НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ НА МНОГООБРАЗИЯХ КАРНО С C^1-ГЛАДКИМИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ

СЕРГЕЙ БАСАЛАЕВ

Связное N-мерное гладкое многообразие $\mathbb{M}$ назовём *многообразием Карно*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ задана фильтрация

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$$

подрасслоениями такими, что в окрестности каждой точки $U(g) \subset \mathbb{M}$ найдется семейство C^1-гладких векторных полей $X_1, \dots, X_N$, удовлетворяющих следующим двум свойствам. Для каждого $v \in U$ имеем

(1) $H_i\mathbb{M}(v) = H_i(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\}$ — подпространство $T_v\mathbb{M}$ постоянной размерности $\dim H_i$, $i = 1, \dots, M$;

(2) $H_{j+1} = \operatorname{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$, $j = 1, \dots, M-1$.

В работе [1] получены Ball-Box теорема и свойство удвоения меры для такого класса многообразий. Используя эти результаты и неравенство Пуанкаре на группах Карно из работы [2], мы получаем следующий аналог неравенства Пуанкаре.

Теорема 1.
Пусть $E \in \mathcal{M}$ — компактное множество, и $1 \le p < \infty$. Найдутся такие постоянные $C > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что

$$\Big(\int\limits_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}|^p \, dy \Big)^{\frac{1}{p}} \le C_p r \Big(\int\limits_{B(x,r)} \sum_{i=1}^{\dim H_1} |X_i u(y)|^p \, dy \Big)^{\frac{1}{p}}$$

для любой точки $x \in E$, радиуса $0 < r \le r_0$ и любой функции $f \in C^\infty(\overline{B^g(r_0)})$. Здесь $u_{B(x,r)} = \mathcal{H}^\nu(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} u(y) \, dy$.

Данная теорема обобщает результат, полученный в работе [3] для достаточно гладких векторных полей и $p = 2$. Также, результаты работы [4] позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 2.
Пусть выполнены условия теоремы 1 и хаусдорфова размерность пространства $\mathcal{M}$ равна ν. Тогда:

(1) *Если $p < \nu$, то для всякого $0 < q < \frac{\nu p}{\nu - p}$ выполнено*

$$\Big(\int\limits_{B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}|^q \, dy \Big)^{\frac{1}{q}} \le C r \Big(\int\limits_{B(x,r)} \sum_{i=1}^{\dim H_1} |X_i u(y)|^p \, dy \Big)^{\frac{1}{p}};$$

(2) *Если $p = \nu$, то*

$$\int\limits_{B(x,r)} \exp\Big(\frac{C_1 |u(y) - u_{B(x,r)}|}{\|(X_1 u, \dots, X_{\dim H_1} u)\|_{L^\nu(B(x,r))}} \Big) \, dy \le C_2;$$

Работа выполнена при частичной поддержке проектами РФФИ: 11-01-00819-а; и Научные школы: НШ-921.2012.1.

(3) *Если* $p > \nu$, *то выполнено*

$$\sup_{y\in B(x,r)} |u(y) - u_{B(x,r)}| \leq Cr\Big(\int\limits_{B(x,r)} \sum_{i=1}^{\dim H_1} |X_i u(y)|^p \, dy\Big)^{\frac{1}{p}};$$

где константы C, C_1, C_2 *зависят только от* p, q, ν, C_p.

Список литературы

[1] S. Basalaev, S. Vodopyanov, “Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces”, `arXiv:1206.5197v2 [math.MG]`

[2] D. V. Isangulova, S. K. Vodopyanov, “Coercitive estimates and integral representation formulas on Carnot groups”, *Eurasian Math. J.* 1, No. 3, 58–96 (2010).

[3] D. Jerison, “The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander’s condition”, *Duke Math. J.* 53, No. 2, 503–523 (1986).

[4] P. Hajłasz, P. Koskela, “Sobolev Met Poincaré”, *Mem. Amer. Math. Soc.* 145, No. 688, x-101 (2000).

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: `sbasalaev@gmail.com`