh, see e.g. [6]. These numbers are essentially the Gromov–Witten invariants of the projective line.

The main tool in the analysis of the geometry of the strata is the Thom–Kazaryan theory of universal polynomials, which allows one to express cohomology classes of the singularity (and more general multi- and multimulti-singularity) strata in terms of few basic characteristic classes. Namely, the following statement is valid.

Theorem. [3, 4] *Any singularity (and multi- and multimulti-singularity) stratum in an arbitrary generic family of meromorphic functions on algebraic curves having only isolated singularities admits a universal expression in terms of four basic characteristic classes, which are relative Chern classes of the mappings of the family. The expression depends only on the singularity type, but is independent of the family under consideration.*

In particular, the universal formulas are applicable to more general Hurwitz spaces $P\overline{\mathcal{H}}_{g;m_1,\dots,m_n}$ that consist of meromorphic functions with marked poles of orders $m_1,\dots,m_n$.

In order to convert this statement into a tool for explicit computation of the degrees of the strata, that is, the Hurwitz numbers, one has to know not just the existence of the universal formulas, but the formulas themselves. Up to now they can be deduced in few important cases. In particular, the following statement is true.

Theorem (M. E. Kazaryan, S. K. Lando, 2012). *The generating function for the universal polynomials for the singularity strata in the presence of local singularities of types A_m only is a solution to the KP hierarchy of partial differential equations.*

The Kadomtsev–Petviashvily (KP) hierarchy is an important integrable system of partial differential equations originating in mathematical physics. Knowing that certain generating series is a solution to this hierarchy, provides recurrence relations for the coefficients of the series. The last statement seems to indicate the first instance of a solution to KP with cohomology coefficients.

References

[1] T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, "Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves", *Invent. math.*, 146, 297–327 (2001).

[2] J. Harris, D. Mumford, "On the Kodaira dimension of the moduli space of curve", *Invent. Math.*, 67, No. 1, 23–88 (1982).

[3] M. E. Kazaryan, S. K. Lando, "On intersection theory on Hurwitz spaces" (Russian), *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat*, 68 , No. 5, 91–122 (2004).

[4] M. E. Kazaryan, S. K. Lando, "Thom polynomials for mappings of curves with isolated singularities" (Russian), *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 258, Anal. i Osob. Ch. 1, 93–106 (2007).

[5] S. K. Lando, "Ramified coverings of the two-dimensional sphere and intersection theory of spaces of meromorphic functions on algebraic curves", *Russ. Math. Surv.*, 57, No. 3, 463–533 (2002).

[6] A. D. Mednykh, "Nonequivalent coverings of Riemann surfaces with a prescribed ramification type", (Russian) *Sibirsk. Mat. Zh.*, 25, No. 4, 120—142 (1984).

Department of Mathematics, National Research University Higher School of Economics, Moscow, 117312, Russia

E-mail address: lando@hse.ru

БИАЛГЕБРЫ И ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

СЕРГЕЙ МАТВЕЕВ, ВЛАДИМИР ТАРКАЕВ

Под алгеброй мы будем понимать линейное пространство A (например, над полем действительных чисел $\mathbb{R}$), снабженное ассоциативной операцией умножения $\nabla\colon A\bigotimes A\to A$ и единицей, которую принято понимать как линейное отображение $\eta\colon \mathbb{R}\to A$ (хотя настоящим единичным элементом алгебры является элемент $\eta(1)\in A$). Аналогично, коалгебра – это линейное пространство A, снабженное коассоциативной операцией коумножения $\Delta\colon A\to A\bigotimes A$ и коединицей $\varepsilon\colon A\to\mathbb{R}$. Понятия алгебры и коалгебры двойственны друг другу в смысле обычной сопряженности линейных пространств и пространств линейных функционалов на них.

Биалгебра – это линейное пространство A, снабженное всеми 4 упомянутыми операциями, которые должны быть связаны естественными соотношениями. Самое важное из них записывается в виде равенства

$$\nabla\circ\Delta=(\Delta\bigotimes\Delta)\circ\tau\circ(\nabla\bigotimes\nabla),$$

где τ – перестановка второго и третьего сомножителей в произведении $A\bigotimes A\bigotimes A\bigotimes A$ и суперпозиции выполняются в порядке слева направо. Это соотношение удобно изображать графически так, как это показано на рис. 1, где вершины изображают экземпляры биалгебры A. При этом предполагается, что экземпляры, расположенные на одной вертикальной прямой, должны быть тензорно перемножены. В рассматриваемом случае обе суперпозиции действуют из $A\bigotimes A$ в $A\bigotimes A$

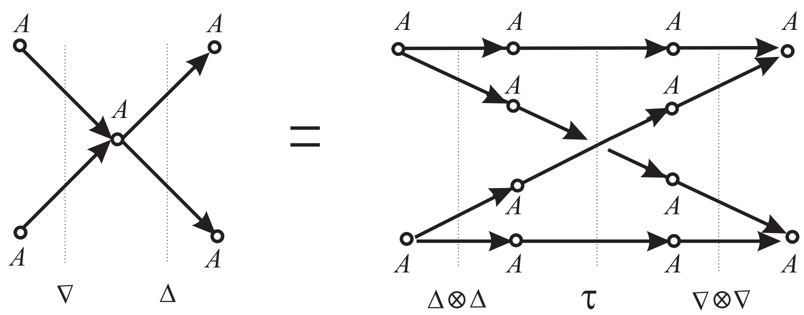


Рис. 1

Под *операцией* на тензорном произведении нескольких экземпляров алгебры A будем понимать произвольную суперпозицию операций ∇ и Δ, которая имеет смысл. Числа использованных экземпляров могут быть различными.

Опишем интересную связь между такими операциями и трехмерными многообразиями, обнаруженную М. Концевичем. Пусть дана графическая схема операции. Заменим каждую ее вершину на прямое произведение утолщенной буквы Y на отрезок, расположив эти произведения так, чтобы для вершин-умножений отрезки были расположены вертикально, а для вершин-коумножений – горизонтально. Затем склеим квадраты, отвечающие концам букв Y, по параллельным переносам, учитывая, конечно, данную графическую

Исследование было поддержано грантами РФФИ-11-01-00605, НШ-1414.2012.1, а также целевыми программами УрО РАН (совместный проект 12-С-1-1018/1 и проект ОМН РАН 12-Т-1-1003/2). Первый автор благодарен Институту Высших Научных Исследований Франции (IHES), где была выполнена часть работы, и профессору М. Концевичу за постановку проблемы.

схему. См. рис. 2, где показаны геометрические реализации схем на рис. 1. В результате получится полный крендель некоторого рода, на крае которого можно видеть узор из квадратов, дуг и нескольких окружностей. Дуги и окружности составлены из угловых точек кренделя, причем дуги соединяют вершины оставшихся свободными квадратов. Заключительный шаг построения многообразия состоит в заклеивании окружностей узора ручками индекса 2. В результате получается трехмерное многообразие, на крае которого остается узор из квадратов и соединяющих их дуг.

Гипотеза (М. Концевич) *Две операции эквивалентны тогда и только тогда, когда отвечающие им многообразия с узорами гомеоморфны (как пары).*

Эта гипотеза представляется весьма важной, как и любое высказывание о глубокой неочевидной связи между алгеброй и топологией.

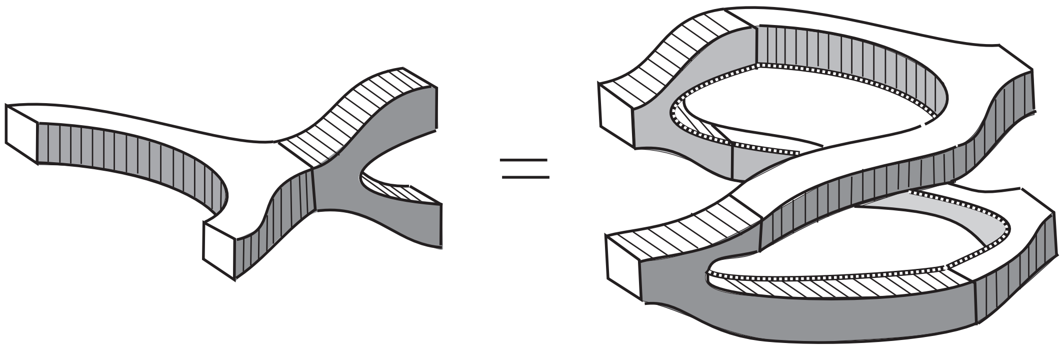


Рис. 2

Для эквивалентных операций на рис. 1 эта гипотеза верна, поскольку после приклеивания к правому полному тору на рис. 2 ручки индекса 2 вдоль единственной окружности узора получается шар с тем же узором, что и шар слева. Отсюда следует, что в одну сторону гипотеза справедлива, т.е. что эквивалентность операций влечет гомеоморфность многообразий с узорами. Трудная часть гипотезы заключается в доказательстве того, что неэквивалентные операции дают негомеоморфные многообразия с узорами.

Большая часть доклада будет посвящена описанию экспериментальной компьютерной проверки этой части гипотезы. Проблема в том, что алгоритм распознавания гомеоморфности многообразий с узорами хотя и существует, но супер-супер-экспоненциален. Наш метод состоит в устранении узора с помощью всевозможных склеиваний квадратов и приклейкой новых ручек индекса 2 по появившимся окружностям узора. Различность получившихся новых многообразий без узоров (гарантирующая различность исходных многообразий с узорами) проверялась с помощью вычисления различных инвариантов, в том числе, инвариантов Тураева-Виро, о которых будет рассказано отдельно. Оказалось, что гипотеза верна для всех операций из A в A, составленных из ≤ 14 умножений и коумножений (всего более 50 тысяч операций). Исключением являются несколько пар многообразий, для доказательства различности которых инвариантов не хватило.

Челябинский государственный университет, Челябинск, 454001 и Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, 620990

E-mail address: matveev@csu.ru, trk@csu.ru

AREA FORMULAE FOR NON-EUCLIDEAN POLYGONS

ALEXANDER MEDNYKH

The Heron formula (c. 60 BC) relates the area of an Euclidean triangle to its side lengths. Indian mathematician and astronomer Brahmagupta, in the seventh century, gave the analogous formulas for a convex cyclic quadrilateral. German mathematician Carl Bretschneider (1842) related the area of an arbitrary Euclidean quadrilateral to its side lengths and the sum of two opposite angles. Several non-Euclidean versions of the Heron theorem are know for a long time.

In this lecture we consider a convex hyperbolic quadrilateral inscribed in a circle, horocycle or one branch of equidistant curve. This is a natural hyperbolic analog of the cyclic quadrilateral in the Euclidean plane. We find a few versions of the Brahmahupta formula for such quadrilaterals and consider some generalizations of the Bretschneider theorem for hyperbolic and spherical cases.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk 630090, Russia
E-mail address: smedn@mail.ru

Thank grants if you wish.

ON STABILITY OF A CERTAIN GEOMETRIC CRITERION OF QUASICONFORMALITY IN THE PLANE

VLADISLAV ASEEV

Given a comlex number $\lambda \neq 0, 1$ consider the local homeomorphic mapping $f : D \to f(D) \subset \bar{\mathbf{C}}$ of a domain $D \subset \bar{\mathbf{C}}$. A mapping f is said to have the property $\mathfrak{R}[\lambda; \delta]$ $(\delta \geq 0)$ provided that any point $z \in D$ has an open neighborhood $U \subset D$ such that $f|U$ is injective and for every quadruple $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ of distinct points in U with anharmonic ratio $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \lambda$ the estimate

$$|[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] - \lambda| \leq \delta \cdot \min\{|\lambda|, |1 - \lambda|\}$$

holds. The case $\delta = 0$ was investigated in papers [1]-[2], where the Möbius property has been derived from the condition $\mathfrak{R}[\lambda; 0]$ for local injective and Borel measurable mappings. In particular, $\mathfrak{R}[\lambda; 0]$ implies 1-quasiconformality of f. The following theorem gives the stability of that geometric criterion.

Theorem. Given $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ and $\psi(\lambda) := 16|\lambda|^2 + 88|\lambda| + 96$ the property $\mathfrak{R}[\lambda; \delta]$ with $0 \leq \delta < 1/\psi(\lambda)$ implies the local K-quasiconformality of f with the following upper estimate

$$K[f] \leq \sqrt{1 + \delta^2(\psi(\lambda))^2} + \delta \cdot \psi(\lambda)$$

for it's coefficient of quasiconformality. In case $\lambda = a + ib \neq 0, 1$ with $b \neq 0$ the following estimate

$$K[f] \leq 1 + \delta \sqrt{1 + \frac{\min\{a^2, (1 - a)^2\}}{b^2}}$$

is also true. In particular, $K[f] \leq 1 + \delta$ when $a \in \{0, 1\}$ and $b \neq 0$.

References

[1] V. Aseev, T. Kergylova, "On transformations that preserve fixed anharmonic ratio", *Tokyo J. Math.*, 33, No. 2, pp. 365-371 (2010).

[2] T. A. Kergilova, "Injective Borel-measurable mappings preserving a prescribed cross-ratio up to the complex conjugation are necessarily Möbius transformations" (Russian. English summary), *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.* 10, No. 4, 68-81 (2010).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk 630090, Russia
E-mail address: btp@math.nsc.ru, ase@math.nsc.ru

ВЫПУКЛЫЕ ПЯТИУГОЛЬНИКИ, ЗАМОЩАЮЩИЕ ПЛОСКОСТЬ

ОЛЬГА БАГИНА

Пусть имеется неограниченный запас одинаковых по форме фигур. Если ими можно замостить всю плоскость без зазоров и наложений, то есть так, что ни какие две фигуры не будут иметь общих внутренних точек, то о таких фигурах говорят, что ими можно выложить плоскость. Плоскость, выложенную фигурами, называют мозаикой, а саму фигуру — плиткой этой мозаики. Такие мозаики называют моноэдральными. Будем называть многоугольник мозаичным, если существует замощение плоскости многоугольниками, конгруэнтными данному.

Многие мозаики обладают симметриями, то есть они совмещаются с собой под действием некоторого движения плоскости. Если среди симметрий мозаики есть две неколлинеарные трансляции, то мозаика является периодической. Если группа симметрий мозаики действует транзитивно на плитках, т. е. каждая плитка мозаики может быть переведена в любую другую плитку мозаики с помощью симметрии этой мозаики, то такая мозаика называется изоэдральной или транзитивной на плитках. Кроме того, часто рассматриваются мозаики, называемые мозаиками ребро к ребру. Для любых двух плиток такой мозаики выполняется одно из следующих условий: 1) плитки не имеют общих точек; 2) плитки имеют ровно одну общую вершину; 3) плитки имеют ровно одно общее ребро.

Остается до сих пор нерешенной задача нахождения и классификации мозаичных многоугольников. Любой треугольник и четырехугольник замощает плоскость. Известно, что выпуклым многоугольником, имеющим более 6 сторон, замостить плоскость невозможно. Мозаики из шестиугольников были полностью исследованы в 1918 г. Рейнхардом в его докторской диссертации [3]. Таких шестиугольников оказалось 3 различных типа.

Проблема построения исчерпывающей классификации выпуклых пятиугольников, которыми можно замостить плоскость, остается до сих пор нерешенной. Было найдено 14 типов таких пятиугольников. Но до сих пор нет доказательства полноты имеющегося перечня.

Обозначим последовательные вершины пятиугольника X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, его углы — соответственно x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Длины сторон пятиугольника $C_i = |X_{i-1}X_i|, i = 0, 1, 2, 3, 4$, индексы в последнем равенстве берутся по модулю 5. Известны следующие типы пятиугольников, замощающих плоскость:

1. $x_0 + x_1 = 180°$;
2. $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3$;
3. $x_0 = x_2 = x_3 = 120°, C_0 = C_1, C_3 = C_2 + C_4$;
4. $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
5. $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
6. $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$;
7. $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
8. $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
9. $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
10. $x_4 = 90°, x_0 + x_3 = 180°, 2x_1 - x_3 = 180°, 2x_2 + x_3 = 360°, C_0 = C_4 = C_1 + C_3$;
11. $x_0 = 90°, x_2 + x_4 = 180°, 2x_1 + x_2 = 360°, C_3 = C_4 = 2C_0 + C_2$;
12. $x_0 = 90°, x_2 + x_4 = 180°, 2x_1 + x_2 = 360°, 2C_0 = C_3 = C_2 + C_4$;
13. $x_0 = x_2 = 90°, 2x_1 = 2x_4 = 360° - x_3, C_2 = C_3, 2C_2 = C_4$;
14. $x_3 = 90°, x_0 + x_2 = 180°, x_0 + 2x_4 = 360°, C_0 = 2C_2 = 2C_4$.

Мною была получена полная классификация мозаичных пятиугольников, замощающих плоскость ребро к ребру [1].

Теорема 1.

Пятиугольник, замощающий плоскость ребро к ребру, относится к одному из следующих типов:
1. $x_0 + x_1 = 180°, C_0 = C_2$ *или* $C_3 = C_4$;
2. $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3, C_0 = C_2$;
3. $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
4. $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
5. $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$;
6. $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°; C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
7. $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
8. $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$.

Недавно аналогичный результат был получен японским автором Сугимото [4].

Доказательство теоремы 1 включает в себя полный перебор, который основывается на следующем. Назовем степенью вершины P число сходящихся в ней пятиугольников. Пусть $(\alpha_0, \ldots, \alpha_4)$ — набор степеней всех вершин P, упорядоченных по возрастанию.

