НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЭРМИТОВЫХ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

АЛИЯ БУКУШЕВА

Задание почти контактной метрической структуры $(X,\varphi,g,\eta,\vec{\xi})$ предполагает, в частности, задание оператора φ, действующего в касательном расслоении к гладкому многообразию X. Квадрат ограничения этого оператора на распределении $D = ker\eta$ равен -1: $\varphi^2(\vec{x}) = -\vec{x}$, $\vec{x} \in \Gamma(D)$, что указывает на некоторую близость почти контактных метрических пространств с почти комплексными пространствами. Схожесть результатов, полученных при исследовании указанных пространств, усиливается для некоторых классов почти контактных метрических многообразий. Исторически более рано начавшая свое развитие теория почти комплексных пространств с подходящей римановой метрикой определенным образом задает тон в исследовании почти контактных метрических пространств. Одним из самых ярких результатов в рассматриваемом контексте является следующее утверждение (см., например, [1]): на многообразии $X \times R$ индуцируется почти комплексная структура $J(\vec{x}, f\frac{d}{dt}) = (\varphi\vec{x} - f\vec{\xi}, \eta(\vec{x})\frac{d}{dt})$, интегрируемость которой тесно связана со свойствами структуры $(X,\varphi,g,\eta,\vec{\xi})$. Так, например, структура J оказывается интегрируемой, если структура $(X,\varphi,g,\eta,\vec{\xi})$ является Сасакиевой. Существуют различные точки зрения на то, какими свойствами должна обладать структура φ, претендующая на звание "интегрируемой". Имеет место следующая теорема (см., например, [2]).

Теорема.

CR-структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда для любых $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$ выполняются условия

$$1.\, [\vec{x},\varphi\vec{y}] + [\varphi\vec{x},\vec{y}] \in \Gamma(D), \quad 2.\, \varphi[\vec{x},\varphi\vec{y}] + \varphi[J\vec{x},\vec{y}] = [\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}] - [\vec{x},\vec{y}].$$

Другой смысл в условие интегрируемости структуры φ вкладывается в работе [3]: структура φ называется интегрируемой, если ее компоненты постоянны в некотором атласе, состоящем из адаптированных карт [3]. В цитируемой работе почти контактное метрическое пространство с интегрируемой структурой φ было названо эрмитовым почти контактным метрическим пространством. В настоящей работе мы показываем, что эрмитовы почти контактные метрическим пространства не сводятся к многообразиям Сасаки и обладают свойствами, подтверждающими целесообразность их названия. Пусть в пространстве $R^7\backslash(\vec{0})$ распределение D порождается векторными полями вида $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_7$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3 - x^4\partial_7$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\vec{e}_5 = \partial_5 - x^6\partial_7$, ∂_6. Легко проверить, что введенная с помощью равенств $\varphi(\partial_7) = 0$, $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_3$, $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_5$, $\varphi(\vec{e}_4) = \vec{e}_6$ структура φ интегрируема, но не принадлежит независимо от задания метрики ни к какой структуре Сасаки. С другой стороны, эрмитовы почти контактные метрические пространства обладают многими из важных свойств многообразий Сасаки. Так, например, имеет место следующая теорема.

Теорема.

Пусть Y n-мерное подмногообразие $2m+1$-мерно эрмитова почти контактного метрического пространства. Если вектор $\vec{\xi}$ нормален к Y, то при $m \geq n$ многообразие Y антиинвариантно относительно φ.

Список литературы

[1] G. Pitis, “Hamiltonian fields and energy in contact manifolds”, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 5, No. 1, 63–67 (2008).

[2] C. P. Boyer, K. Galicki, "Einstein manifolds and contact geometry", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129, No. 8, 2419–2430 (2001).

[3] С. В. Галаев, "Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразований", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.*, Т. 12, Вып. 1, 16–22 (2012).

Саратовский государственный университет имени Н.Г, Чернышевского, Саратов, 410012, Россия

E-mail address: bukusheva@list.ru