ВЫПУКЛЫЕ ПЯТИУГОЛЬНИКИ, ЗАМОЩАЮЩИЕ ПЛОСКОСТЬ

ОЛЬГА БАГИНА

Пусть имеется неограниченный запас одинаковых по форме фигур. Если ими можно замостить всю плоскость без зазоров и наложений, то есть так, что ни какие две фигуры не будут иметь общих внутренних точек, то о таких фигурах говорят, что ими можно выложить плоскость. Плоскость, выложенную фигурами, называют мозаикой, а саму фигуру — плиткой этой мозаики. Такие мозаики называют моноэдральными. Будем называть многоугольник мозаичным, если существует замощение плоскости многоугольниками, конгруэнтными данному.

Многие мозаики обладают симметриями, то есть они совмещаются с собой под действием некоторого движения плоскости. Если среди симметрий мозаики есть две неколлинеарные трансляции, то мозаика является периодической. Если группа симметрий мозаики действует транзитивно на плитках, т. е. каждая плитка мозаики может быть переведена в любую другую плитку мозаики с помощью симметрии этой мозаики, то такая мозаика называется изоэдральной или транзитивной на плитках. Кроме того, часто рассматриваются мозаики, называемые мозаиками ребро к ребру. Для любых двух плиток такой мозаики выполняется одно из следующих условий: 1) плитки не имеют общих точек; 2) плитки имеют ровно одну общую вершину; 3) плитки имеют ровно одно общее ребро.

Остается до сих пор нерешенной задача нахождения и классификации мозаичных многоугольников. Любой треугольник и четырехугольник замощает плоскость. Известно, что выпуклым многоугольником, имеющим более 6 сторон, замостить плоскость невозможно. Мозаики из шестиугольников были полностью исследованы в 1918 г. Рейнхардом в его докторской диссертации [3]. Таких шестиугольников оказалось 3 различных типа.

Проблема построения исчерпывающей классификации выпуклых пятиугольников, которыми можно замостить плоскость, остается до сих пор нерешенной. Было найдено 14 типов таких пятиугольников. Но до сих пор нет доказательства полноты имеющегося перечня.

Обозначим последовательные вершины пятиугольника X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, его углы — соответственно x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Длины сторон пятиугольника $C_i = |X_{i-1}X_i|, i = 0, 1, 2, 3, 4$, индексы в последнем равенстве берутся по модулю 5. Известны следующие типы пятиугольников, замощающих плоскость:

1. $x_0 + x_1 = 180°$;
2. $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3$;
3. $x_0 = x_2 = x_3 = 120°, C_0 = C_1, C_3 = C_2 + C_4$;
4. $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
5. $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
6. $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$;
7. $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
8. $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
9. $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
10. $x_4 = 90°, x_0 + x_3 = 180°, 2x_1 - x_3 = 180°, 2x_2 + x_3 = 360°, C_0 = C_4 = C_1 + C_3$;
11. $x_0 = 90°, x_2 + x_4 = 180°, 2x_1 + x_2 = 360°, C_3 = C_4 = 2C_0 + C_2$;
12. $x_0 = 90°, x_2 + x_4 = 180°, 2x_1 + x_2 = 360°, 2C_0 = C_3 = C_2 + C_4$;
13. $x_0 = x_2 = 90°, 2x_1 = 2x_4 = 360° - x_3, C_2 = C_3, 2C_2 = C_4$;
14. $x_3 = 90°, x_0 + x_2 = 180°, x_0 + 2x_4 = 360°, C_0 = 2C_2 = 2C_4$.

Мною была получена полная классификация мозаичных пятиугольников, замощающих плоскость ребро к ребру [1].

Теорема 1.

Пятиугольник, замощающий плоскость ребро к ребру, относится к одному из следующих типов:

1. $x_0 + x_1 = 180°, C_0 = C_2$ *или* $C_3 = C_4$*;*
2. $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3, C_0 = C_2$*;*
3. $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$*;*
4. $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$*;*
5. $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$*;*
6. $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°; C_0 = C_1 = C_2 = C_3$*;*
7. $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$*;*
8. $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$.

Недавно аналогичный результат был получен японским автором Сугимото [4].

Доказательство теоремы 1 включает в себя полный перебор, который основывается на следующем. Назовем степенью вершины P число сходящихся в ней пятиугольников. Пусть $(\alpha_0, \dots, \alpha_4)$ — набор степеней всех вершин P, упорядоченных по возрастанию.

Теорема 2.

В любой ребро к ребру пятиугольной мозаике найдется хотя бы один пятиугольник, для которого набор степеней вершин может быть одним из следующих: $(3, 3, 3, 3, 3)$, $(3, 3, 3, 3, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 5)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$.

Плитка P мозаики, удовлетворяющая заключению теоремы 2, называется центральной. Обозначим T_i - множество пятиугольников, углы и стороны которых удовлетворяют соотношениям, перечисленным в i-м пункте теоремы 1, $i = 1, \dots, 8$. Вводится понятие типа пятиугольника $\delta(P)$, которое проще всего продемонстрировать на примере, запись $\delta(P) = 11212$ означает, что $C_0 = C_1 = C_3, C_2 = C_4, C_0 \neq C_2$. Имеется ровно 12 различных типов $\delta(P)$: 12345, 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212, 11223, 11123, 11122, 11112, 11111.

Короной для плитки P называется некоторое множество плиток, конгруэнтных P, удовлетворяющее условиям:
1)плитки этого множества замощают часть V плоскости;
2)плитка P содержится внутри V;
3)это множество минимально с этими двумя условиями.

Для существования мозаики из пятиугольников, необходимо, но не достаточно существование короны для каждого пятиугольника мозаики. Поиск корон для центральной плитки P осуществляется последовательно для каждого типа $\delta(P)$.

Первые девять типов рассмотрены в [1]. Тип 11111 рассмотрен в [2]. По оставшимся типам 11122, 11112 представлена статья к публикации.

Список литературы

[1] О. Г. Багина, “Мозаики из выпуклых пятиугольников”, *Вестник КемГУ*, No. 4(48), 63–73 (2011).
[2] O. Bagina, “Tiling the Plane with Congruent Equilateral Convex Pentagons”, *J. Combin. Theory. Ser. A*, No. 2(105), 221–232 (2004).
[3] K. Reinhardt, *Uber die Zerlegung der Ebene in Polygone*, Dissertation, Universit ät Frankfurt, (1918).
[4] T. Sugimoto, “Classification of Convex Pentagons That Can Generate Edge-to-edge Monohedral Tilings of The Plane”, *Forma*, (submitted to).

Кемеровский государственный университет, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: ogbag@mail.ru