Теорема 2.

В любой ребро к ребру пятиугольной мозаике найдется хотя бы один пятиугольник, для которого набор степеней вершин может быть одним из следующих: $(3, 3, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 3, 3, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 5)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$.

Плитка P мозаики, удовлетворяющая заключению теоремы 2, называется центральной. Обозначим T_i - множество пятиугольников, углы и стороны которых удовлетворяют соотношениям, перечисленным в i-м пункте теоремы 1, $i = 1, \ldots, 8$. Вводится понятие типа пятиугольника $\delta(P)$, которое проще всего продемонстрировать на примере, запись $\delta(P) = 11212$ означает, что $C_0 = C_1 = C_3, C_2 = C_4, C_0 \neq C_2$. Имеется ровно 12 различных типов $\delta(P)$: 12345, 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212, 11223, 11123, 11122, 11112, 11111.

Короной для плитки P называется некоторое множество плиток, конгруэнтных P, удовлетворяющее условиям:
1)плитки этого множества замощают часть V плоскости;
2)плитка P содержится внутри V;
3)это множество минимально с этими двумя условиями.

Для существования мозаики из пятиугольников, необходимо, но не достаточно существование короны для каждого пятиугольника мозаики. Поиск корон для центральной плитки P осуществляется последовательно для каждого типа $\delta(P)$.

Первые девять типов рассмотрены в [1]. Тип 11111 рассмотрен в [2]. По оставшимся типам 11122, 11112 представлена статья к публикации.

Список литературы

[1] О. Г. Багина, “Мозаики из выпуклых пятиугольников”, *Вестник КемГУ*, No. 4(48), 63–73 (2011).

[2] O. Bagina, “Tiling the Plane with Congruent Equilateral Convex Pentagons”, *J. Combin. Theory. Ser. A*, No. 2(105), 221–232 (2004).

[3] K. Reinhardt, *Uber die Zerlegung der Ebene in Polygone*, Dissertation, Universit ät Frankfurt, (1918).

[4] T. Sugimoto, “Classification of Convex Pentagons That Can Generate Edge-to-edge Monohedral Tilings of The Plane”, *Forma*, (submitted to).

Кемеровский государственный университет, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: ogbag@mail.ru

НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ НА МНОГООБРАЗИЯХ КАРНО С C^1-ГЛАДКИМИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ

СЕРГЕЙ БАСАЛАЕВ

Связное N-мерное гладкое многообразие $\mathbb{M}$ назовём *многообразием Карно*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ задана фильтрация

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$$

подрасслоениями такими, что в окрестности каждой точки $U(g) \subset \mathbb{M}$ найдется семейство C^1-гладких векторных полей $X_1, \dots, X_N$, удовлетворяющих следующим двум свойствам. Для каждого $v \in U$ имеем

(1) $H_i\mathbb{M}(v) = H_i(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\}$ — подпространство $T_v\mathbb{M}$ постоянной размерности $\dim H_i$, $i = 1, \dots, M$;

(2) $H_{j+1} = \operatorname{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$, $j = 1, \dots, M-1$.

В работе [1] получены Ball-Box теорема и свойство удвоения меры для такого класса многообразий. Используя эти результаты и неравенство Пуанкаре на группах Карно из работы [2], мы получаем следующий аналог неравенства Пуанкаре.

Теорема 1.

Пусть $E \in \mathcal{M}$ — компактное множество, и $1 \le p < \infty$. Найдутся такие постоянные $C > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что

$$\Big(\int\limits_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}|^p \, dy \Big)^{\frac{1}{p}} \le C_p r \Big(\int\limits_{B(x,r)} \sum_{i=1}^{\dim H_1} |X_i u(y)|^p \, dy \Big)^{\frac{1}{p}}$$

для любой точки $x \in E$, радиуса $0 < r \le r_0$ и любой функции $f \in C^\infty(\overline{B^g(r_0)})$. Здесь $u_{B(x,r)} = \mathcal{H}^\nu(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy$.

Данная теорема обобщает результат, полученный в работе [3] для достаточно гладких векторных полей и $p = 2$. Также, результаты работы [4] позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 2.

Пусть выполнены условия теоремы 1 и хаусдорфова размерность пространства $\mathcal{M}$ равна ν. Тогда:

(1) *Если $p < \nu$, то для всякого $0 < q < \frac{\nu p}{\nu - p}$ выполнено*

$$\Big(\int\limits_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}|^q \, dy \Big)^{\frac{1}{q}} \le C r \Big(\int\limits_{B(x,r)} \sum_{i=1}^{\dim H_1} |X_i u(y)|^p \, dy \Big)^{\frac{1}{p}};$$

(2) *Если $p = \nu$, то*

$$\int\limits_{B(x,r)} \exp\Big(\frac{C_1 |u(y) - u_{B(x,r)}|}{\|(X_1 u, \dots, X_{\dim H_1} u)\|_{L^\nu(B(x,r))}} \Big) \, dy \le C_2;$$

Работа выполнена при частичной поддержке проектами РФФИ: 11-01-00819-а; и Научные школы: НШ-921.2012.1.

(3) *Если* $p > \nu$, *то выполнено*

$$\sup_{y\in B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}| \leq Cr\Big(\int\limits_{B(x,r)} \sum_{i=1}^{\dim H_1} |X_i u(y)|^p\,dy\Big)^{\frac{1}{p}};$$

где константы C, C_1, C_2 *зависят только от* p, q, ν, C_p.

Список литературы

[1] S. Basalaev, S. Vodopyanov, “Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces”, `arXiv:1206.5197v2 [math.MG]`

[2] D. V. Isangulova, S. K. Vodopyanov, “Coercitive estimates and integral representation formulas on Carnot groups”, *Eurasian Math. J.* 1, No. 3, 58–96 (2010).

[3] D. Jerison, “The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander’s condition”, *Duke Math. J.* 53, No. 2, 503–523 (1986).

[4] P. Hajłasz, P. Koskela, “Sobolev Met Poincaré”, *Mem. Amer. Math. Soc.* 145, No. 688, x-101 (2000).

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: `sbasalaev@gmail.com`

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЭРМИТОВЫХ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

АЛИЯ БУКУШЕВА

Задание почти контактной метрической структуры $(X, \varphi, g, \eta, \vec{\xi})$ предполагает, в частности, задание оператора φ, действующего в касательном расслоении к гладкому многообразию X. Квадрат ограничения этого оператора на распределении $D = ker\eta$ равен -1: $\varphi^2(\vec{x}) = -\vec{x}$, $\vec{x} \in \Gamma(D)$, что указывает на некоторую близость почти контактных метрических пространств с почти комплексными пространствами. Схожесть результатов, полученных при исследовании указанных пространств, усиливается для некоторых классов почти контактных метрических многообразий. Исторически более рано начавшая свое развитие теория почти комплексных пространств с подходящей римановой метрикой определенным образом задает тон в исследовании почти контактных метрических пространств. Одним из самых ярких результатов в рассматриваемом контексте является следующее утверждение (см., например, [1]): на многообразии $X \times R$ индуцируется почти комплексная структура $J(\vec{x}, f\frac{d}{dt}) = (\varphi\vec{x} - f\vec{\xi}, \eta(\vec{x})\frac{d}{dt})$, интегрируемость которой тесно связана со свойствами структуры $(X, \varphi, g, \eta, \vec{\xi})$. Так, например, структура J оказывается интегрируемой, если структура $(X, \varphi, g, \eta, \vec{\xi})$ является Сасакиевой. Существуют различные точки зрения на то, какими свойствами должна обладать структура φ, претендующая на звание "интегрируемой". Имеет место следующая теорема (см., например, [2]).

Теорема.

CR-структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ выполняются условия

$$1.\, [\vec{x}, \varphi\vec{y}] + [\varphi\vec{x}, \vec{y}] \in \Gamma(D), \quad 2.\, \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi[J\vec{x}, \vec{y}] = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] - [\vec{x}, \vec{y}].$$

Другой смысл в условие интегрируемости структуры φ вкладывается в работе [3]: структура φ называется интегрируемой, если ее компоненты постоянны в некотором атласе, состоящем из адаптированных карт [3]. В цитируемой работе почти контактное метрическое пространство с интегрируемой структурой φ было названо эрмитовым почти контактным метрическим пространством. В настоящей работе мы показываем, что эрмитовы почти контактные метрическим пространства не сводятся к многообразиям Сасаки и обладают свойствами, подтверждающими целесообразность их названия. Пусть в пространстве $R^7 \backslash (\vec{0})$ распределение D порождается векторными полями вида $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_7$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3 - x^4\partial_7$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\vec{e}_5 = \partial_5 - x^6\partial_7$, ∂_6. Легко проверить, что введенная с помощью равенств $\varphi(\partial_7) = 0$, $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_3$, $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_5$, $\varphi(\vec{e}_4) = \vec{e}_6$ структура φ интегрируема, но не принадлежит независимо от задания метрики ни к какой структуре Сасаки. С другой стороны, эрмитовы почти контактные метрические пространства обладают многими из важных свойств многообразий Сасаки. Так, например, имеет место следующая теорема.

Теорема.

Пусть Y n-мерное подмногообразие $2m+1$-мерно эрмитова почти контактного метрического пространства. Если вектор $\vec{\xi}$ нормален к Y, то при $m \geq n$ многообразие Y антиинвариантно относительно φ.

Список литературы

[1] G. Pitis, “Hamiltonian fields and energy in contact manifolds”, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 5, No. 1, 63–67 (2008).

[2] C. P. Boyer, K. Galicki, “Einstein manifolds and contact geometry”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129, No. 8, 2419–2430 (2001).

[3] С. В. Галаев, “Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразований”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.*, Т. 12, Вып. 1, 16–22 (2012).

Саратовский государственный университет имени Н.Г, Чернышевского, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: bukusheva@list.ru

ON VASSILIEV INVARIANTS OF BRAID GROUPS OF THE SPHERE

VLADIMIR VERSHININ

We construct a universal Vassiliev invariant for braid groups of the sphere and the mapping class groups of the sphere with n punctures. The case of a sphere is different from the classical braid groups or braids of oriented surfaces of genus strictly greater than zero, since Vassiliev invariants in a group without 2-torsion do not distinguish elements of braid group of a sphere.

This is a joint work with Nizar Kaabi [1].

References

[1] N. Kaabi, V. V. Vershinin, "On Vassiliev Invariants of Braid Groups of the Sphere. ", *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia*, 58 , 213-232 (2011).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: versh@math.nsc.ru

СОХРАНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ СПЛАЙНАМИ

ЮРИЙ ВОЛКОВ, ВАЛЕРИЙ ШЕВАЛДИН

В настоящее время основным инструментом при автоматизированном геометрическом проектировании (CAGD) и математическом моделировании, связанным с аппроксимацией функций, являются сплайны. Сплайны, как инструмент приближения, обладают прекрасными аппроксимативными свойствами, с ними легко оперировать при практическом использовании. Однако геометрическое моделирование с наиболее употребительными классическими полиномиальными сплайнами иногда наталкивается на определённые трудности. Например, кубические интерполяционные сплайны не наследуют такие геометрические характеристики интерполируемой функции как монотонность или выпуклость.

В докладе рассматриваются вопросы наследования формосохраняющих свойств (k-монотонности) в задачах интерполяции и аппроксимации сплайнами. Основное внимание уделено классическим кубическим и параболическим сплайнам. Установлены условия на данные, позволяющие получить аппроксимант с требуемыми условиями k-монотонности.

Список литературы

[1] Ю. С. Волков, В. В. Богданов, В. Л. Мирошниченко, В. Т. Шевалдин, “Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами”, *Математические заметки*, 88, No. 6, 836–844 (2010).

[2] Ю. С. Волков, Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин, “Локальная аппроксимация сплайнами со смещением узлов”, *Математические труды*, 14, No. 2, 73–82 (2011).

[3] Ю. С. Волков, “Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену”, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 18, No. 4 (2012).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: volkov@math.nsc.ru

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, 620990, Россия
E-mail address: valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Работа выполнена прифинансовой поддержке грантами совместного Интеграционного проекта СО РАН и УрО РАН (код проекта 2012-32) и РФФИ (код проекта 11-07-00447).

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА КРИВИЗНЫ КОНФОРМНО (ПОЛУ)ПЛОСКИХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК

ОЛЕСЯ ГЛАДУНОВА, ЕВГЕНИЙ РОДИОНОВ, ВИКТОР СЛАВСКИЙ

Исследованию спектра операторов в расслоениях тензорных полей над римановыми многообразиями посвящены работы многих математиков [1, 2]. В данной работе изучается спектр оператора римановой кривизны в расслоении бивекторов над римановым многообразием с конформно (полу)плоской метрикой. В случае конформно плоских римановых метрик доказывается структурная теорема о спектре оператора римановой кривизны. Более подробно исследуется случай конформно плоских однородных римановых пространств. Приводятся примеры, показывающие на различие между конформно плоским и конформно полуплоским римановыми случаями.

Список литературы

[1] В. Н. Берестовский, В. М. Свиркин, "Оператор Лапласа на однородных нормальных римановых многообразиях", *Математические труды*, 12, No. 2, 3–40 (2009).
[2] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, (1987).

Алтайский государственный университет, Барнаул , 656064, Россия

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, 628012, Россия
E-mail address: gladunova_olesya@mail.ru, edr2002@mail.ru, slavsky2004@mail.ru

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

К ТЕОРЕМЕ ГРОМОВА ОБ ОДНОРОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМАТИЗАЦИИ

АЛЕКСАНДР ГРЕШНОВ

На некоторой области $U \subset \mathbb{R}^N$ рассмотрим базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^1(U)$, т. е. $\operatorname{rank}\langle X_1, \ldots, X_N\rangle(x) = N \quad \forall x \in U$, $\sup\limits_{x \in U} \|X(x)\| < C_U = \text{const}$. Зафиксируем точку $g \in U$ и рассмотрим отображения $\theta_g : (a_1, \ldots, a_N) \to \exp(X_a)(g)$, где $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $X_a = \sum\limits_{i=1}^N a_i X_i$, и $\vartheta_g^i : (a_1, \ldots, a_N) \to \exp(X_{i_N}) \circ \ldots \exp(X_{i_1})(g)$, $(i_1, \ldots i_N) = \pi_i(1, \ldots, N)$, где π_i — некоторая перестановкаовка набора $(1, \ldots, N)$, а символом $\exp(Y)(g)$ мы обозначаем концевую точку интегральной линии $\exp(tY)(g)$ векторного поля Y единичной временной длины, выпущенной из точки g. Из известных фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, см., например, [1], что для каждой точки $g \in U$ найдется некоторая окрестность начала координат $O_g \subset \mathbb{R}^N$ такая, что отображения θ_g, ϑ_g^i будут диффеоморфизмами на O_g. Отобажения θ_g, ϑ_g^i называются каноническими координатами 1-го и 2-го рода соответственно, см., например, [2]; отображение θ_g также называют экспоненциальным отображением. Символом ϑ_g обозначим координатное отображение 2-го рода, индуцированное перестановкой $\pi(1, \ldots, N) = (N, N-1, \ldots, 1)$. Предположим, что базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^r(U)$, $r \geq 1$, формально градуированные степенями, т. е. каждому векторному полю X_i присвоено некоторое натуральное число $\deg X_i$, принадлежащее множеству $\{1, \ldots, N\}$, $\Upsilon = \max\limits_{i=1,\ldots,N} \deg X_i$, удовлетворяют в U следующей таблице коммутаторов $[X_i, X_j] = \sum\limits_{\deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} C_{ij}^k X_k$, $C_{ij}^k \in C^{r-1}(U)$. Тогда говорим, что базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N}$ удовлетворяют в U условию $(+\deg)$. В первой половине 90-х годов прошлого столетия М. Громов в своей известной работе [3] опубликовал следующую теорему 1 о нильпотентной аппроксимации C^1-гладких базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$.

Теорема 1.
В некоторой окрестности начала координат $O_g \subset \mathbb{R}^N$ имеют место следующие равномерные сходимости: $(\delta_{1/\varepsilon})_* \varepsilon^{\deg X_i} (\vartheta_g^{-1})_* X_i \to_{\varepsilon \to 0} \widehat{X}_i^g$, $i = 1, \ldots, N$. *Векторные поля $\{\widehat{X}_i^g\}_{i=1,\ldots,N}$ в окрестности O_g удовлетворяют следующей таблице коммутаторов*

$$[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g] = \sum_{\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k} \widehat{C}_{ij}^k \widehat{X}_k^g, \quad \widehat{C}_{ij}^k = C_{ij}^k(g) = \text{const},$$

и образуют базис некоторой алгебры Ли L_g со структурными константами $\widehat{C}_{ij}^k$.

Здесь $\delta_{1/\varepsilon}(x_1, \ldots, x_N) = (\varepsilon^{-\deg X_i} x_1, \ldots, \varepsilon^{-\deg X_N} x_N)$. Векторные поля $\{(\theta_g)_* \widehat{X}_i^g\}_{i=1,\ldots,N}$ называются однородной нильпотентной аппроксимацией векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N}$ в окрестности точки g, см. [2]. Однородная нильпотентная аппроксимация играет важную роль в теории субэллиптических уравнений [4], в задачах оптимального контроля, и др. Следует отметить, что методы построения однородной нильпотентной аппроксимации в C^∞-случае были достаточно хорошо разработаны в 70–90 гг. прошлого столетия, см. [2, 5]. В начале 2000-х годов интерес к теореме Громова о нильпотентной аппроксимации был существенно инициирован вопросами неголономной геометрии при минимальных предположениях на гладкость векторных полей, см., например, [6, 7]. Детальное рассмотрение

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ, код 11-01-00819-а.

