О ПОВЕДЕНИИ ТЕНЗОРА НЕЙЕНХЕЙСА НА 6-МЕРНОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

НАТАЛИЯ ДАУРЦЕВА, АНАСТАСИЯ ТАРАСЕНКО

Пусть (M, I) шестимерное почти комплексное многообразие. Если почти комплексная структура I индуцирована некоторой комплексной структурой на M, то говорят, что I – комплексная или интегрируемая. Ключевую роль в вопросе интегрируемости играет тензор Нейенхейса $N : \Lambda^2 T^{1,0}(M) \longrightarrow T^{0,1}(M)$. Известно [3], что тензор Нейенхейса на M тождественно равен нулю в том и только том случае, если I интегрируема. Однако, тензор Нейенхейса важен не только в решении вопросов интегрируемости. Например, если (M, I) почти комплексное 6-многообразие с нигде не вырожденным тензором Нейенхейса N, допускающее эрмитову связность с тотально кососимметричным кручением, то на нем можно определить нигде не вырожденную действительную форму объема $\mathrm{Vol}_I := \det N^* \otimes \overline{\det N^*}$. В работе М. Вербитского [4] показано, что в этом случае функционал $I \longrightarrow \int_M \mathrm{Vol}_I$ имеет критическую точку в I в том и только том случае, если (M, I) допускает приблизительно келерову метрику. В статье [2] исследуется двухпараметрическое семейство функционалов связанных с тензором Нейенхейса, их критические точки и связь с квази-интегрируемыми и приблизительно-келеровыми структурами.

В нашей работе изучается поведение тензора Нейенхейса на 6-мерной группе Гейезенберга G. Рассматривается пространство $\mathcal{A}^+$ всех левоинвариантных почти комплексных структур на G, сохраняющих ориентацию. Зафиксируем стандартную левоинвариантную метрику g на G. Тогда [5] пространство $\mathcal{A}^+$ имеет структуру расслоения над пространством $\mathcal{AO}_g^+$ всех g-ортогональных левоинвариантных почти комплексных структур, сохраняющих ориентацию. Причем слоем над $I \in \mathcal{AO}_g^+$ является пространство $\mathcal{A}_{\omega_I}^+ = \{J \in \mathcal{A}^+ : \omega_I(JX, JY) = \omega_I(X, Y)\}$, положительно ассоциированных с формой $\omega_I(X, Y) := g(IX, Y)$ почти комплексных структур. База такого расслоения в случае размерности 6 есть однородное пространство $SO(6)/U(3) = \mathbb{CP}^3$. Представление $\mathbb{CP}^3$ в виде 6-мерного тетраэдра [1] с гранями $\mathbb{CP}^2$ и ребрами $\mathbb{CP}^1$ позволяет получить явное описание ортогональных левоинвариантных почти комплексных структур на G [6].

В настоящей работе найден тензор Нейенхейса $N(I)$ и квадрат его нормы для произвольной почти комплексной структуры $I \in \mathcal{AO}_g^+$ в параметризации [6]. Исследованы экстремальные значения квадрата нормы тензора Нейенхейса на $\mathcal{AO}_g^+$. Также изучается вопрос о поведении тензора Нейенхейса при деформации ортогональной почти комплексной структуры $I \in \mathcal{AO}_g^+$ вдоль слоя $\mathcal{A}_{\omega_I}^+$.

Список литературы

[1] E. Abbena, S. Garbiero, S. Salamon, “Almost Hermitian geometry on six dimensional nilmanifolds”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* , 30, 147—170 (2001).

[2] R. Brayant, “On the geometry of almost complex 6-manifolds”, *Asian Journ. of Math.*, 10, 561–606 (2006).

[3] A. Newlander, L. Nirenberg, “Complex analytic coordinates in almost complex manifolds”, *Ann. of Math.*, 65, 391–404 (1957).

[4] M. Verbitsky, “An intrinsic volume functional on almost complex 6-manifolds and nearly Kähler geometry”, preprint, July 2005, `arXiv:math.DG/0507179`

[5] Н. А. Даурцева, “О многообразии почти комплексных структур”, *Матем. заметки.*, 78, N 1, 66–71 (2005).

[6] Н. А. Даурцева, “Пространство левоинвариантных ортогональных почти комплексных структур на 6-мерных группах Ли.”, *Вестник КемГУ*, 3/1, 134–139 (2011), `arXiv:math.DG/1201.2998`

Работа поддержана грантом РФФИ, 12-01-00873-а и грантом Президента РФ по поддержке научных школ, проект НШ-544.2012.1.

Кемеровский Государственнй Университет, Красная 6, 650000 Кемерово, Россия
E-mail address: natali0112@ngs.ru