схемы доказательста теоремы 1 выявило ее недостатки. В частности, в работе С. К. Водопьянова и М. Б. Кармановой [7] в $\mathbb{R}^3$ был приведен пример отображения ϑ_g класса C^∞, для которого не выполняются свойства, лежащие в основе рассуждений Громова. Позже теорема об однородной нильпотентной аппроксимации для базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, была доказана для канонических векторных полей класса C^1 (и, как следствие, для общих векторных полей класса C^2) [8], для общих векторных полей класса $C^{1,\alpha}$ [9] методами, отличными от подхода работы [3].

Используя подход работы [8], основанный на классическом выводе второй теоремы Ли [10], нами установлена следующая

Теорема 2 о нильпотентной аппроксимации C^1-гладких базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$.

В некоторой окрестности начала координат $O_g \subset \mathbb{R}^N$ имеют место следующие равномерные сходимости: $\delta_{1/\varepsilon}\varepsilon^{\deg X_i}(\theta_g^{-1})_* X_i \to_{\varepsilon\to 0} \widehat{X}_i^g$, $i = 1, \ldots, N$. *Векторные поля* $\{\widehat{X}_i^g\}_{i=1,\ldots,N}$ *в окрестности O_g удовлетворяют следующей таблице коммутаторов*

$$[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g] = \sum_{\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k} \widehat{C}_{ij}^k \widehat{X}_k^g, \quad \widehat{C}_{ij}^k = C_{ij}^k(g) = \mathrm{const},$$

и образуют базис некоторой алгебры Ли L_g со структурными константами $\widehat{C}_{ij}^k$.

Список литературы

[1] Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, М.: Физматлит, (1961).

[2] A. Belläiche, “The tangent space in sub-Riemannian geometry”, *Sub-Reimannian geometry*, Basel: Birkhäuser, 1–78 (1996).

[3] M. Gromov, “Carnot-Caratheodory spaces seen from within”, *Sub-Reimannian geometry*, Basel: Birkhäuser, 79–323 (1996).

[4] L. P. Rothchild, E. S. Stein, “Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups”, *Acta Math.*, 137, 247–320 (1976).

[5] G. Metivier, “Fonction spectrale et valeurs proposes d’une classe d’operateurs”, *Comm. Partial Differential Equations*, 1, 479–519 (1976).

[6] A. Montanari, D. Morbidelli, “Nonsmooth Hërmander vector fields and their controlled balls”, `arXiv:0812.2369v1`

[7] С. К. Водопьянов, М. Б. Карманова, “Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей”, *Докл. АН.*, 422, No. 5, 583–588 (2008).

[8] А. В. Грешнов “О применении методов группового анализа дифференциальных уравнений для некоторых систем C^1-гладких некоммутирующих векторных полей”, *Сиб. мат. журн.*, 50, No. 1, 47–62 (2009).

[9] М. Б. Карманова, “Сходимость масштабированных векторных полей и локальная аппроксимационая теорема на пространствах Карно — Каратеодори и приложения”, *Докл. АН.*, 440, No. 6, 736–742 (2011).

[10] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М.: Наука, (1978).

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: `greshnov@math.nsc.ru`

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ХРОНОГЕОМЕТРИЯ

АЛЕКСАНДР ГУЦ

Аксиоматическая теория относительности, созданная А.Д. Александровым и названная им хроногеометрией [1], основана на классической аффинной геометрии, моделью для которой является 4-мерное арифметической пространство $\mathbb{R}^4$, где $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел.

В классической аффинной геометрии плоскости любая прямая либо не имеет общих точек с окружностью, либо имеет две или одну общую точку. Последний случай именуется точкой касания прямой и окружности. Однако древнегреческий философ Протогор говорил о том, что для него очевидно, что случай касания в одной точке невозможен.

Можно ли построить такую аффинную геометрию, которая отвечала бы умонастроению Протогора? Если такая геометрия существует, то какими физическими свойствами, отличными от классической специальной теории относительности, будет обладать новая неклассическая хроногеометрия?

Реализуя идеи Уильяма Ловера, датский математик Кок создал Синтетическую дифференциальную геометрию [2], в которой поле $\mathbb{R}$ заменяется на коммутативное кольцо R и принимается следующая аксиома Кока-Ловера:

$$\forall(f \in R^D)\exists!(a,b) \in R \times R \forall d \in D(f(d) = a + b \cdot d),$$

где

$$D = \{x \in R : x^2 = 0\}.$$

Объект D состоит из так называемых инфинитозималов. Именно в его элементах происходит касание прямой $\{(x,0) \in R^2 : x \in R\}$ и окружности

$$\{(x,y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 = 1\}.$$

Аксиома Кока-Ловера несовместима с законом исключенного третьего. Поэтому формально построенная новая интуиционистская хроногеометрия не может иметь теоретико-множественных моделей. Ее модели являются топосами. Наиболее известными являются гладкие топосы, для которых $R^4 \cong C^\infty(\mathbb{R}^4)$.

Интуиционистское пространство-время Минковского $< R^4, g >$, где

$$g(x,y) = x^0y^0 - \sum_{i=1}^{3} x^iy^i,$$

$$R^4 = \{(x^0,x^1,x^2,x^3) : x^i \in R\}.$$

построенное в рамках Синтетической дифференциальной геометрии, в отличие от классики, допускает векторы ξ такие, что их квадрат длины одновременно больше либо равен, и меньше либо равен нулю, т.е. $0 \le |\xi|^2 \le 0$ [3, Приложение 2]. Эти векторы – *близкие к световым* – позволяют иначе смотреть на распространение света (или некой иной неизвестной сегодня субстанции).

Список литературы

[1] A. Alexandrov, “Contribution to Chronogeometry”, *Canad. J. Math.*, 19, No. 6, 1119–1128 (1967).
[2] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge University Press, (1981).
[3] А. Гуц, *Элементы теории времени*, М.: УРСС, (2012).

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, 644077, Россия
E-mail address: guts@omsu.ru

О ПОВЕДЕНИИ ТЕНЗОРА НЕЙЕНХЕЙСА НА 6-МЕРНОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

НАТАЛИЯ ДАУРЦЕВА, АНАСТАСИЯ ТАРАСЕНКО

Пусть (M, I) шестимерное почти комплексное многообразие. Если почти комплексная структура I индуцирована некоторой комплексной структурой на M, то говорят, что I – комплексная или интегрируемая. Ключевую роль в вопросе интегрируемости играет тензор Нейенхейса $N : \Lambda^2 T^{1,0}(M) \longrightarrow T^{0,1}(M)$. Известно [3], что тензор Нейенхейса на M тождественно равен нулю в том и только том случае, если I интегрируема. Однако, тензор Нейенхейса важен не только в решении вопросов интегрируемости. Например, если (M, I) почти комплексное 6-многообразие с нигде не вырожденным тензором Нейенхейса N, допускающее эрмитову связность с тотально кососимметричным кручением, то на нем можно определить нигде не вырожденную действительную форму объема $\mathrm{Vol}_I := \det N^* \otimes \overline{\det N^*}$. В работе М. Вербитского [4] показано, что в этом случае функционал $I \longrightarrow \int_M \mathrm{Vol}_I$ имеет критическую точку в I в том и только том случае, если (M, I) допускает приблизительно келерову метрику. В статье [2] исследуется двухпараметрическое семейство функционалов связанных с тензором Нейенхейса, их критические точки и связь с квази-интегрируемыми и приблизительно-келеровыми структурами.

В нашей работе изучается поведение тензора Нейенхейса на 6-мерной группе Гейезенберга G. Рассматривается пространство $\mathcal{A}^+$ всех левоинвариантных почти комплексных структур на G, сохраняющих ориентацию. Зафиксируем стандартную левоинвариантную метрику g на G. Тогда [5] пространство $\mathcal{A}^+$ имеет структуру расслоения над пространством $\mathcal{AO}_g^+$ всех g-ортогональных левоинвариантных почти комплексных структур, сохраняющих ориентацию. Причем слоем над $I \in \mathcal{AO}_g^+$ является пространство $\mathcal{A}_{\omega_I}^+ = \{J \in \mathcal{A}^+ : \omega_I(JX, JY) = \omega_I(X, Y)\}$, положительно ассоциированных с формой $\omega_I(X, Y) := g(IX, Y)$ почти комплексных структур. База такого расслоения в случае размерности 6 есть однородное пространство $SO(6)/U(3) = \mathbb{CP}^3$. Представление $\mathbb{CP}^3$ в виде 6-мерного тетраэдра [1] с гранями $\mathbb{CP}^2$ и ребрами $\mathbb{CP}^1$ позволяет получить явное описание ортогональных левоинвариантных почти комплексных структур на G [6].

В настоящей работе найден тензор Нейенхейса $N(I)$ и квадрат его нормы для произвольной почти комплексной структуры $I \in \mathcal{AO}_g^+$ в параметризации [6]. Исследованы экстремальные значения квадрата нормы тензора Нейенхейса на $\mathcal{AO}_g^+$. Также изучается вопрос о поведении тензора Нейенхейса при деформации ортогональной почти комплексной структуры $I \in \mathcal{AO}_g^+$ вдоль слоя $\mathcal{A}_{\omega_I}^+$.

Список литературы

[1] E. Abbena, S. Garbiero, S. Salamon, “Almost Hermitian geometry on six dimensional nilmanifolds”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* , 30, 147—170 (2001).

[2] R. Brayant, “On the geometry of almost complex 6-manifolds”, *Asian Journ. of Math.*, 10, 561–606 (2006).

[3] A. Newlander, L. Nirenberg, “Complex analytic coordinates in almost complex manifolds”, *Ann. of Math.*, 65, 391–404 (1957).

[4] M. Verbitsky, “An intrinsic volume functional on almost complex 6-manifolds and nearly Kähler geometry”, preprint, July 2005, `arXiv:math.DG/0507179`

[5] Н. А. Даурцева, “О многообразии почти комплексных структур”, *Матем. заметки.*, 78, N 1, 66–71 (2005).

[6] Н. А. Даурцева, “Пространство левоинвариантных ортогональных почти комплексных структур на 6-мерных группах Ли.”, *Вестник КемГУ*, 3/1, 134–139 (2011), `arXiv:math.DG/1201.2998`

Работа поддержана грантом РФФИ, 12-01-00873-а и грантом Президента РФ по поддержке научных школ, проект НШ-544.2012.1.

Кемеровский Государственнй Университет, Красная 6, 650000 Кемерово, Россия
E-mail address: natali0112@ngs.ru

ИНВАРИАНТНОСТЬ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

НИКИТА ЕВСЕЕВ

Изучаются измеримые отображения $\varphi : D \to D'$, порождающие ограниченный оператор вложения весовых пространств Соболева $L^1_p(D', v)$ и $L^1_q(D, u)$ на группе Карно $\mathbb{G}$. Получены необходимые и достаточные условия аналитических свойств таких отображений, в описании которых применяется весовая функция искажения.

Группа Карно $\mathbb{G}$ это связная односвязная стратифицированная нильпотентная группа Ли. Ее алгебра Ли $\mathbb{G}$ является прямой суммой подпрострасть: $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, и $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ для $j = 1, \dots, m-1$, тогда как $[V_1, V_m] = \{0\}$. Пространство V_1 называется горизонтальным подпространством.

Пусть D — открытое подмножество $\mathbb{G}$ и пусть $w : \mathbb{G} \to [0, \infty)$ — локально суммируемая неотрицательная (*весовая*) функция. Весовое пространство Соболева $W^1_p(D, w)$ ($L^1_p(D, w)$), $1 < p < \infty$, это пространство локально интегрируемых функций, дифференцируемых в обобщенном смысле $f : D \to \mathbb{R}$, снабженное следующей нормой (полунормой):

$$\|f \mid W^1_p(D, w)\| = \Big(\int\limits_D |f|^p(x) w(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_D |\nabla f|^p(x) w(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}};$$

$$\|f \mid L^1_p(D, w)\| = \Big(\int\limits_D |\nabla f|^p(x) w(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}};$$

где ∇f — *обобщенный горизонтальный градиент*, $\nabla f = (X_1 f, \dots, X_{n_1} f)$. Векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n_1}$ образуют базис V_1, $n_1 = \dim V_1$.

Класс Макенхаупта A_p. Функция $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, если w локально интегрируемая функция такая, что

$$\sup_{B \subset \mathbb{G}} \Big(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B w\, dx\Big)\Big(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B w^{\frac{1}{1-p}}\, dx\Big)^{p-1} = c_{w,p} < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам B из $\mathbb{G}$.

Ограниченный оператор композиции. Отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор $\varphi^* : C^\infty(D') \cap L^1_p(D', v) \to L^1_q(D, u)$ по правилу композиции: $\varphi^* f = f \circ \varphi$, если

$$\big\|\varphi^* f \mid L^1_q(D, u)\big\| \le K \big\|f \mid L^1_p(D', v)\big\|.$$

Отображение φ имеет *конечное весовое искажение*, если горизонтальный дифференциал $D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве $Z_v = \{x \in D | J(x, \varphi) v(\varphi(x)) = 0\}$. *Весовая функция искажения* для такого отображения φ определяется следующим образом:

$$D' \ni y \mapsto H^{u,v}_q(y) = v^{-\frac{1}{p}}(y)\Big(\sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v)} \frac{|D\varphi|^q(x) u(x)}{|J(x, \varphi)|}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке проектами Научные школы: НШ-921.2012.1; и ФЦПК – заявка № 2012-1.1-12-000-1003-014.

Теорема 1.

Отображение $\varphi : D \to D'$ *класса* $ACL(D)$ *порождает ограниченный оператор* $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D, u)$, $1 \leq q \leq p < \infty$, *тогда и только тогда, когда* φ *имеет ограниченное весовое искажение и* $H^{u,v}_q(\cdot) \in L_\varkappa(D')$, *где* $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Норма оператора* φ^* *эквивалентна* $H^{u,v}_{p,q}(D') = \|H^{u,v}_q(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\|$.

Теорема 2.

Если весовая функция v *принадлежит классу* A_p, *тогда оператор* φ^* *может быть продолжен по непрерывности на пространство* $L^1_p(D', v)$.
Продолженный оператор $\varphi^* : L^1_p(D', v) \to L^1_q(D, u)$ *удовлетворяет следующим условиям.*

1) *Если* $f \in L^1_p(D', v)$ *— квазинепрерывный представитель, тогда* $f \circ \varphi$ *определена почти всюду и* $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ *п. в.*

2) *Если две квазинепрерывные функции* $f_1, f_2 \in L^1_p(D', v)$ *различаются на множестве емкости ноль, то* $f_1 \circ \varphi$ *и* $f_2 \circ \varphi$ *различаются на множестве меры ноль.*

3) *Отображение* $\varphi^* : f \mapsto \widetilde{f} \circ \varphi$, *где* $\widetilde{f}$ *квазинепрерывный представитель* f, *является ограниченным оператором.*

В доказательстве теорем 1 и 2 существенно применяются методы работ Водопьянова С. К. и Ухлова А. Д., где получены критерии, при выполнении которых измеримые отображения индуцируют ограниченные операторы как классов Соболева на группах Карно, так и весовых классов Соболева в евклидовых пространствах [1, 2]. Для вывода свойств весовых классов Соболева на группах Карно применяются, в частности, методы работы [3].

Список литературы

[1] S. Vodop'yanov and A. Ukhlov, "Mappings Associated with Weighted Sobolev Spaces", *Contemporary Mathematics*, Vol. 455, 369–382 (2008).

[2] S. Vodop'yanov and A. Ukhlov, "Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev Spaces. I", *Siberian Advances in Mathematics*, Vol. 14, No. 4, 78–125 (2004).

[3] T. Kilpeläinen, "Weighted Sobolev spaces and capacity", *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Series A. I. Mathematica*, Vol. 19, 95–113 (1994).

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: nikita2.evseev@gmail.com

RIEMANNIAN $Spin(7)$ HOLONOMY MANIFOLD CARRIES OCTONIONIC-KÄHLER STRUCTURE

DMITRY EGOROV

I will talk about a new concept called octonionic-Kähler structure. Let (M, g) be a smooth Riemannian manifold. Suppose V is a 7-dimensional subbundle of the vector bundle $\mathrm{End}(TM)$ such that a fiber of V through the point is spanned by almost complex structures J_λ at that point.

I impose two constraints on V. First, there exists a non-associative product of almost complex structures. It corresponds to the octonionic product. Secondly, the following formula holds:

$$\nabla_g J_\lambda \omega_\lambda^\mu J_\mu,$$

where $\omega \in \mathfrak{g}_2 \otimes \Omega^1(M)$. The $\mathfrak{g}_2$ algebra arises naturally, since $G_2 = \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$.

The defined bundle V over M is called an octonionic-Kähler structure on manifold M or I say that M is an octonionic-Kähler manifold. Then I will introduce the following theorem.

Theorem. *Let M be a Riemannian 8-manifold with holonomy group contained in $Spin(7)$; then M is the octonionic-Kähler manifold.*

References

[1] D. Egorov, "Riemannian $Spin(7)$ holonomy manifold carries octonionic-Kähler structure", *Moscow Math. J.* to appear, `arXiv:1109.2281`

Ammosov Northeastern Federal University, Yakutsk, Russia
E-mail address: `egorov.dima@gmail.com`

This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (grant 12-01-00873-a) and the Council of the Russian Federation President Grants (projects NSh-544.2012.1 and MK-842.2011.1).

1-КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА ГРУППЕ ПОВОРОТОВ-СДВИГОВ

ДАРЬЯ ИСАНГУЛОВА

Мы исследуем 1-квазиконформные отображения группы поворотов-сдвигов $\mathcal{RT}$ (roto-translation group). Группа поворотов-сдвигов — это трехмерное топологическое многообразие, диффеоморфное $\mathbb{R}^2 \times S^1$, с координатами (x, y, θ) и умножением

$$(x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta) = (x_0 + x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0, y_0 + x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0, \theta_0 + \theta).$$

Левоинвариантные векторные поля

$$A = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad C = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[A, B] = -C, \quad [C, B] = A, \quad [A, C] = 0.$$

Группа $\mathcal{RT}$ является субримановым многообразием с горизонтальным подрасслоением $H = \operatorname{span}\{A, B\}$. Метрика Карно — Каратеодори задается как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки (кусочно-гладкая кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор принадлежит H почти всюду). При этом локально геометрия группы поворотов-сдвигов близка к первой группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$, поскольку $\mathbb{H}^1$ является касательным конусом к $\mathcal{RT}$ в смысле Громова [2]. Отметим, что группа поворотов-сдвигов возникает в вопросах моделирования неголономного движения и оптимального контроля. Подробное описание группы $\mathcal{RT}$ с явным видом геодезических можно найти в книге [1], изометрии на $\mathcal{RT}$ найдены в работе автора [3].

Теорема.
Всякое C^3-гладкое 1-квазиконформное отображение на группе $\mathcal{RT}$ является изометрией и есть композиция следующих отображений:

$$l_{(x_0,y_0,\theta_0)}(x, y, \theta) = (x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta) \quad \text{— левый сдвиг,}$$

$$\left.\begin{array}{l} \iota(x, y, \theta) = (-x, y, -\theta) \\ \sigma(x, y, \theta) = (-x, -y, \theta) \end{array}\right. \quad \text{— отражения.}$$

Для доказательства теоремы мы используем инфинитезимальный генератор однопараметрической группы 1-квазиконформных отображений.

Список литературы

[1] L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls, J. T. Tyson, *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem*, Birkhäuser: Basel – Boston – Berlin (2007).

[2] M. Gromov, “Carnot — Carathéodory spaces seen from within”, *Sub-Reimannian Geometry*, Basel: Birkhäuser, 79–323 (1996).

[3] Д. В. Исангулова, “Изометрии на группе поворотов-сдвигов”, *Вестник КемГУ, Вещественный анализ*, 3/1, 243–249 (2011).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: dasha@math.nsc.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН–ДВО РАН №56 «Геометрический анализ актуальных задач теории функций и дифференциальных уравнений».

ТРИВИАЛЬНОСТЬ ФУНКЦИИ ω_2 ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПОЛНЫХ ГРАФОВ С ОДНИМ УДАЛЕННЫМ РЕБРОМ

АЛЕКСАНДР КАЗАКОВ

В пространственных (содержащихся в $\mathbb{R}^3$) графах G_n пару непересекающихся простых циклов, проходящих по всем вершинам графа, будем называть гамильтоновой парой циклов.

Определим значение $\omega_2(G_n)$ функции ω_2 как остаток от деления на 2 суммы

$$\sum_{(\alpha,\beta)} lk_2(\alpha,\beta),$$

где суммирование берётся по всем неупорядоченным гамильтоновым парам циклов (α,β) в графе G_n.

Оказалось, что для любых двух полных пространственных графов с одним удаленным ребром $G'_n, G''_n \subset \mathbb{R}^3$ с n вершинами справедливо соотношение:

$$\omega_2(G'_n) = \omega_2(G''_n).$$

Однако, $\omega_2(G_n) = 0$ для любого полного пространственного графа G_n с одним удаленным ребром.

Список литературы

[1] А. Ю. Веснин, А. В. Литвинцева, “О зацепленности гамильтоновых пар циклов в пространственных графах”, *Сибирские Электронные математические известия*, 7, 383–393 (2010).

[2] J. H. Conway, C. McA. Gordon, “Knots and links in spatial graphs”, *Journal of Graph Theory*, 7, 445—453 (1983).

ГОУ ВПО Челябинский Государственный Университет, Челябинск,454001, Россия
E-mail address: alex_8_5@mail.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №11-01-00605, грантом НШ-1414.2012.1 по государственной поддержке ведущих научных школ, а также целевой программой УрО и СО РАН (совместный проект 12-C-1-1018/1).

MINIMAL SURFACES ON CARNOT GROUPS

MARIA KARMANOVA

The introduction of suitable notions of variation, graph and surface measure is one of main problems in research of non-holonomic minimal surfaces. We solve them for Lipschitz (in sub-Riemannian sense) mappings $\varphi : \mathbf{G} \to \ell$ defined on measurable subsets of Carnot groups with values on integral line ℓ of an arbitrary vector field X_i of a degree l. We give a definition of a graph mapping φ_Γ that assigns to each point x the element $\exp\Bigl(\varphi(x)X_i\Bigr)(x)$, generalize the concept of sub-Riemannian differentiability introduced in [1] and obtain the notion of polynomial hc-differentiability, and prove that graph mappings are polynomially hc-differentiable at almost every point of D. These results are applied to the proof of the area formula for the "interior" measure $\mathcal{H}^\nu_\Gamma$ of a graph:

$$\int\limits_D \sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(y)|_i^2}\, d\mathcal{H}^\nu(y) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(D)} d\mathcal{H}^\nu_\Gamma(x).$$

Moreover, we find analytic description of some non-holonomic minimal surfaces. For mappings $\varphi : D \to \ell$ defined on a domain $D \subset \mathbf{G}$ that satisfies some additional requirements, we define a class

$$\mathcal{F}_{K,\varphi} = \Bigl\{\xi = \varphi + \psi : \int\limits_D \frac{|\widehat{D}\psi(x)|_i^2}{\Bigl(1+|\widehat{D}\varphi(x)|_i^2\Bigr)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathcal{H}^\nu(x) \geq K\|\psi\|_4^2\Bigr\}, \quad K>0,$$

where second horizontal derivatives of φ are measurable functions. It defines class of graphs $\mathcal{S}_{K,\varphi}$ of mappings from $\mathcal{F}_{K,\varphi}$. Then minimal surfaces in the class $\mathcal{S}_{K,\varphi}$ are surfaces of zero sub-Riemannian mean curvature defined by functions φ, that is,

$$\sum_{j=1}^{\dim V_1} X_j \Bigl\langle \frac{X_j\varphi(x)}{\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(x)|^2}} \Bigr\rangle = 0$$

for almost all $x \in D$. This case is new and it differs essentially from that studied in [2]. See [3] and [4] for details.

Список литературы

[1] S. Vodop'yanov, "Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings", *Contemporary Mathematics*, 424, 247–302 (2007).

[2] B. Franchi B., R. Serapioni, F. Serra Cassano, "Regular Hypersurfaces, Intrinsic Perimeter and Implicit Function Theorem in Carnot Groups", *Comm. Anal. Geom.*, 5, 909–944 (2003).

[3] M. Karmanova, "Lipschitz Functions' Graphs and Minimal Surfaces on Carnot Groups", *Doklady Mathematics*, 445, No. 3 (2012).

[4] M. Karmanova, "Lipschitz Functions' Graphs and Minimal Surfaces on Carnot Groups", *Sib. Mat. Zh.*, 53, No. 4, 839–861 (2012).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: maryka@math.nsc.ru

The research was supported by the State Maintenance Program for Young Russian Scientists and the Leading Scientific Schools of Russian Federation (Grant NSh-921.2012.1), and FCPK (application № 2012-1.2.2-12-000-1001-022).

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ИКОСАЭДРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ЭВЕРИТА

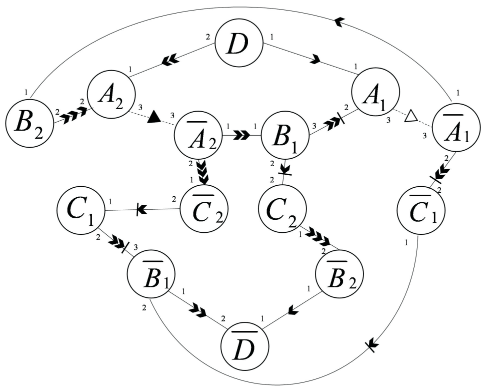
ТАТЬЯНА КОЗЛОВСКАЯ

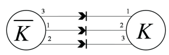
В работе [1] представлено шесть различных многообразий $M_{23}, \dots, M_{28}$, каждое из которых получается попарным отождествлением граней правильного гиперболического икосаэдра с двугранными углами $2\pi/3$. Нас будет интересовать одно из этих многообразий обладающее симметрией третьего порядка, которое обозначено в [1] через M_{25}. В [2] построено семейство многообразий $M_{25}(n)$ и доказана следующая теорема: для любого четного $n \geqslant 4$ многообразие $M_{25}(n)$ является $n/2$–листным циклическим накрытием линзового пространства $L(3,1)$, разветвленным над 3–компонентным зацеплением.

Теорема.

Многообразие $M_{25}(2)$ *является линзовым пространством* $L(3,1)$.

С помощью последовательности преобразований Зингера, диаграмма Хегора, соответствующая симплициальному комплексу $P(2)$ [2] с тремя стянутыми ребрами (см. рис. ниже), приводится к канонической диаграмме линзового пространства $L(3,1)$.





Список литературы

[1] B. Everitt, "3-manifolds from compact space forms from Platonic solids", *Topology Appl.* V. 138. P. 253–263 (2004).

[2] P. Cristifori, T. Kozlovskaya, A. Vesnin, "Cyclic generalizations of two hyperbolic icosahedral manifolds ", *Topology and Its Applications*, V. 159, No. 8, 12071-2081 (2012).

Магаданский институт экономики Санкт-Петербургского университета управления и экономики, Магадан, 685030, Россия

E-mail address: konus_magadan@mail.ru

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ-12-01-90812 и НШ-1414.2012.1.

24-КЛЕТОЧНИК КОКСТЕРА И ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ОКТАЭДРА

АЛЕКСАНДР КОЛПАКОВ

В соответствии с классификацией, полученной Кокстером [1], существуют всего шесть регулярных четырёхмерных евклидовых полиэдра. Одним из них – так называемый 24-клеточник, являющийся, в некотором смысле, четырёхмерным аналогом октаэдра. Именно, соответствующий ему символ Шлефли есть $\{3, 4, 3\}$. Таким образом 24-клеточник имеет 24 трёхмерные грани, являющиеся регулярными октаэдрами, 96 двумерных треугольных грани, 96 рёбер и 24 вершины. Линк каждой вершины является комбинаторным кубом, то есть двойственной октаэдру фигурой.

Исходя из некоторых общих фактов гиперболической геометрии можно показать, что 24-клеточник и только он реализуем как идеальный прямоугольный полиэдр в четырёхмерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^4$, в смысле работы [2].

В настоящей работе доказаны следующие два утверждения:

Теорема 1.

Среди всех идеальных прямоугольных полиэдров в $\mathbb{H}^4$*, идеальный прямоугольный 24-клеточник имеет минимальный объём. Идеальный прямоугольный полиэдр минимального объёма есть 24-клеточник, с точностью до изометрии.*

Теорема 2.

Среди всех идеальных прямоугольных полиэдров в $\mathbb{H}^4$*, идеальный прямоугольный 24-клеточник имеет минимальное число трёхмерных граней. Идеальный прямоугольный полиэдр с минимальным число трёхмерных граней есть 24-клеточник, с точностью до изометрии.*

Важную роль в доказательстве упомянутых теорем является комбинаторная классификация многогранников производных от октаэдра, приведенная в [3].

Список литературы

[1] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3rd ed. New York: Dover, (1973).
[2] L. Potyagailo, È. Vinberg, “On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces”, *Comment. Math. Helv.* 80, No. 1, 63–73 (2005).
[3] M. Deza, M. Shtogrin, “Octahedrites”, *Symmetry Cult. Sci.*, 11, No. 1-4, 27–64 (2000).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: kolpakov.alexander@gmail.com

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант 10-01-00642-a и грант 12-01-00210-a.

THE TWO-SQUARE LEMMA AND THE CONNECTING MORPHISM IN A PREABELIAN CATEGORY

YAROSLAV KOPYLOV

In 1989, Fay, Hardie, and Hilton proved the so-called “Two-Square Lemma”, a diagram assertion used as a tool for constructing a connecting morphism in the Snake Lemma in abelian categories. Later Generalov extended this construction to arbitrary preabelian categories.

We obtain a version of the general Two-Square Lemma by Fay–Hardie–Hilton for preabelian categories. We also establish the equivalence up to sign of two definitions of the connecting morphism of the Snake Lemma, one going back to André–MacLane and the other provided by the Two-Square Lemma.

References

[1] T. H. Fay, K. A. Hardie, P. J. Hilton, “The two-square lemma”, *Publ. Mat.* 33, No. 1, 133–137 (1989).
[2] A. I. Generalov, “The Ker-Coker sequence for pre-abelian categories” (Russian), *Abelian Groups and Modules*, No. 11, 12, 78–89, Tomsk. Gos. Univ., Tomsk (1994).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: yakop@math.nsc.ru

The author was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grants 09-01-00142-a, 12–01–00873-a), the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools and Junior Scientists of the Russian Federation (Grants NSh-6613.2010.1, NSh-921.2012.1), and the Integration Project “Quasiconformal Analysis and Geometric Aspects of Operator Theory” of the Siberian and Far Eastern Branches of the Russian Academy of Sciences.

MORSE-SARD THEOREM FOR SOBOLEV FUNCTIONS AND APPLICATIONS

MIKHAIL KOROBKOV

Theorem 1 [1]–[2]**.** *Let $\psi \in W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$. Then*
(i) *for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for any set $U \subset \mathbb{R}^n$ with $\mathcal{H}^1_\infty(U) < \delta$ the inequality $\mathcal{H}^1(\psi(U)) < \varepsilon$ holds;*
(ii) $\mathcal{H}^1(\{\psi(x) : x \in \mathbb{R}^n \;\&\; \nabla\psi(x) = 0\}) = 0$.

Here we denote by $\mathcal{H}^1$ the one-dimensional Hausdorff measure, i.e., $\mathcal{H}^1(F) = \lim\limits_{t\to 0+} \mathcal{H}^1_t(F)$, where $\mathcal{H}^1_t(F) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam} F_i : \mathrm{diam} F_i \le t, F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i\}$.

Corollary 2 [1]–[2]**.** *Let $\psi \in W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$. Then for $\mathcal{H}^1$–almost all $y \in \psi(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$ the preimage $\psi^{-1}(y)$ is a finite disjoint family of C^1–smooth $(n-1)$-dimensional compact manifolds S_j, $j = 1, 2, \dots, N(y)$.*

Now consider the Euler system

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{w} + \nabla p & = & 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{w} & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain with Lipschitz boundary. Assume that $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ and $p \in W^{1,s}(\Omega)$, $s \in [1, 2)$, satisfy the Euler equations (1) for almost all $x \in \Omega$ and let $\int_{\Gamma_i} \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, where Γ_i are connected components of the boundary $\partial\Omega$. Then there exists a stream function $\psi \in W^{2,2}(\Omega)$ such that $\nabla\psi = (-w_2, w_1)$ (note that by Sobolev Embedding Theorem ψ is continuous in $\overline{\Omega}$) . Denote by $\Phi = p + \dfrac{|\mathbf{w}|^2}{2}$ the total head pressure corresponding to the solution $(\mathbf{w}, p)$.

Theorem 3 [3] **(Bernoulli Law for Sobolev solutions).** *Under above conditions, for any connected set $K \subset \overline{\Omega}$ such that $\psi\big|_K = \mathrm{const}$ the assertion*

$$\exists C = C(K) \quad \Phi(x) = C \quad \text{for } \mathcal{H}^1\text{-almost all } x \in K$$

holds.

Using Theorem 3 we prove the existence of the solutions to steady Navier–Stokes equations for some plane cases (see [4]) and for the spatial case when the flow has an axis of symmetry (see [5]).

References

[1] J. Bourgain, M. V. Korobkov, J. Kristensen, "On the Morse–Sard property and level sets of $W^{n,1}$ Sobolev functions on $\mathbb{R}^n$", `http://arxiv.org/abs/1201.1416, [math.AP], 6 Jan 2012.`
[2] J. Bourgain, M. V. Korobkov, J. Kristensen, "On the Morse – Sard property and level sets of Sobolev and BV functions", `arXiv:1007.4408v1, [math.AP], 26 July 2010`, to appear in *Revista Mat. Iberoamericana.*
[3] M. V. Korobkov, "Bernoulli law under minimal smoothness assumptions", *Dokl. Math.*, 83, 107–110 (2011).
[4] M. V. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo, "On the flux problem in the theory of steady Navier-Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions", `arXiv:1009.4024v2, [math-ph], 28 Oct 2011,` to appear in *Archive for Rational Mechanics and Analysis.*
[5] M. V. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo, "Steady Navier-Stokes system with nonhomogeneous boundary conditions in the axially symmetric case", `arXiv:1110.6301v2, [math-ph], 11 Apr 2012.`

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: korob@math.nsc.ru

РЕГУЛЯРНОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ НА ПСЕВДОСФЕРАХ ДЕ СИТТЕРА

АНДРЕЙ КОСТИН

В работе исследуется регулярность асимптотических линий на поверхностях постоянной кривизны с индефинитной метрикой в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве.

Разберём один из случаев. В пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

рассмотрим поверхность, заданную радиусом-вектором $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(x^1, x^2, x^3)$, где

$$x^1 = \sinh(u) - \arctan(\sinh(u)), \quad x^2 = \cosh(u)\sinh(v)), \quad x^3 = \cosh(u)\cosh(v).$$

На этой поверхности локально реализуется метрика плоскости де Ситтера. Профиль (начальный меридиан) поверхности представляет собой один из псевдоевклидовых аналогов трактрисы. При значении $u = 0$ регулярность поверхности нарушается. Уравнение

$$-\tanh(u)du^2 + \cosh(u)\sinh(u)dv^2 = 0$$

задаёт два семейства асимптотических линий:

$$2\arctan(e^u) - v = c_1, \quad 2\arctan(e^u) + v = c_2.$$

Введём на поверхности новые локальные координаты:

$$x = -\arctan(e^u) + \frac{v}{2},$$

$$y = \arctan(e^u) + \frac{v}{2}.$$

Первая квадратичная форма поверхности примет вид:

$$1 = -\tanh^2(u)du^2 + \cosh^2 v(u)dv^2 = dx^2 + 2\cosh(2u)dxdy + dy^2$$

Отсюда следует, что асимптотическая сеть является чебышёвской. Сетевой угол удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sinh(z)$$

[1, 2]. Исследуем на регулярность асимптотические линии первого семейства. Для этого подставим значение $v = 2\arctan(\exp^u) - c_1$ в параметрические уравнения поверхности. Пусть $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(x^1(u), x^2(u), x^3(u))$,-радиус-вектор линии этого семейства, где

$$x^1 = \sinh(u) - \arctan(\sinh(u)), \quad x^2 = \cosh(u)\sinh(2\arctan(e^u) - c_1)),$$

$$x^3 = \cosh(u)\cosh(2\arctan(e^u) - c_1).$$

Тогда $\overrightarrow{r}_u^2 = 1 - \tanh^2(u) > 0$. Поэтому обобщённые асимптотические линии регулярны всюду, в том числе и в точках ребра возврата, в которых нарушается регулярность самой поверхности. Аналогичная картина имеет место и для асимптотических линий второго семейства. Регулярность же сети в точках ребра возврата нарушается, поскольку касательные векторы к линиям обоих семейств в точках ребра возврата коллинеарны касательным векторам к псевдоевклидовой окружности (аффинной гиперболе), служащей этим ребром возврата.Если ограничиться одной полостью поверхности, то можно также встать на такую точку зрения, что при касании с ребром возврата асимптотические линии одного семейства переходят в асимптотические линии другого семейства. Эти результаты, характеризующие асимптотические линии на "бабочке"де Ситтера, аналогичны результатам об асимптотических линиях на воронке Бельтрами-Миндинга [3, 4]. Для псевдосфер де Ситтера и Бельтрами-Миндинга имеют место связи рассматриваемых вопросов с "эволютно-эвольвентными"свойствами их меридианов.

Список литературы

[1] S. S. Chern, “Geometrical interpretation of sinh-Gordon equation. Selected Papers”, V.1-4-Springer-Verlag, Berlin-New-York-V.4, 63–69 (1987–1989).

[2] Р. Ф. Галеева, Д. Д. Соколов, “О геометрической интерпретации решений некоторых нелинейных уравнений математической физики”, *В сб. Исследования по теории поверхностей в римановых пространствах*, Л., 8–22 (1984).

[3] Э. Г. Позняк , Е. В. Шикин, *Дифференциальная геометрия*, М. Изд-во МГУ, (1990).

[4] В. И. Ритус, “Асимметрия релятивистского закона сложения скоростей относительно их перестановки и неевклидова геометрия”, *УФН*, 178, 739–752 (2008).

ЕФ КНИТУ–КАИ им. А. Н. Туполева, г. Елабуга, 423603, Россия

E-mail address: kostin_andrei@mail.ru

КОГОМОЛОГИИ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ МОНОИДОВ И ИХ ДЕЙСТВИЙ НАД ПУНКТИРОВАННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

ВИКТОР ЛОПАТКИН

В докладе будет рассказано про когомологий свободных частично коммутативных моноидов и их действия на пунктированных множествах.

Определение.

Пусть E — множество, I — антирефлексивное симметричное отношение на E. Моноид, заданный с помощью множества E и соотношений $ab = ba$, выполненных для всех пар $(a, b) \in I$, обозначается через $M(E, I)$ и называется свободным частично коммутативным моноидом.

Рассмотрим множество $X_n^\bullet = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, *\}$ над которым справа действует свободный частично коммутативный моноид $X_n^\bullet \times M(E, I) \to X_n^\bullet$, такие множества появляются в теории параллельных вычислительных систем [1,2,3] (асинхронные системы переходы), эти множества будем называть $M(E, I)$-множествами или просто M-множествами. С каждым таким множеством свяжем категорию $K_*(X_n^\bullet, M)$[3], объектами которой являются элементы множества $X_n^\bullet$, а морфизмами тройки вида $(x, \mu, x') = x \xrightarrow{\mu} x'$, где $x, x' \in X_n^\bullet$, а $\mu \in M(E, I)$, причём $x \cdot \mu = x'$. Заметим, что если $X^\bullet = \{*\}$, то $K_*(X^\bullet, M) = M^{op}$, то есть моноид рассматриваем как категорию с одним объектом M, а морфизмы — элементы этого объекта.

Рассмотрим функтор $S : K_*(X^\bullet, M) \to M^{op}$, который все объекты категории $K_*(X^\bullet, M)$ переводит в один объект категории M^{op}, а на морфизмах имеем $(x, \mu, x') \mapsto \mu$. Двойственно к [2, Theorem 5.3] получаем

Теорема 1.

Пусть имеем функтор $F : K_*(X^\bullet, M) \to R\text{-mod}$ в категорию R-модулей, где R — коммутативное кольцо с единицей. Тогда имеет место изоморфизм

$$H^*\left(K_*(X^\bullet, M), F\right) \cong H^*\Big(M^{op}, \prod_{x \in X^\bullet} F(x)\Big).$$

Когомологии свободного частично коммутативного моноида можно вычислить используя резольвенту [3]

$$\ldots \to F_n \xrightarrow{\delta_n} F_{n-1} \to \ldots \to F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \to 0,$$

где $F_n = \bigoplus\limits_{(e_1,\ldots,e_n) \in Q_n E} \mathbb{Z}M(e_1, \ldots, e_n)$ и $\delta_n(e_1, \ldots, e_n, 1) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k (e_1, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots, e_n, 1)$, здесь $Q_n E$ состоит из всех n коммутирующих между собой элементов E.Таким образом мы получаем комплекс полукубических когомологий[5,6]. В работе [7] было введено кольцо полукубических когомологий с коэффициентами в постоянном функторе, значение которого — коммутативное кольцо с единицей. Следующая теорема призвана обобщить этот результат.

При поддержки РФФИ, грант № 12-01-90811 (научный проект молодых учёных под руководством кандидатов и докторов наук в ведущих организациях Российской Федерации).

Теорема 2.

Группа когомологий $H^*(K_*(X^\bullet, M), F)$, *где* $F : K_*(X^\bullet, M) \to R\text{-mod}$, *превращается в кольцо когомологий, если ввести следующую операцию умножения. Пусть имеем коцепи* $\varphi \in C^p(K_*(X^\bullet, M), F)$ *и* $\psi \in C^q(K_*(X^\bullet, M), F)$, *тогда умножение* $\smile$ *Колмогорова — Александера будет выглядеть следующим образом;*

$$(\varphi \smile \psi)(x, e_1, \ldots, e_{p+q}) = \sum_H \varrho_{HK} \eta \left(\varphi(x, e_{h_1}, \ldots, e_{h_p}) \otimes \psi(x \cdot e_{h_1} \cdots e_{h_p}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_q}) \right),$$

здесь $H = \{h_1, \ldots, h_p\}$ *— множество всех подмножеств множества* $\{1, 2, \ldots, p+q\}$, *состоящее из* p *элементов,* K *— дополнение множества* H, ϱ_{HK} *— чётность перестановки* HK *и* $\eta : F(x, e_{h_1}, \ldots, e_{h_p}) \otimes_R F(x \cdot e_{h_1} \cdots e_{h_p}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_q}) \to F(x, e_{h_1}, \ldots e_{h_p}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_q})$ *— кольцевые гомоморфизмы.*

Как частный случай мы получаем следующий результат

Следствие.

Кольцо когомологий свободного частично коммутативного моноида $M(E, I)$ *выглядит следующим образом*

$$H^*(M(E, I), \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[e_1, \ldots, e_n] / I,$$

здесь I *— идеал внешней алгебры* $\Lambda_{\mathbb{Z}}[e_1, \ldots, e_n]$, *порождённый всеми такими* $e_k \in E$, *что* $e_i e_j \neq e_j e_i$.

Замечание.

Приведённый изоморфизм был получен в работе [8] как копредел функтора K*-степени.*

В докладе будут приведены интересные примеры [9,10] действий свободных частично коммутативных моноидов, в частности будет показано что когомологии свободного действия таких моноидов могут иметь кручения [9,10].

Список литературы

[1] А. А. Хусаинов, *Исследование параллельных систем методами теории категорий*, Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing, (2012).

[2] A. Husainov, "On the Homology of small Categories and asynchronous transition system", *Homology Homotopy Appl*, 6, No. 1, 439–471 (2004), `http: //www.rmi.acnet.ge/hha`

[3] А. А. Хусаинов, В. Е. Лопаткин, И. А. Трещёв, "Исследование математической модели параллельных вычислительных процессов методами алгбераической топологии", *Сиб. журн. индустр. матем.*, No. 1(33), 141–152 (2008), `http://mi.mathnet.ru/sjim495`

[4] Л. Ю. Полякова, "Резольвенты свободных частично коммутативных моноидов", *Сиб. мат. журн.*, No. 6(48), 1259–1304 (2007).

[5] А. А. Хусаинов, "О группах гомологий полукубических множеств", *Сиб. мат. журн.*, No. 1(49), 224–237 (2008), `http://mi.mathnet.ru/rus/smj/v49/i1/p224`

[6] А. А. Хусаинов, "Кубические гомологии и размерность Лича свободных частично коммутативных моноидов", *Матем. сб.*, No. 12(199), 129–154 (2008), `http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v199/i12/p129`

[7] В. Е. Лопаткин, "Кольца когомологий полукубических множеств", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – Сер. Математика. Механика. Информатика*, No. 2(10), 3–10 (2010).

[8] T. Panov, N. Ray, R. Vogt, "Colimits, Stanley–Reisner albebras, and loop spaces", *Algebraic Topology: Categorical Decomposition Technques, Progress in Math*, No. 215, 261–291 (2004), `arXiv: math.AT/0202081`

[9] A. Husainov, "On the Cubical Homology Groups of Free Partially Commutative Monoids", *New York: Cornell Univ*, Preprint, 47p, (2006), `http://arxiv.org/abs/math.CT/0611011`

[10] V. Lopatkin, "The Torsion of Homology Groups of $M(E, I)$-sets", *New York: Cornell Univ*, Preprint, 5p, (2008), `http://arxiv.org/pdf/0811.3722v1`

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: `wickktor@gmail.com`

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДИСКРЕТНОСТИ ДЛЯ ГРУПП МЕБИУСОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ДВУМЯ ПОРОЖДАЮЩИМИ

АЛЕКСАНДР МАСЛЕЙ

Мебиусово преобразование – это дробно-линейное преобразование расширенной комплексной плоскости. Обозначим через $\mathbb{M}$ группу всех мебиусовых преобразований. Хорошо известно, что $\mathbb{M} \cong PSL(2, \mathbb{C})$. Элементы группы $\mathbb{M}$ делятся на три типа: эллиптические, параболические и локсодромические.

Группа $G < \mathbb{M}$ называется дискретной, если единичный элемент является изолированным в G. Как показал Йоргенсен [2], задача о дискретности произвольной группы мебиусовых преобразований в некотором смысле сводится к изучению двупорожденных групп.

Пусть $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ – группа всех сохраняющих ориентацию изометрий трехмерного гиперболического пространства. Хорошо известно, что $\mathbb{M} \cong Isom^+(\mathbb{H}^3)$. Геринг, Маклоклин, Мартин [1] и Рассказов [3] получили достаточные условия дискретности для групп мебиусовых преобразований, порожденных двумя эллиптическими элементами. Эти условия представляют из себя оценки на гиперболическое расстояние между осями порождающих. Мы получили достаточные условия дискретности для групп мебиусовых преобразований, порожденных двумя элементами других типов. Для двух непараболических порождающих эти условия представляют из себя оценки на гиперболическое расстояние между осями порождающих. В случае, когда хотя бы один из порождающих параболический, достаточные условия сформулированы в терминах, связанных с действием параболических элементов в трехмерном гиперболическом пространстве.

Список литературы

[1] F. Gehring, C. Maclachlan, G. Martin, “On the discreteness of the free product of finite cyclic groups”, *Mitt. Math. Sem. Giessen*, No. 228, 9–15 (1996).

[2] T. Jørgensen, “A note on subgroups of SL(2,C)”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 28, No. 110, 209-–211 (1977).

[3] A. Rasskazov, “On the distance between the axes of elliptic elements generating a free product of cyclic groups”, *Adv. Geom.*, 6, No. 1, 85-–92 (2006).

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: masley.alexander@gmail.com

Работа поддержана грантами РФФИ-12-01-00210, НШ-921.2012.1 и НШ-1414.2012.1.

VISUALIZATION OF THE 8 HOMOGENEOUS 3-GEOMETRIES AND THE THURSTON CONJECTURE

EMIL MOLNÁR

It is well-known that the classical Euclidean and non-Euclidean 3-geometries of constant curvature: $\mathbf{E^3}$, $\mathbf{S^3}$ and $\mathbf{H^3}$ can be modeled in the real projective space $\mathbf{P^3}$ (or projective sphere $\mathbf{PS^3}$, respectively), i.e. in the subspace structure of a real vector space $\mathbf{V^4}$ and in its dual. That means, the usual projections (parallel or central ones) from $\mathbf{E^3}$ into the (moveable) computer screen $\mathbf{E^2}$ are also possible.

The author extended this method to the other 5 homogeneous 3-geometries

$$\mathbf{S^2 \times R},\ \mathbf{H^2 \times R},\ \sim\mathbf{SL(2,R)},\ \mathbf{Nil}\ \text{ and }\ \mathbf{Sol}$$

(the so-called Thurston geometries) as well. Thus, visualization of these (strange) spaces, animations in them are possible, due to my colleagues István PRÓK, Jenä SZIRMAI [2],[3],[4] and our students (e.g. János PALLAGI and Benedek SCHULTZ [6]).

Interesting pictures to the famous Thurston conjecture or to other problems, by visualizations, can help us in the present and future investigations. Some of them will also be illustrated in this talk: E.g. one parameter tilings in $\mathbf{E^3}$ and in the Bolyai-Lobachevskian hyperbolic space $\mathbf{H^3}$ (I. Prok and J. Szirmai [3]). The densest lattice-like geodesic ball packing in **Nil** space (whose density 0,78 is larger than the corresponding Euclidean one 0,74, J. Szirmai and his students [6],[7]). Some (geodesic and translation) balls in $\sim\mathbf{SL(2,R)}$ and in **Sol** geometry will also be presented by international collaboration (Blaženka DIVJAK, Zlatko ERJAVEĆ, Barnabás SZABOLCS, Brigitta SZILÁGYI [1]).

Our collaboration with the colleagues in Novosibirsk [5] promises further attractive results and pictures as well.

References

[1] B. Divjak, Z. Erjaveć, B. Szabolcs and B. Szilágyi, "Geodesics and geodesic spheres in $\sim\mathbf{SL(2,R)}$ geometry", *Math. Communications*, 14/2, 413–424 (2009).

[2] E. Molnár, "The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries", *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)*, Vol. 38, No. 2, 261–288 (1997).

[3] E. Molnár, I. Prok and J. Szirmai, "Classification of tile-transitive 3-simplex tilings and their realizations in homogeneous spaces", *Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume*, Editors: A. Prékopa and E. Molnár, Mathematics and Its Applications, Vol. 581, Springer, 321–363 (2006).

[4] E. Molnár and J. Szirmai, "On **Nil** crystallography", *Symmetry: Culture and Science*, 17, No. 1–2, 55–74 (Proceedings of the Symmetry Festival 2006).

[5] E. Molnár, J. Szirmai and A. Vesnin, "Projective metric realizations of cone-manifolds with singularities along 2-bridge knots and links", *Journal of Geometry*, 95, 91–133 (2009).

[6] J. Pallagi, B. Schultz and J. Szirmai, "Visualization of geodesic curves, spheres and equidistant surfaces in $\mathbf{S^2 \times R}$ space, *KoG (Scientific and professional journal of Croatian Society for Geometry and Graphics)*, 14, 35–40 (2010).

[7] J. Szirmai, "The densest geodesic ball packing by a type of **Nil** lattices", *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)*, 46, No. 2, 383–397 (2007).

Budapest University of Technology and Economics, Budapest, H–1521, Hungary
E-mail address: emolnar@math.bme.hu

COMPACT 3-MANIFOLDS VIA 4-COLORED GRAPHS

MICHELE MULAZZANI, PAOLA CRISTOFORI

The representation of closed 3-manifolds by 4-colored graphs has been independently introduced in the late seventies by S. Lins and by Pezzana's research group in Modena (see [3] and [1]), by using dual constructions. The attempt of extending the representation to 3-manifolds with boundary was performed by C. Gagliardi in [2] by using a slightly different class of colored graphs, but the result was not suitable for a satisfactory computer tabulation of non closed 3-manifolds.

We show that the whole class of 3-manifolds with non-empty non-spherical boundary can be represented by 4-colored graphs as the closed ones. This gives the opportunity of starting a more efficient computer aided tabulation. Partial results about enumeration and classification according to the minimal number of vertices of the graphs have been obtained.

References

[1] M. Ferri - C. Gagliardi - L. Grasselli, "A graph-theoretical representation of PL-manifolds. A survey on crystallizations", *Aequationes Math.*, 31, 121–141 (1986).

[2] C. Gagliardi, "Cobordant crystallizations", *Discrete Math.*, 45, 61–73, (1983).

[3] S. Lins, *Gems, computers and attractors for 3-manifolds*, Knots and Everything 5, World Scientific, (1995).

Department of Mathematics, University of Bologna, Bologna, 40127, Italy
E-mail address: michele.mulazzani@unibo.it

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

АЛЕКСАНДР РОМАНОВ

Хорошо известна взаимосвязь конформных отображений с различными экстремальными задачами на плоскости. Нас будет интересовать возможность определения конформного отображения через экстремали интеграла Дирихле [1]. Отметим четыре точки на границе ограниченной односвязной области $D \subset R^2$. Для получаемого криволинейного четырехсторонника D^* найдем экстремальные функции u и w реализующие конформную емкость конденсаторов, образованных двумя парами "противоположных сторон" (L_1, L_3) и (L_2, L_4), и рассмотрим функцию v пропорциональную экстремали w, т.е. $v = C\,w$. При подходящем выборе постоянной C функция $f = u + iv$ осуществляет конформное отображение области D на некоторый прямоугольник $P \subset R^2$.

Аналогичная конструкция, применяемая к нелинейной $(1,p)$–емкости, позволяет получить классы плоских экстремальных отображений, свойства которых существенным образом зависят от показателя суммируемости p. В данной ситуации, в отличие от конформного случая, для конденсаторов следует выбирать различные емкости, соответствующие сопряженным показателям суммируемости. Предполагая $1/p + 1/p' = 1$, рассмотрим функцию u – экстремальную для $(1,p)$–емкости "сторон" (L_1, L_3), функцию w – экстремальную для $(1,p')$–емкости "сторон" (L_2, L_4) и положим $v = C\,w$. В результате получим отображение $F = (u, v)$ области D (четырехсторонника D^*) на прямоугольник $P \subset R^2$. При надлежащем выборе постоянной C координатные функции отображения F удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = |\nabla u|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -|\nabla u|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases} \tag{1}$$

которая при $p = 2$ превращается в систему Коши–Римана.

По всякой p–экстремальной функции u можно восстановить сопряженную ей функцию v, удовлетворяющую системе (1). Возникающее в результате отображение $F = (u, v)$ будем называть p–экстремальным. Для гладкого отображения F координатная функция u будет решением p–уравнения Лапласа

$$div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0,$$

а функция v будет решением соответствующего p'–уравнения Лапласа.

Рассмотрим совокупность всех четырехсторонников порождаемых областью D и класс всех p–экстремальных отображений $F : D^* \to R^2$ обозначим через $H_p(D)$. С одной стороны, с каждым таким отображением можно связать ортогональную криволинейную систему координат в области D, с другой стороны, для ортогональных криволинейных систем координат (q_1, q_2), у которых выражение $H_1^{p-1} \cdot H_2^{-1}$, связывающее соответственные параметры Ламе, зависит только от одной координаты q_i, можно получить выражения для координатных функций p–экстремального отображения в криволинейных координатах.

Пусть $D_1, D_2 \subset R^2$ – ограниченные односвязные области с жордановыми границами. Будем говорить, что гомеоморфизм $L : D_1 \to D_2$ является p–экстремальным, если $L = F_2^{-1} \circ F_1$, где $F_1 \in H_p(D_1), F_2 \in H_p(D_2)$. Класс соответствующих p–экстремальных гомеоморфизмов обозначим через $H_p(D_1, D_2)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-00662-а) и интеграционного проекта СО РАН-ДВО РАН №56.

При отображении класса $H_p(D_1, D_2)$ для произвольных четырехсторонников, образованных линиями уровня отображения F_1, сохраняются p и p'–емкости соответствующих пар сторон.

Возможность отображения произвольного четырехсторонника на соответствующий прямоугольник показывает, что p–экстремальных гомеоморфизмов достаточно много. В частности, для p–экстремальных гомеоморфизмов удается получить аналог классической теоремы Римана, согласно которому для произвольных ограниченных односвязных областей $D_1, D_2 \subset R^2$ с жордановыми границами существует гомеоморфизм $L : D_1 \to D_2$ класса $H_p(D_1, D_2)$, переводящий три точки $a_1, a_2, a_3 \in \partial D_1$ и в точки $b_1, b_2, b_3 \in \partial D_2$.

В определении класса $H_p(D)$ координатные функции являются экстремалями для соответствующих конденсаторов, а образом области D всегда является некоторый прямоугольник. Это не слишком удобно, в частности, при изучении композиции таких отображений. Отображения класса $H_p(D_1, D_2)$ в этом плане устроены лучше, для них естественным образом определена композиция отображений. При дополнительных условиях композиция отображений $F \in H_p(D_1, D_2)$ и $G \in H_p(D_2, D_3)$ будет отображением класса $H_p(D_1, D_3)$.

Список литературы

[1] Р. Курант, *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, М.: ИЛ, (1953).

[2] А. С. Романов, “Емкостные соотношения в плоском четырехстороннике”, *Сиб. мат. журн*, 49, No. 4, 886–897 (2008).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: asrom@math.nsc.ru

ВИРТУАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ

ЕЛЕНА СБРОДОВА, ВЛАДИМИР ТАРКАЕВ

Известно, что любое компактное трехмерное многообразие M с краем однозначно задается специальным полиэдром, вложенным в M, так называемым специальным спайном. С другой стороны, два специальных спайна P и P' задают одно и то же трехмерное многообразие тогда и только тогда, когда P и P' связаны конечной последовательностью $T^{\pm 1}$-преобразований (см. [2]). Таким образом, любое компактное трехмерное многообразие M с краем есть класс эквивалентности относительно $T^{\pm 1}$-преобразований утолщаемых специальных полиэдров.

В статье [1] введено понятие *виртуального трехмерного многообразия* как класса эквивалентности относительно $T^{\pm 1}$-преобразований неутолщаемых специальных полиэдров.

Как и в случае настоящих трехмерных многообразий, сложностью виртуального многообразия M назовем число k, если M содержит специальный полиэдр с k вершинами и не содержит специальный полиэдр с меньшим числом вершин.

В данной работе составлена таблица виртуальных многообразий до сложности 3. Однако, таблица заведомо содержит дубликаты. Для каждого многообразия вычислены различные инварианты, в том числе инварианты Тураева-Виро, при помощи которых удалось распознать некоторые виртуальные многообразия. Вычисления инвариантов, как и сам перебор специальных спайнов, осуществлялся при помощи программы "Распознаватель многообразий", усовершенствованной для работы с виртуальными многообразиями.

Список литературы

[1] Matveev S.V., "Virtual 3-manifolds", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 6, 518–521 (2009).

[2] Матвеев С.В., *Алгоритмическая топология и классификация трёхмерных многообразий*, М. : МЦНМО, 2007.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, 454001, Россия
E-mail address: sbrodova@csu.ru, trk@csu.ru

Работа поддержана грантом Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1414.2012.1).

КАСАТЕЛЬНЫЙ КОНУС К ЛОКАЛЬНО СТЯГИВАЕМОМУ ПРОСТРАНСТВУ

СВЕТЛАНА СЕЛИВАНОВА

На топологическом пространстве X растяжения можно задать как однопараметрические семейства гомеоморфизмов $\{\delta^x_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, определенные в окрестности $U(x)$ каждой точки $x \in X$ и удовлетворяющие нескольким аксиомам, в частности, условию $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta^x_\varepsilon u = x$ для всех $u \in U(x)$ (свойство локальной стягиваемости пространства X). Одним из основных примеров пространств с растяжениями являются субримановы пространства и более общие пространства Карно – Каратеодори, моделирующие физические процессы при неголономных ограничениях и естественно возникающие во многих приложениях. Растяжения позволяют, при наличии определенного дополнительного условия, ввести на окрестности каждой точки пространства X структуру локальной группы [1,2].

Мы доказываем [3], что эта локальная группа локально изоморфна связной односвязной нильпотентной градуированной группе Ли. Доказательство основано на применении Теоремы Мальцева о локальных и полных топологических группах [4], что позволяет избежать трудностей, связанных с изучением локальной версии Пятой проблемы Гильберта. При наличии на пространстве X (квази)метрики d, определенным образом согласованной с растяжениями, сформулированный результат позволяет изучить алгебраическую структуру локального касательного конуса к пространству (X, d).

В качестве одного из приложений получаем аксиоматизацию локальных конусов эквирегулярных пространств Карно – Каратеодори, с применением результатов статьи [5].

Кроме того, и нерегулярные пространства Карно – Каратеодори являются примерами (квази)метрических пространств с растяжениями. В [6] доказано, что касательный конус в этом случае представляет собой однородное пространство. Этот результат является новым для квазиметрик (в некоторых важных случаях метрики может не существовать); доказательство является новым, по сравнению с [1,7], и для внутренних метрик Карно–Каратеодори.

Список литературы

[1] A. Bellaiche, "The tangent space in sub-Riemannian geometry", *Sub-Riemannian geometry*, Basel: Birkhäuser, 144, 1–78 (1996).

[2] M. Buliga, "Dilatation structures I. Fundamentals", *J. Gen. Lie Theory Appl.*, 1, No. 2, 65–95 (2007).

[3] S. Selivanova, S. Vodopyanov, "Algebraic properties of the tangent cone to a quasimetric space with dilations", *Contemporary Mathematics*, Complex Analysis and Dynamical Systems IV, 273–294 (2011).

[4] А. И. Мальцев, "О локальных и полных топологических группах", *Докл АН СССР*, 32 (9), 606–608 (1941).

[5] Karmanova M., Vodopyanov S., "Geometry of Carno-Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas", *Analysis and Mathematical Physics*, Trends in Mathematics, Birckhäuser, 233–335 (2009).

[6] S. V. Selivanova, "Local geometry of nonregular weighted quasimetric Carnot-Caratheodory spaces", *Doklady Mathematics*, 85, No. 2, 169–173 (2012).

[7] M. Gromov, "Carno-Carathéodory spaces seen from within", *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics, Basel: Birckhäuser, 144, 79–323 (1996).

Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: s_seliv@math.nsc.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00662) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1).

ПУЧКИ МОДУЛЕЙ КОНЕЧНОГО ТИПА НА КАТЕГОРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЕВГЕНИЙ СКУРИХИН

Категорные топологические пространства являются общими объектами, которые, тем не менее, могут изучаться методами, разработанными для топологических пространств. В процессе исследований выяснилось, что обычные характеристики топологических пространств, например, лебеговская размерность, или когомологическая размерность, могут иметь интерпретации, более широкие, чем в случае топологических пространств. Например, ассоциируя категорные топологические пространства с алгебраическими многоообразиями, или структурами событий, или частично упорядоченными множествами, или монадами, получаем, что лебеговская и когомологическая размерности соответствующих категорных топологических пространств совпадает с размерностью алгебраического многообразия, длиной или шириной упорядоченного множества, сложностью по В. И. Арнольду, некоторыми характеристиками структур событий.

В связи с этим представляется интересным вопрос о задании геометрических структур на категорных топологических пространствах. В предлагаемом докладе предполагается рассмотреть локально свободные пучки и векторные расслоения.

Назовём G-объектом тройку $(X, \tau, \mathcal{O})$, где X множество, τ топология Гротендика на некотором множестве SX подмножеств X, замкнутом относительно пересечений, $\mathcal{O}$ – τ-пучок колец функций со значением в фиксированном поле k. При этом предполагается, что для любого $(f : U \to k) \in \mathcal{O}(U)$, множество $V = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\} \in SX$ и $\frac{1}{f|V} \in \mathcal{O}(V)$. Отображение $h : U \to k^n$ будем называть регулярным (или $\mathcal{O}$-регулярным), если для всякого $i = 1, ..., n$, $h^i \equiv p^i \circ h \in \mathcal{O}(U)$, где $p^i : k^n \to k$ – проекция на i-й сомножитель. Векторным расслоением на $(X, \tau, \mathcal{O})$ назовем отображение множеств $\xi : E \to X$, если задано τ-покрытие $\alpha = \{U_i \in SX \mid i \in I\}$ и семейство биективных послойных отображений $\{\psi_i : \xi^{-1}(U_i) \to U_i \times k^n \mid i \in I\}$, таких. что для любых i, j отображение $u_{ij} = \psi_j \circ \psi_i^{-1} : U_i \cap U_j \times k^n \to U_i \cap U_j \times k^n$ линейно на слоях и значит задаётся равенством $u_{ij}(x, a^1, ..., a^n) = (x, \sum \delta_{\{ij\}}{}_l^1(x)a^l, ..., \sum \delta_{\{ij\}}{}_l^n(x)a^l)$, так что функции $\delta_{\{ij\}}{}_l^k : U_i \cap U_j \to k$ являются регулярными, то есть принадлежат $\mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Совокупность функций $\delta_{\{}ij\} = \{\delta_{\{ij\}}{}_l^k \mid k, l = 1, ..., n\}$ может быть отождествлена с (обратимой) матрицей, то есть элементом группы $GL(n, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$.

Формальным топологическим пространством, или F-пространством, называется пара $(u, [\ ] : L \to L)$, где $[\ ]$ – оператор замыкания на частично упорядоченном множестве L, $u \in L$, если выполняются следующие условия

(F1) L является нижней полурешёткой, и для любых $a, b \in L$, $[a \wedge b] = [a] \wedge [b]$.

(F2) Множество $[L]$ замыканий всех элементов L является полной брауэровой решёткой и u – максимальный элемент $[L]$.

На формальном пространстве естественно задаётся пара топологий Гротендика $(æ, \mu)$, полезных при изучении его структуры и когомологий. А именно, æ – это каноническая топология Гротендика на $[L]$, а μ индуцирована отображением $[\ ]$. Пару $(æ, \mu)$ будем называть канонической парой топологий Гротендика на F-пространстве $(u, [\ ])$.

Пусть (K, τ) – сайт. Категорным топологическим пространством или (K, τ)-пространством называется F-пространство $(D, [\ ]_\tau^D : K_D \to K_D)$, где D – предпучок множеств на K,

Исследование поддержано грантом ДВО РАН 12-III-A-01M-004.

$[\,]_\tau^D : K_D \to K_D$ – оператор τ-замыкания на K_D. Предпучок D в данном контексте также называется категорным топологическим пространством.

Пусть $(u, [\ ] : L \to L)$ $-F$-пространство, $\mathcal{O}$ – μ-пучок колец с 1, $a \in L$, $\varphi : \mathcal{O}^n|a \to \mathcal{O}^m|a$, $[\varphi] \in \mathcal{M}(n, m, \mathcal{O}(a))$ матрица, задаваемая так: $[\varphi] = (\alpha_{ij})$, где $\varphi(e_i) = \sum \alpha_{ij} e_j$, $e_i = (0, ..., 1, ..., 0) \in \mathcal{O}^n(a) = \mathcal{O}(a)^n$.

Как и в случае топологических пространств, соответствие $\varphi \mapsto [\varphi]$ является аддитивным, удовлетворяет соотношению $[\varphi \circ \psi] = [\psi] \circ [\varphi]$ и задаёт биекцию между множеством $Hom_{\mathcal{O}|a-mod}(\mathcal{O}^n|a, \mathcal{O}^m|a)$ гомоморфизмов пучков $\mathcal{O}|a$-модулей и множеством матриц $M(n, m, \mathcal{O}(a))$ с элементами из кольца $\mathcal{O}(a)$, в частности, (анти)изоморфизм между группами $Aut_{\mathcal{O}|a-mod}(\mathcal{O}^n|a)$ и $GL(n, \mathcal{O}(a))$.

Предположим, что $\alpha = \{a_i \in L\} \mid i \in I$ – μ-покрытие u, $\mathcal{M}$ – $\mathcal{O}$-модуль, и заданы изоморфизмы $\varphi_i : \mathcal{O}^n|a_i \to \mathcal{M}|a_i$. Полагая $\varphi_{ij} = \varphi_j{}^{-1} \circ \varphi_i : \mathcal{O}^n|a_{ij} \to \mathcal{O}^n|a_{ij}$, $\delta_{ij} = [\varphi_{ij}]$, получаем 1-коцикл, то есть семейство $\delta = \{\delta_{ij} \in GL(n, \mathcal{O}(a_i \wedge a_j)) \mid i, j \in I\}$, такое, что $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$ в $GL(n, \mathcal{O}(a_i \wedge a_j \wedge a_k))$.

Категория называется тонкой, если множество морфизмов между любыми двумя её объектами не более, чем одноэлементно. В частности, малые тонкие категории могут быть отождествлены с квазиупорядоченными множествами.

Теорема.

Пусть (K, τ) сайт, где K тонкая категория, $(1_K, [\,]_\tau)$ категорное топологическое пространство, где предпучок 1_K определяется так: $1_K(k)$ – одноэлементное множество для каждого объекта k. Зафиксируем τ-пучок колец с единицей $\mathcal{O}$ на K и обозначим через $\widehat{\mathcal{O}}$ æ-пучок на K_D, где $D = 1_K$, задаваемый равенством $\widehat{\mathcal{O}}(A) = Hom_{\widehat{K}}(A, \mathcal{O})$. Категория τ-локально свободных $\mathcal{O}$-модулей на K эквивалентна категории æ-локально свободных $\widehat{\mathcal{O}}$-модулей на 1_K, то есть на $K_{D,\tau}$ и следовательно описывается, как отмечено выше, коциклами, соответствующими каноническим покрытиям 1_K со значениями в предпучках матриц.

2. Пусть $(X, \tau, \mathcal{O})$ G-объект. Рассмотрим (K, τ)-пространство 1_K, где $K = SX$. Тогда категории τ-локально свободных $\mathcal{O}$-модулей на K, æ-локально свободных $\widehat{\mathcal{O}}$-модулей на 1_K и векторных расслоений на $(X, \tau, \mathcal{O})$ эквивалентны.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток,690041,Россия; Дальневосточный Федеральный университет, Владивосток,690950,Россия

E-mail address: eesku@iam.dvo.ru

О ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ НА ФИЛИФОРМОВЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

ЯРОСЛАВНА СЛАВОЛЮБОВА

1. Предварительные сведения. Напомним основные понятия из теории филиформовых алгебр Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли размерности n. Пусть $C^0\mathfrak{g} \supset C^1\mathfrak{g} \supset ...C^{n-2}\mathfrak{g} \supset C^{n-1}\mathfrak{g} = \{0\}$ – центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где $C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $C^i\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}; C^{i-1}\mathfrak{g}]$, $1 \leq i \leq n-1$.

Определение 1 ([3]).
Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ размерности ≥ 3 называется филиформовой, если $C^k\mathfrak{g} = n-k-1$ для $k = 1, ..., n-1$.

Филиформовые алгебры Ли являются наименее нильпотентными.

Определение 2 ([3]).
Две контактные алгебры Ли $(\mathfrak{g}_1, \alpha_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \alpha_2)$ называются контакто-изоморфными, если существует изоморфизм алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, т. ч. $\varphi^*(\alpha_2) = \alpha_1$.

Теорема 1 ([3]).
Пусть $\mathfrak{g}$ – филиформовая $(2p+1)$-мерная алгебра Ли. Пусть $X_0, X_1, ..., X_{2p}$ – адаптированный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{2p}$ – его дуальный базис. Если $\alpha = a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + ... + a_{2p}\alpha_{2p}$ – контактная форма на $\mathfrak{g}$, тогда форма $\beta = a_{2p}\alpha_{2p}$ – также контактная форма на $\mathfrak{g}$ и $(\mathfrak{g}, \alpha)$ – контакто-изоморфна к $(\mathfrak{g}, \beta)$.

2. Левоинвариантная контактная метрическая структура на филиформовой алгебре Ли размерности 5. Среди контактных алгебр Ли размерности 5 филиформовой алгеброй Ли является следующая алгебра Ли $\mathfrak{n}_4 \times_\omega \mathbb{R}e_5$, полученная центральным расширением четырехмерной симплектической алгебры Ли $\mathfrak{n}_4$ классификационного списка [4], заданной в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 коммутационными соотношениями: $[e_1, e_4] = -e_2$, $[e_2, e_4] = -e_3$. Симплектическая форма ω имеет вид $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_4 \times_\omega \mathbb{R}e_5$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 имеет коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_5$, $[e_1, e_4] = -e_2$, $[e_2, e_4] = -e_3$, $[e_3, e_4] = e_5$ и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}_{5,3}$ классификационного списка разрешимых контактных алгебр Ли А. Диатты [1]. Соответствующую группу Ли обозначим $N_4 \times_\omega \mathbb{R}$. Контактная форма на $N_4 \times_\omega \mathbb{R}$ имеет вид $\eta = -e^5$. Очевидно, что $d\eta = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$. Поле Риба ξ имеет вид $\xi = -e_5$.

Замечание.
Любая 1-форма η вида $\eta = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 + \alpha_4 e^4 + \alpha_5 e^5$ является контактной, если $\alpha_5 \neq 0$. Действительно, $\eta \wedge (d\eta)^2 = 2\alpha_5^3 e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \wedge e^5 \neq 0$.

Контактное распределение D порождено следующими векторами: $E_1 = e_1$, $E_2 = e_2$, $E_3 = e_3$, $E_4 = e_4$. В качестве пятого вектора можем взять поле Риба, $E_5 = -e_5$. Ненулевые структурные константы в новом базисе: $C_{12}^5 = -1, \quad C_{14}^2 = -1, \quad C_{24}^3 = -1, \quad C_{34}^5 = -1$.

Контактная форма в новом базисе определяется 1-формой $\eta = E^5$. Ее внешний дифференциал: $d\eta = dE^5 = E^1 \wedge E^2 + E^3 \wedge E^4$.

Как известно [2], ассоциированная метрика g контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) при фиксированных η и ξ определяется аффинором φ по следующей формуле: $g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-544.2012.1).

Запишем аффинор φ в общем виде в базисе $\{E_i\}$. Учитывая, что φ обладает свойством $d\eta(\varphi X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$, $X, Y \in D$, видим, что

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & 0 \\ \psi_{21} & -\psi_{11} & \psi_{23} & \psi_{24} & 0 \\ -\psi_{24} & \psi_{14} & \psi_{33} & \psi_{34} & 0 \\ \psi_{23} & -\psi_{13} & \psi_{43} & -\psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где пераметры ψ_{ij} связаны условиями:

$$\begin{cases} \psi_{11}^2 + \psi_{12}\psi_{21} - \psi_{13}\psi_{24} + \psi_{14}\psi_{23} = -1, \\ \psi_{12}\psi_{23} + \psi_{13}(\psi_{11} + \psi_{33}) + \psi_{14}\psi_{43} = 0, \\ \psi_{12}\psi_{24} + \psi_{13}\psi_{34} + \psi_{14}(\psi_{11} - \psi_{33}) = 0, \\ \psi_{13}\psi_{21} - \psi_{23}(\psi_{11} - \psi_{33}) + \psi_{24}\psi_{43} = 0, \\ \psi_{14}\psi_{21} + \psi_{23}\psi_{34} - \psi_{24}(\psi_{11} + \psi_{33}) = 0, \\ \psi_{33}^2 + \psi_{34}\psi_{43} - \psi_{13}\psi_{24} + \psi_{14}\psi_{23} = -1, \end{cases}$$

вытекающими из равенства $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$.

Теорема 2.

Левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на группе $N_4 \times_\omega \mathbb{R}$ является K-контактной при всех значениях параметров ψ_{ij}. Левоинвариантная контактная метрическая структура на группе $N_4 \times_\omega \mathbb{R}$ не является структурой Сасаки ни при каких значениях параметров ψ_{ij}.

Список литературы

[1] A. Diatta, "Left invariant contact structures on Lie groups", (2004), `arXiv: math.DG/0403555v2`

[2] D. Blair, "Contact Manifolds in Riemannian Geometry", *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, (1976).

[3] Yu. Khakimdjanov, M. Goze and A. Medina, "Symplectic or Contact Structures on Lie Groups", *Diff. Geom. Appl.*, V. 21, No. 1, 41–54 (2004).

[4] G. Ovando, "Four dimensional symplectic Lie algebras", (2004), `arXiv: math/0407501v1, [math/DG]`

Кемеровский институт (филиал) Российского государственного торгово-экономического университета, Кемерово, 650992 пр. Кузнецкий 39, Россия

E-mail address: jar1984@mail.ru

SUPPORT FUNCTIONS OF THE CONVEX POLYHEDRON IN LOBACHEVSKY'S SPACE

EUGENE RODIONOV, MARIA KURKINA, VICTOR SLAVSKY

The convex geometry of the Euclidean space plays an important role in mathematical analysis. The convex geometry of the Lobachevsky space H^n_κ with the curvature $(-\kappa)$, where $\kappa > 0$, is a natural expansion of the convex geometry of the Euclidean space. There is a natural correspondence between closed convex subsets $Q \subset H_\kappa$ and conformally flat metrics $ds^2 = \frac{dx^2}{h^2_Q(x)}$, $x \in R^{n-1}$, which are defined on $\overline{R^{n-1}}$ and have bounded one-dimensional curvature:

$$-\frac{\kappa}{2} \leq h_Q \frac{d^2 h_Q}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla h_Q|^2 \leq \frac{\kappa}{2}, \tag{1}$$

where ∇f is the gradient of f in R^{n-1}, $\frac{d^2 f}{d\xi^2}$ is the second derivative of f in R^{n-1} along a unit vector $\xi \in R^{n-1}$. These metrics are called support functions of Q in this paper. The following formula is true for a finite convex polyhedron of the Lobachevsky space:

$$h_Q(x) = \min_i \{h_{\triangle_i}(x)\} \tag{2}$$

where $h_{\triangle_i}(x)$ are support functions of $(n-1)$-dimensional sides of the border of Q. The calculation of the functions $h_{\triangle_i}(x)$ occurs recurrently and is reduced to a case when $\triangle_i$ are k-dimensional simplexes in H^n_κ $(k < n)$. Such functions we will call elementary conformally flat splines. Usual splines-functions of many variables are limited to the functions of cellular structure [1].

These functions are known as the functions which range of definition is divided into cells (in a flat case - rectangles, triangles, etc., in multidimensional - parallelepipeds, pyramids, etc.). In each cell a function is defined somewhat in the homogeneous way with conditions of smoothness along borders of cells. In difference from usual spline-functions the representation (2) of the function $h_Q(x)$ by conformally flat spline-functions has other nature, here it is not required to specify the range of the definition of $h_{\triangle_i}(x)$. Function $h_Q(x)$ has smoothness $C^{1,1}$ and any function $f \in C^1$ can be approached as much as precisely by a function $h_Q(x)$ of a type (2) in the norm of the space C^1 on a compact subset (at big enough κ). The theory of conformal-flat splines is based on the connection between conformally flat metrics of the bounded curvature and convex subsets in Lobachevsky's space. The conformally flat splines correspond convex polyhedrons in Lobachevsky's space thus [2,3]. The conformally flat spline also has "a cellular structure" which is defined in the parameters $\{\triangle_i\}$, entering into the formula for the function $h_Q(x)$ and corresponding to cellular structure of the border of a convex polyhedron of the Lobachevsky's space.

The obvious formula (2) for function $h_Q(x)$ allows to simplify a calculation and make it more effective: it is not necessary to break the range of definition of a function and it is possible to use parallel algorithms for the calculation of elementary splines $h_{\triangle_i}(x)$. Conformally flat spline-functions are most effective at the decision of problems of mathematical physics in which the conformally flat metrics are present naturally (for example, at problems of the tomography, geophysics, acoustics, integrated geometry).

These researches are executed with financial support of the Russian fund of basic researches of the Council about grants of the President of the Russian Federation for support of young scientists and leading schools of the Russian Federation (a code of project SS-6613.2010.1), and also under the support of FCP "Scientific and pedagogical shots of innovative Russia"for 2009-2013 (Contract 02.740.11.0457).

The program complex in the environment of MatLab, and also independently program complex on C++ Builder for the calculation of representation (2) of functions of many variables by the conformally flat spline-functions are constructed in this paper.

Список литературы

[1] J. Zavyalov, B. Kvasov, V. Miroshnicheiko, *Methods of splines-functions*, Moscow: the Science. The main edition of the physical and mathematical literature, (1980).

[2] O. Gladunova, E. Rodionov, V. Slavsky, "Convex polyhedrons of space of Lobachevsky and interpolation of functions", *Reports of Academy of Sciences*, 441, No. 6, 1–4 (2011).

[3] O. Gladunova, E. Rodionov, V. Slavsky, "Conforming of spline-function", *Modern problems of mathematics and mechanics. Publishing house of the Moscow University*, VI, release 2, 112–129 (2011).

Ugra state university, Khanty-Mansiysk, 628012, Russia
E-mail address: slavsky2004@mail.ru

Altai state university, Barnaul, 656015, Russia
E-mail address: edr2002@mail.ru

МНОЖЕСТВА КРОНЕКЕРА И ИЗОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА $C(M)$, ПЛОТНО ОБМАТЫВАЮЩИЕ ТОР

КОНСТАНТИН СТОРОЖУК

Пусть X — банахово пространство, $T : X \to X$ — линейный оператор, такой, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\|T^n\| \leq C < \infty$. Положим $X_0 = \{x \in X \mid T^n x \to_{n\to\infty} 0\}$. Оператор T называется асимптотически конечномерным, если $\operatorname{codim} X_0 < \infty$.

Во многих случаях достаточным условием асимптотической конечномерности является наличие компакта $K \subset X$, притягивающего в том или ином смысле орбиты элементов единичного шара B_X. Например, если для каждого $x \in B_X$ $\limsup_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \leq \eta < 1$.

В [1] поставлен вопрос (Problem 1.3.33): будет ли T асимптотически конечномерным, если в предыдущем условии $\limsup$ заменить на $\liminf$?

Мы даем отрицательный ответ, строя *изометрии* пространства $C(M)$, удовлетворяющие условию (Problem 1.3.33) с числом $\eta = \frac{1}{2}$, с притягивающей *точкой* K.

Пусть M — замкнутое подмножество комплексной окружности Λ, $C(M)$ — пространство непрерывных функций и $T : C(M) \to C(M)$ — оператор умножения на аргумент, $(Tf)(t) = tf(t)$. Это — линейная изометрия. Рассмотрим тор $O(M) = \{f : M \to \mathbb{C}, \|f\| = \|\frac{1}{f}\| = 1\}$.

Теорема ([2])

Если M — множество Кронекера, то T-орбиты точек тора $\frac{1}{2}O(M)$ плотны в $\frac{1}{2}O(M)$ и $\frac{1}{2}$-плотны в единичном шаре пространства $C(M)$.

Список литературы

[1] E. Yu. Emel'yanov, *Non-Spectral Asymptotic Analysis of One-Parameter Operator Semigroups*, Operator Theory Advances and Applications, V. 173, Birkhauser, (2007).

[2] К. В. Сторожук, "Изометрии с плотными обмотками тора в $C(M)$", *Функциональный анализ и его приложения*, 46, No. 3, 89—91 (2012).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: stork@math.nsc.ru

Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ, код проекта НШ-921.2012.1.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

ДМИТРИЙ ТРОЦЕНКО

В известной книге [1] А. Д. Александров, в частности, исследует сходимость внутренних метрик семейств выпуклых поверхностей. Для работы с компактными семействами автор выделяет семейства выпуклых поверхностей, лежащих в шаре радиуса R и содержащих шар радиуса r. Легко заметить, что внутренняя метрика таких поверхностей билипшицево эквивалентна внешней, причем билипшицева константа M зависит только от $t = \frac{R}{r}$, $t \geq 1$. Здесь же на с. 92 автор указывает на самостоятельный интерес нахождения точной константы $M(t)$

Гипотеза Александрова.
$M(t) \leq \sqrt{t^2-1} + t \arcsin t^{-1} < t+1$.

Определение.
Наименьшую из двух частей, на которые гиперплоскость разбивает шар в R^n $(n \geq 2)$ назовем шапочкой.

В личной беседе А. Д. Александров сообщил, что он доказал, что поверхность, реализующая максимальное отношение внутренней метрики к внешней при фиксированном t, есть граница шара с выброшенными двумя непересекающимися шапочками. Приведенная в [1] оценка возникает в предположении, что шапочки равны и их плоскости параллельны. В этом случае экстремальная пара точек, для которой отношение внутреннего расстояния к евклидову максимально, есть центры кругов шапочек.

Здесь утверждается, что гипотеза Александрова не верна ни при каких $t > 1$. У экстремальных поверхностей выброшенные шапочки равны, но их плоскости не параллельны ни при каком t. Рассмотрим угол $\varphi(t)$ между этими плоскостями. Справедлива

Теорема 1.
1. $\varphi(t) > 0$ при $t > 1$ и $\varphi(t) \to 0$ при $t \to 1$ и при $t \to \infty$.
2. Найдется $t_0 = t_0(n)$ такое, что $M(t) = 2t-1$ при $t \geq t_0(n)$. $\varphi(t)$ монотонно возрастает при $1 < t \leq t_0$ и монотонно убывает при $t \geq t_0$.
3. При $1 \geq t < t_0(n)$ точки экстремальной пары, для которой отношение внешнего расстояния к внутреннему, максимально, не могут быть близки.

Последнее утверждение показывает, что при небольших t свойство экстремальности пары точек становится глобальным, то есть эти точки должны быть далеки друг от друга при фиксированных размерах шаров. Справедливо более общее утверждение. Важную роль играют универсальные константы $t_0 = t_0(n)$ и $M_0 = M(t_0)$.

Теорема 2.
Пусть $A \subset R^n$– выпуклая поверхность, содержащая шар радиуса r и содержащаяся в шаре радиуса R, $t = R/r < t_0$ (из теоремы 1). Тогда для любой пары точек $x, y \in A$ такой, что $\varrho(x,y)/|x-y| = M \geq M_0$ справедливо неравенство

$$|x-y| \geq rF(M,t,n),$$

где $F(M,t,n)$ – положительная непрерывная функция, определенная при $t \in [1, t_0)$, $M \in (M(t_0), M(t)]$. Функция $F(M,t,n)$ монотонно убывает по t и M, и $F(\Pi/2, 1) = 2$.

Есть другие классы поверхностей, у которых оценивается мера сферичности. Рассмотрим границы областей в R^n, звездных относительно шара радиуса r , лежащих в шаре радиуса R Опять положим $t = R/r$.

Теорема 3.

Утверждения теорем 1 и 2 справедливы, если вместо классов выпуклых областей рассматривать соответствующие классы звездных областей.

В теории квазиконформных отображений популярны классы однородных областей. Их границы могут быть неспрямляемыми, и внутренние метрики границ не всегда определены. Также не достаточно одного шара, содержащего область, и одного – содержащегося в области. В работе [2] автор, в частности, рассматривает области, границы которых лежат в сферическом кольце с отношением радиусов $R/r = t$, причем такие, что при любом мебиусовом отображении, переводящем область в ограниченную, образ ее границы лежит в сферическом кольце с тем же отношением t радиусов. При больших t граница может не быть топологическим многообразием, не быть связной – короче, быть очень плохой. При приближении t к единице свойства улучшаются скачками. В частности, найдется $t_1(n)$ такое, что при $t < t_1$ область квазиконформно эквивалентна (значит, гомеоморфна) своему дополнению. Если в формулировках теорем 1 и 2 заменить внутреннюю метрику границы области внутренней метрикой дополнения к области, то для этого класса областей справедливы аналоги теорем 1 и 2.

Список литературы

[1] А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, Москва, (1948).

[2] Д. А. Троценко, “Однородные области, близкие к шару”, *Сиб. мат. журн.*, 52, No. 3, (307), 1178–1194 (2011).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: trotsenk@math.nsc.ru

ACL-СВОЙСТВО КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ КАРНО-КАРАТЕОДОРИ И ФУНКЦИИ КЛАССА BMO

МАКСИМ ТРЯМКИН

Известно, что квазиконформное отображение пространств Карно-Каратеодори является абсолютно непрерывным на интегральных кривых горизонтальных векторных полей (см., например, [1]). Возникает вопрос, можно ли обобщить это свойство на интегральные кривые векторных полей, степень которых отлична от единицы. Для решения этого вопроса определение абсолютной непрерывности должно быть переформулировано аналогично тому, как это сделано в работе [2].

Определение. Пусть $f\colon \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ — квазиконформное отображение пространств Карно-Каратеодори хаусдорфовой размерности $Q > 1$, и $\gamma(t) = \exp tX(s)$ — интегральная кривая векторного поля степени l, $1 \leqslant l \leqslant M$, где M — глубина многообразия $\mathbf{M}$, выходящая из точки s, $t \in (-a, a)$. Говорят, что f *абсолютно непрерывно* на этой кривой, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого набора попарно непересекающихся интервалов $(\alpha_i, \beta_i) \subset (-a, a)$, $i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i)^l < \delta \quad \text{влечет} \quad \sum_i |f(\gamma(\beta_i)) - f(\gamma(\alpha_i))|^l < \varepsilon.$$

Введем еще одно понятие, необходимое для решения поставленного вопроса.

Определение. Пусть $\mathbf{M}$ — пространство Карно-Каратеодори хаусдорфовой размерности $Q > 1$ с хаусдорфовой мерой $\mathcal{H}^Q$ на нем, и Γ — семейство интегральных кривых векторного поля степени l, $1 \leqslant M \leqslant M$, где M — глубина многообразия $\mathbf{M}$. Тогда *Q-модулем* этого семейства мы назовем величину

$$\operatorname{mod}_Q \Gamma = \inf \int\limits_{\mathbf{M}} \rho^{Q/l}\, dx,$$

где инфинум берется по всем таким неотрицательным борелевским функциям $\rho\colon \mathbf{M} \to [0, \infty]$, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho \, d\mathcal{H}^Q \geqslant 1$$

для любой $\gamma \in \Gamma$.

Теорема 1.
Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — пространства Карно-Каратеодори хаусдорфовой размерности $Q > 1$, и $\Omega \subset \mathbf{M}$ — компактно вложенное открытое связное множество. Если отображение $f\colon \Omega \to \Omega' = f(\Omega)$ квазиконформно, то оно абсолютно непрерывно на mod_Q-почти всех интегральных кривых векторного поля степени l, $1 \leqslant l \leqslant M$, где M — глубина многообразия $\mathbf{M}$.

В доказательстве теоремы 1 существенно применяются результаты работ [3, 4].

В работе [5] показано, что гомеоморфизм метрических пространств достаточно общего вида, в частности, пространств Карно-Каратеодори, индуцирующий изоморфизм пространств BMO, является квазиконформным. В настоящей работе мы показываем, что условие квазиконформности является не только необходимым, но и достаточным.

Работа выполнена при частичной поддержке проектами Научные школы: НШ-921.2012.1; и ФЦПК – заявка № 2012-1.2.1-12-000-1001-025.

Теорема 2.

Пусть $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *— пространства Карно-Каратеодори хаусдорфовой размерности* $Q > 1$*, и* $\Omega \subset \mathbf{M}$ *— компактно вложенное открытое связное множество. Если отображение* $f\colon \Omega \to \Omega' = f(\Omega)$ *квазиконформно, то оно индуцирует ограниченный линейный оператор*

$$f^*\colon BMO(\Omega') \to BMO(\Omega)$$

по правилу $f^*u = u \circ f$*. При этом норма* $\|f^*\|$ *оператора суперпозиции оценивается через коэффициент квазиконформности и размерность Хаусдорфа* Q *пространства Карно-Каратеодори.*

В доказательстве теоремы 2 применяются результаты работ [3, 4, 6].

Список литературы

[1] G. A. Margulis and G. D. Mostow, “The differential of a quasiconformal mapping of Carnot-Caratheodory space”, *Geom. Funct. Anal.*, 21, 402–433 (1995).

[2] С. К. Водопьянов, А. В. Грешнов, “Аналитические свойства квазиконформных отображений на группах Карно”, *Сиб. мат. журн.*, 36, No. 6, 1317–1327 (1995).

[3] J. Heinonen and P. Koskela, “Definitions of quasiconformality”, *Invent. math.*, 120, 61–70 (1995).

[4] J. Heinonen and P. Koskela, “Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry”, *Preprint*, 191 (1995).

[5] S. K. Vodop’yanov, A. V. Greshnov, “Quasiconformal mappings and BMO-spaces on metric structures”, *Sib. Adv. Math.*, Vol. 8, No. 3, 132–150 (1998).

[6] Reimann H. M. “Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings”, *Comment. math. helv.*, Vol. 8, 260–276 (1974).

Новосибирский Государственный Университет, г. Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: maxtryamkin@yandex.ru

COMPLEXITY OF HYPERBOLIC 3-MANIFOLDS

EVGENY FOMINYKH AND ANDREI VESNIN

The most useful approach to a classification of 3-manifolds is the complexity theory founded by S. Matveev [1]. Unfortunately, exact values of complexity are known for few infinite series of 3-manifold only.

We present the results on complexity for two infinite series of hyperbolic 3-manifolds with boundary. The first is a family of Paoluzzi – Zimmermann manifolds from [1], and the second is its analogy defined in [4]. These manifolds are constructing as follows.

For every $n \geqslant 3$ consider an n-gonal bipyramid $\mathcal{B}_n$, the union of pyramids $NL_0L_1 \dots L_{n-1}$ and $SL_0L_1 \dots L_{n-1}$ along the common n-gonal base $L_0L_1 \dots L_{n-1}$. Let k be such integer that $0 \leqslant k < n$. The first family corresponds to the case $\gcd(n, 2-k) = 1$, and the second – to the case $\gcd(n, 2-k) = 2$. Let us identify the faces of $\mathcal{B}_n$ in pairs: for each $i = 0, \dots, n-1$ the face $L_iL_{i+1}N$ gets identified with the face $SL_{i+k}L_{i+k+1}$ by a homeomorphism of faces. (indices are taken $\bmod n$ and the vertices are glued together in the order in which they are written). Denote the resulting identification spaces by $M^*_{n,k}$. It is an orientable pseudomanifold with one singular point. Cutting of a cone neighborhood of the singular point from $M^*_{n,k}$ we get a compact manifold $M_{n,k}$ with one boundary component.

Denote by $c(M_{n,k})$ the Matveev's complexity of $M_{n,k}$ which is defined as the minimum possible number of true vertices of an almost simple spine of $M_{n,k}$.

Theorem. [3, 4] *Suppose that* $\gcd(n, 2-k) = 1$ *or* $\gcd(n, 2-k) = 2$. *Then for every integer* $n \geqslant 6$ *we have* $c(M_{n,k}) = n$.

References

[1] S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Springer, (2007).

[2] L. Paoluzzi, B. Zimmermann, "On a class of hyperbolic 3-manifolds and groups with one defining relation", *Geom. Dedicata*, 60, 113-123 (1996).

[3] A. Vesnin, E. Fominykh, "Exact values of complexity for Paoluzzi - Zimmermann manifolds", *Doklady Mathematics*, 84, No. 1, 542-544 (2011).

[4] A. Vesnin, E. Fominykh, "On complexity of hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary", *Siberian Math. Journal*, 53, No. 4, 625-634 (2012).

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001, Russia
E-mail address: fominykh@csu.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk 630090, Russia
E-mail address: vesnin@math.nsc.ru

The work is partially supported by RFBR, grants 10-01-91056 (A. Vesnin) and 11-01-00605 (E. Fominykh), and by the grant for Russian Leading Scientific Schools (NSh.-1414.2012.1).

ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ КАТЕГОРИИ ЧАСТИЧНОГО ДЕЙСТВИЯ МОНОИДА

АХМЕТ ХУСАИНОВ

Пусть S – множество. Рассмотрим произвольный моноид M с частичным действием справа $(s,\mu) \mapsto s \cdot \mu$ на элементах $s \in S$ с помощью элементов $\mu \in M$. *Категорией* $K(S)$ *частичного действия* M *на* S называется малая категория, объектами которой служат элементы $s \in S$, а морфизмами – тройки (s_1, μ, s_2) элементов $s_1, s_2 \in S$, $\mu \in M$, удовлетворяющих равенству $s_1 \cdot \mu = s_2$. Композиция определяется как $(s_2, \mu_2, s_3) \cdot (s_1, \mu_1, s_2) = (s_1, \mu_1\mu_2, s_3)$.

Данная работа посвящена группам гомологий категории $K(S)$ и их приложениям для случая, когда M – свободный частично-коммутативный моноид.

Пусть Ab – категория абелевых групп. Для произвольной малой категории $\mathcal{C}$ обозначим через $\mathfrak{F}\mathcal{C}$ *категорию факторизаций* в смысле [1]. Пусть $\mathcal{C}^{op}$ обозначает двойственную категорию. Для произвольных функтора $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ между малыми категориями и функтора $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ обозначим через $Lan^T F : \mathcal{D} \to \mathrm{Ab}$ левое расширение Кана функтора F вдоль T. Пусть $G : (\mathfrak{F}\mathcal{C})^{op} \to \mathrm{Ab}$ – функтор. *Группы гомологий Бауэса-Виршинга* $H_n^{BW}(\mathcal{C}, G)$, $n \geq 0$, определяются как значения $\varinjlim_n^{(\mathfrak{F}\mathcal{C})^{op}} G$ левых производных функторов копредела $\varinjlim : \mathrm{Ab}^{(\mathfrak{F}\mathcal{C})^{op}} \to \mathrm{Ab}$ на функторе G.

Рассматривая моноид M как категорию с единственным объектом, определим функтор $U : K(S) \to M^{op}$, действующий на морфизмах как $(s_1, \mu, s_2) \mapsto \mu$. Функтор U будет определять функтор между категориями факторизаций $\mathfrak{F}(U) : \mathfrak{F}(K(S)) \to \mathfrak{F}(M^{op})$.

Теорема.

Для произвольных моноида M, действующего частично справа на множестве S и функтора $G : (\mathfrak{F}K(S))^{op} \to \mathrm{Ab}$ существуют изоморфизмы

$$H_n^{BW}(K(S), G) \cong H_n^{BW}(M^{op}, Lan^{(\mathfrak{F}(U))^{op}} G),$$

для всех $n \geq 0$.

Пусть E – множество, $I \subseteq E \times E$ – антирефлексивное симметричное отношение. Моноид, порожденный множеством E и заданный с помощью определяющих соотношений $ab = ba$ для всех $(a, b) \in I$, называется *свободным частично-коммутативным* или *моноидом трасс* и обозначается $M(E, I)$.

Рассмотрим применение теоремы для моноида трасс $M(E, I)$. Оно приводит к алгоритму вычисления сингулярных групп гомологий $H_n^{sing}(B(K(S)))$ классифицирующего пространства категории $K(S)$ и позволяет решить проблему 1 из работы [2]. С этой целью определим произвольное отношение линейного порядка на E и обозначим при $n > 0$

$$T_n(E, I) = \{(a_1, \cdots, a_n) | a_i < a_j \text{ и } (a_i, a_j) \in I, \text{ для всех } 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Положим $T_0(E, I) = \{1\}$ (единица моноида). Для частичного действия моноида трасс $M(E, I)$ на множестве S для всех $n \geq 0$ введем множества

$$Q_n(S, E, I) = \{(x, a_1, \cdots, a_n) \in S \times T_n(E, I) | x \cdot a_1 \cdots a_n \in S\}$$

В частности $Q_0(S, E, I) = S$.

Для произвольного множества X обозначим через LX свободную абелеву группу порожденную X. Моноид трасс $M(E, I)$ называется локально конечномерным, если E не содержит бесконечных подмножеств попарно перестановочных элементов.

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, № 2011-ПР-054.

Следствие 1.

Пусть S – множество с правым частичным действием локально конечномерного моноида трасс $M(E,I)$. Тогда группы $H_n^{sing}(B(K(S)))$ при $n \geq 0$ будут изоморфны группам гомологий комплекса

$$0 \leftarrow L(S) \overset{d_1}{\leftarrow} LQ_1(S,E,I) \overset{d_2}{\leftarrow} LQ_2(S,E,I) \leftarrow \cdots \leftarrow LQ_{n-1}(S,E,I) \overset{d_n}{\leftarrow} LQ_n(S,E,I) \leftarrow \cdots,$$

дифференциалы которого определены по формулам $d_n(x,a_1,\cdots,a_n) =$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(x\cdot a_i, a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n) - \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(x,a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n)$$

В работе [3] введены направленные группы гомологий. Рассмотрим функторы $\Delta^0\,\mathbb{Z} : K(S) \to \mathrm{Ab}$ и $\Delta^1\,\mathbb{Z} : K(S)^{op} \to \mathrm{Ab}$, принимающие на объектах постоянные значения $\Delta^0\,\mathbb{Z}(s) = \Delta^1\,\mathbb{Z}(s) = \mathbb{Z}$ для всех $s \in S$ и определенные при $\varepsilon \in \{0,1\}$ на морфизмах по формуле

$$\Delta^\varepsilon\,\mathbb{Z}(s \overset{w}{\to} s') = \begin{cases} 1_{\mathbb{Z}}, & \text{если } w = 1,\\ 0, & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Направленными группами гомологий множества S с частичным правым действием моноида трасс $M(E,I)$ называются абелевы группы

$$H_n^0(S,M(E,I)) = \varinjlim\nolimits_n^{K(S)}\Delta^0\,\mathbb{Z} \text{ и } H_n^1(S,M(E,I)) = \varinjlim\nolimits_n^{K(S)^{op}}\Delta^1\,\mathbb{Z}.$$

Следствие 2.

Пусть S – множество с правым частичным действием локально конечномерного моноида трасс $M(E,I)$. Для каждого фиксированного $\varepsilon \in \{0,1\}$ обозначим через $(LQ_\diamond(S,E,I),d^\varepsilon)$ комплекс, состоящий из абелевых групп и гомоморфизмов

$$0 \leftarrow LS \overset{d_1^\varepsilon}{\longleftarrow} LQ_1(S,E,I) \leftarrow \cdots \leftarrow LQ_{n-1}(S,E,I) \overset{d_n^\varepsilon}{\longleftarrow} LQ_n(S,E,I) \leftarrow \cdots$$

где

$$d_n^0(x,a_1,\cdots,a_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(x,a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n),$$

$$d_n^1(x,a_1,\cdots,a_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(xa_i,a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n).$$

Тогда будут иметь место изоморфизмы $H_n^\varepsilon(S,M(E,I)) \cong H_n(LQ_\diamond(S,E,I),d^\varepsilon)$.

Это следствие показывает, что группы гомологий Губо полукубического множества, соответствующего множеству с частичным действием моноида трасс, будут изоморфны группам гомологий Бауэса-Виршинга категории частичного действия этого моноида с коэффициентами в некоторых функторах.

Список литературы

[1] H.-J. Baues, G. Wirsching, "Cohomology of small categories", *J. Pure Appl. Algebra*, 38, No. 2-3, 187–211 (1985).

[2] A. Husainov, "On the homology of small categories and asynchronous transition systems", *Homology Homotopy Appl.*, 6, No. 1, 439–471 (2004).

[3] A. Husainov, "The Homology of Partial Monoid Actions and Petri Nets", *Appl. Categor. Struct.*, DOI: 10.1007/s10485-012-9280-9 Springer (2012).

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия

E-mail address: husainov51@yandex.ru